RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

فصل هفدهم
برهان گزاره های غیر شرطی
Proving Non-conditional Statements
بخش اول
برهان اگر و فقط اگر
If-and-Only-If proof

مقدمه —در سه فصل های قبل ، در مورد برهان مستقیم ، برهان عکس نقیض و برهان تناقض بحث کردیم. این سه روش برای اثبات گزاره هایی که شکل شرطی دارند ، و یا می توانند به صورت شرطی باز نویسی شوند ، بکار برده می شوند. اما بعضی قضیه ها و حکم ها را نمی توان به صورت شرطی نوشت. بعضی از قضیه ها به شکل اگر P فقط و فقط اگر Q هستند. چنین قضیه هایی گزاره های دو شرطی هستند. در این فصل به آنها می پردزیم؛

۱۷.۱ ـ برهان اگر و فقط اگر

در فصل های قبل دیدیم که این گزاره تصریح می کند که **هر دو** گزاره های شرطی زیر صحیح هستند.

اگر P پس Q

اگر Q پس P

پس برای اثبات اگر P فقط و فقط اگر Q باید دو گزاره شرطی را ثابت کنیم. گفتیم که $Q \Rightarrow P$ عکس $P \Rightarrow Q$ است. پس باید هر دو را ثابت کنیم.

حکم :عدد صحیح n فرد است اگر و فقط اگر $n^۲$ فرد باشد.

برهان

ابتدا نشان می دهیم اگر n فرد باشد ، دلالت می کند که $n^۲$ فرد است.

فرض می کنیم n فرد باشد. پس بر اساس تعریف عدد فرد داریم $n = ۲a + ۱$ است برای یک عدد صحیح a، پس $n^۲ = (۲a+۱)^۲ = ۴a^۲ + ۴a + ۱ = ۲\left(۲a^۲ + ۲a\right) + ۱$، این عبارت نشان می دهد که $n^۲$ دو برابر یک عدد صحیح است ، به اضافه ۱ پس $n^۲$ فرد است.

بر عکس ، باید نشان دهیم اگر $n^۲$ فرد باشد ، دلالت می کند که n فرد است.

برهان عکس نقیض را بکار می بریم.

فرض می کنیم n فرد نباشد. پس n زوج است. پس $n = ۲a$ است برای یک عدد صحیح a، لذا $n^۲ = (۲a)^۲ = ۲\left(۲a^۲\right)$ پس $n^۲$ زوج است زیرا دو برابر یک عدد صحیح است. پس $n^۲$ فرد نیست. و این یک برهان عکس نقیض است که اگر $n^۲$ فرد باشد ، پس n فرد است.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

حکم : فرض کنید a و b اعداد صحیح باشند. پس $a \equiv b \ (mod ۶\ )$ است اگر و فقط اگر $a \equiv b \ (mod ۲\ )$ و $a \equiv b (mod ۳\ )$ باشد.

برهان

ابتدا ثابت می کنیم اگر $a \equiv b \ (mod ۶\ )$ باشد پس $a \equiv b \ (mod ۲\ )$ و $a \equiv b \ (mod ۳\ )$ است.
فرض می کنیم $a \equiv b \ (mod ۶\ )$ باشد. این یعنی $۶|(a-b)$ پس یک عدد صحیح n وجود دارد بطوری که $a-b=۶n$ است. از این $a-b=۲(۳n)$ بدست می آوریم که دلالت می کند که $۲|(a-b)$ پس $a \equiv b \ (mod ۲\ )$ است. همچنین $a-b=۳(۲n)$ بدست می آوریم که دلالت می کند $۳|(a-b)$ پس $a \equiv b \ (mod ۳\ )$ است و لذا

$a \equiv b \ (mod ۲\ )$ و $a \equiv b \ (mod ۳\ )$.

بر عکس ، فرض می کنیم $a \equiv b \ (mod ۲\ )$ ، و $a \equiv b \ (mod ۳\ )$ باشد. چون داریم

$a \equiv b \ (mod ۲\ )$

پس $۲|(a-b\ )$ پس یک عدد صحیح k وجود دارد بطوری که $a-b=۲k$ است. لذا $a-b$ زوج است. همچنین از $a \equiv b \ (mod ۳\ )$ داریم $۳|(a-b)$ پس یک عدد صحیح l وجود دارد بطوری که $a-b=۳l$ است. اما چون می دانیم $a-b$ زوج است ، نتیجه می شود که l هم باید زوج باشد. زیرا اگر فرد بود پس باید $a-b=۳l$ باشد. پس $l=۲m$ است برای یک عدد صحیح m، پس $a-b=۳l=۳*۲m=۶m$ ، این یعنی $۶|(a-b)$ و لذا $a \equiv b \ (mod ۶\ )$.

ملاحظه می کنید که برهان اگر و فقط اگر یک برهان است که شامل دو برهان است که با آن اشنا هستیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷.۲ - برهان وجود و منحصر به فرد بودن Existence and Uniqueness Proof

تا کنون در مورد برهان گزاره های شرطی یا گزاره هایی که می توان آنها را با دو یا چند گزاره شرطی بیان کرد ، بحث کرده ایم. این گزاره ها شکل $P(x) \Rightarrow Q(x)$ دارند. وقبلا دیدیم که می توان این گزاره را به صورت $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ بیان کرد.
پس گزاره شرطی ، گزاره های مسور کلی هستند. پس برای برهان یک گزاره شرطی ، در حقیقت یک گزاره مسور کلی را ثابت می کنیم. مسور یعنی مشروط و مقید –واجد شرایط
اما
چگونه یک قضیه به صورت $\exists x, R(x)$ را ثابت می کنیم؟
این گزاره می گوید یک شئی x وجود دارد ، بطوری که $R(x)$ صحیح است. برای این که ثابت کنیم $\exists x, R(x)$ صحیح است ، کافی است یک مثال برای این x بیاوریم بطوری که $R(x)$ صحیح باشد.

حکم – یک عدد اول زوج وجود دارد.
برهان
ملاحظه می کنید که ۲ یک عدد اول زوج است.

حکم - یک عدد صحیح وجود دارد که می توان آنرا به صورت مجموع دو مکعب کامل به دو طریق مختلف بیان کرد.
برهان
عدد ۱۷۲۹ را در نظر بگیرید. ملاحظه می کنید $۱۷۲۹ = ۱۲^۳ + ۱^۳$ و $۱۷۲۹ = ۱۰^۳ + ۹^۳$
پس ۱۷۲۹ را به صورت دو مکعب کامل به دو طریق بیان کرد.

حکم - اگر $a, b \in \mathbb{N}$ باشد ، پس اعداد صحیح k و l وجود دارند ، بطوری که

$$gcd(a,b) = ak + bl$$

برهان مستقیم
فرض می کنیم $a, b \in \mathbb{N}$ باشد. مجموعه $A = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه شامل هم اعداد صحیح مثبت و هم اعداد صحیح منفی و همچنین 0 است.
دلیل :فرض کنید $y = 0$ و فرض کنید x تمام اعداد صحیح باشد. پس $ax + by = ax$ شامل تمام ضریب های a است ، هم مثبت و هم منفی و هم 0.
حالا فرض کنید d کوچک ترین عضومثبت A باشد. پس چون d در A است ، باید به شکل $d = ak + bl$ باشد ، برای $k, l \in \mathbb{Z}$.
حالا نشان می دهیم $d = gcd(a,b)$ است. ابتدا استدلال می کنیم d یک مقسوم علیه مشترک a و b است. و سپس نشان می دهیم که بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک است.
برای این که ببینیم $d|a$ الگوریتم تقسیم $a = qd + r$ برای اعداد صحیح q و $0 \leq r < d$ را بکار می بریم. معادله $a = qd + r$ به ما

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(ak + b\ell) \\ &= a(1 - qk) + b(-q\ell). \end{aligned}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

می دهد. پس r شکل $r = ax + by$ دارد. پس متعلق به A است. اما $0 \le r < d$ و d کوچک ترین عضو مثبت A است، پس r نمی تواند مثبت باشد ، لذا $r = 0$ است. معادله $a = qd + r$ را به صورت $a = qd$ باز نویسی می کنیم ، پس $d|a$.
با تکرار این بحث درمورد $b = qd + r$ نشان داده می شود که $d|b$ ، پس d در حقیقت مقسوم علیه مشترک a و b است. حالا باید نشان دهیم بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک است.
چون $gcd(a,b)$ هم a و هم b را تقسیم یا عاد می کند ، پس داریم $a = gcd(a,b) * m$ و $b = gcd(a,b) * n$ برای $m,n \in \mathbb{Z}$ ، پس

$$d = ak + bl = gcd(a,b) * mk + gcd(a,b) * nl = gcd(a,b)(mk + nl)$$

لذا d یک مضرب $gcd(a,b)$ است. لذا $d \ge gcd(a,b)$ است. اما d نمی تواند برای a و b یک مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از $gcd(a,b)$ باشد. پس $d = gcd(a,b)$ است.

حالا به موضوع منحصر به فرد بودن می پردازیم. گاهی اوقات گزاره وجود همراه است با منحصر به فرد بودن است. مثلا می گویم یک x منحصر به فرد وجود دارد بطوری که $P(x)$.

حکم : فرض کنید $a,b \in \mathbb{N}$ باشد. پس یک $d \in \mathbb{N}$ منحصر به فرد وجود دارد بطوری که یک عدد صحیح m یک مضرب d است اگر و فقط اگر $m = ax + by$ باشد ، برای $x,y \in \mathbb{Z}$.
برهان
فرض می کنیم $a,b \in \mathbb{N}$ باشد. و فرض می کنیم $d = gcd(a,b)$ باشد. حالا نشان می دهیم عدد صحیح m یک مضرب d است اگر و فقط اگر $m = ax + by$ باشد ، برای $x,y \in \mathbb{Z}$.
فرض می کنیم $m = dn$ یک مضرب d باشد. بر اساس حکم در همین بخش ، اعداد صحیح k و l وجود دارند بطوری که $d = ak + bl$ ، پس داریم.

$$m = dn = (ak + bl)n = a(kn) + b(ln)$$

پس $m = ax + by$ است برای اعداد صحیح $x = kn$ و $y = ln$.
بر عکس ، فرض می کنیم $m = ax + by$ باشد ، برای $x,y \in \mathbb{Z}$. چون $d = gcd(a,b)$ یک مقسوم علیه هم a است و هم b پس داریم $a = dc$ و $b = de$ برای $c,e \in \mathbb{Z}$.
پس $m = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ و این یک مضرب d است.
حالا نشان داده ایم که یک عدد طبیعی d وجود دارد با این خصوصیات که m یک مضرب d است اگر و فقط اگر $m = ax + by$ باشد برای $x,y \in \mathbb{Z}$.
حالا باید نشان دهیم d تنها چنین عدد طبیعی است. برای این کار ، فرض می کنیم d' یک عدد طبیعی باشد با همان خصوصیات d.

$$\text{عدد } m \text{ یک مضرب } d' \text{ است } \Leftrightarrow m = ax + by \text{ برای } x,y \in \mathbb{Z}$$

حالا نشان می دهیم $d = d'$ است. یعنی d عدد طبیعی منحصر به فرد است با خصوصیات ذکر شده.
چون عبارت قرمز رنگ بالا $m = a * ۱ + b * 0 = a$ یک مضرب d' است. همچنین

$$m = a * 0 + b * ۱ = b$$

یک مضرب d' است. پس a و b هر دو مضرب های d' هستند. پس d' مقسوم علیه مشترک a و b است و لذا

$$d' \le gcd(a,b) = d$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

است. همچنین براساس عبارت قرمز رنگ مضرب $m = d' * ۱ = d'$ می تواند به صورت $d' = ax + by$ بیان شود برای $x, y \in \mathbb{Z}$.

همان طور که در پاراگراف دوم ذکر شد ، $a = dc$ و $b = de$ است برای $c, e \in \mathbb{Z}$.

لذا $d' = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ است پس d' یک مضرب d است. و d و d' هر دو مثبت هستند ، پس داریم $d \leq d'$ است.

پس نشان دادیم $d' \leq d$ است و $d \leq d'$ است ، پس $d = d'$ است. این برهان را کامل می کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷.۳ ـ تمرینات فصل هفدهم

گزاره های زیر را ثابت کنید. این تمرینات شامل کلیه برهانهایی که تا کنون بحث شده اند می باشند.

۱ ـ فرض کنید $x \in \mathbb{Z}$ باشد. پس x زوج است اگر و فقط اگر $۳x + ۵$ فرد باشد.

برهان

ابتدا برهان مستقیم بکار می بریم تا نشان دهیم اگر x زوج باشد ، پس $۳x + ۵$ فرد است.

اگر x زوج باشد ، پس $x = ۲n$ است برای یک عدد صحیح n ، پس داریم.

$$۳x + ۵ = ۳(۲n) + ۵ = ۶n + ۵ = ۶n + ۴ + ۱ = ۲(۳n + ۲) + ۱$$

پس $۳x + ۵$ فرد است زیرا به صورت $۲k + ۱$ است ، اینجا $k = ۳n + ۲ \in \mathbb{Z}$ است.

بر عکس ، باید نشان دهیم اگر $۳x + ۵$ فرد باشد ، پس x زوج است.

برای این کار از برهان عکس نقیض استفاده می کنیم.

فرض می کنیم x زوج نباشد. پس x فرد است. پس $x = ۲n + ۱$ است برای یک عدد صحیح n ، پس $۳x + ۵ = ۳(۲n + ۱) + ۵ = ۶n + ۸ = ۲(۳n + ۴)$ ، این یعنی $۳x + ۵$ زوج است و نه فرد.

۲ ـ اگر a یک عدد صحیح باشد ، پس $a^۳ + a^۲ + a$ زوج است اگر و فقط اگر a زوج باشد.

برهان

ابتدا ثابت می کنیم اگر $a^۳ + a^۲ + a$ زوج باشد ، پس a زوج است. برای این کار از برهان عکس نقیض استفاده می کنیم.

فرض می کنیم a زوج نیست. پس a فرد است ، پس

یک عدد صحیح n وجود دارد بطوری که $a = ۲n + ۱$ است. پس

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + a &= (2n+1)^3 + (2n+1)^2 + (2n+1) \\ &= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 2n + 1 \\ &= 8n^3 + 16n^2 + 12n + 2 + 1 \\ &= 2(4n^3 + 8n^2 + 6n + 1) + 1. \end{aligned}$$

عملیات بالا نشان می دهد که $a^۳ + a^۲ + a$ فرد است و نه زوج. پس نشان دادیم اگر $a^۳ + a^۲ + a$ زوج باشد پس a زوج است.

بر عکس ، باید نشان دهیم اگر a زوج باشد ، پس $a^۳ + a^۲ + a$ زوج است. برهان مستقیم بکار می بریم. فرض کنید a زوج باشد ، پس $a = ۲n$ است برای یک عدد صحیح n ، پس داریم.

$$a^۳ + a^۲ + a = (۲n)^۳ + (۲n)^۲ + ۲n = ۸n^۳ + ۴n^۲ + ۲n = ۲\left(۴n^۳ + ۲n^۲ + n\right)$$

پس $a^۳ + a^۲ + a$ زوج است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ – عدد صحیح a فرد است اگر و فقط اگر $a^۳$ فرد باشد.
برهان
فرض می کنیم a فرد باشد ، پس $a = ۲n + ۱$ است برای یک عدد صحیح n .
و داریم $a^۳ = (۲n + ۱)^۳ = ۸n^۳ + ۱۲n^۲ + ۶n + ۱ = ۲\left(۴n^۳ + ۶n^۲ + ۳n\right) + ۱$
این نشان می دهد $a^۳$ فرد است.
بر عکس باید نشان دهیم اگر $a^۳$ فرد باشد ، پس a فرد است. برای این کار از برهان عکس نقیض استفاده می کنیم.
فرض می کنیم a فرد نباشد ، پس a زوج است ، پس $a = ۲n$ است برای یک عدد صحیح n .
پس $a^۳ = (۲n)^۳ = ۸n^۳ = ۲\left(۴n^۳\right)$ که زوج است و نه فرد.

۴ - فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}$ باشد. پس $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$ است اگر و فقط اگر $x = 0$ یا $y = 0$ باشد.
برهان
ابتدا برهان مستقیم بکار می بریم تا ثابت کنیم اگر $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$ باشد ، پس $x = 0$ است یا $y = 0$ است.
فرض می کنیم $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$ باشد. از این $x^۲ + ۲xy + y^۲ = x^۲ + y^۲$ بدست می آوریم. پس $xy = 0$ است. لذا $x = 0$ است و یا $y = 0$ است.
بر عکس ، باید نشان دهیم اگر $x = 0$ و یا $y = 0$ باشد ، پس $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$ است.
حالت اول : اگر $x = 0$ باشد ، پس $(x+y)^۲ = (0+y)^۲ = y^۲ = 0^۲ + y^۲ = x^۲ + y^۲$
حالت دوم : اگر $y = 0$ باشد ، پس $(x+y)^۲ = (x+0)^۲ = x^۲ = x^۲ + 0^۲ = x^۲ + y^۲$
در هر دو حالت داریم $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$.

۵ - فرض کنید $a \in \mathbb{Z}$ باشد. ثابت کنید $۱۴|a$ اگر و فقط اگر $۷|a$ و $۲|a$
برهان
ابتدا برهان مستقیم بکار می بریم تا ثابت کنیم اگر $۱۴|a$ پس $۷|a$ و $۲|a$
فرض می کنیم $۱۴|a$ این یعنی $a = ۱۴m$ است برای یک عدد صحیح m . لذا $a = ۷(۲m)$.
یعنی $۷|a$ همچنین $a = ۲(۷m)$ یعنی $۲|a$ لذا $۷|a$ و $۲|a$.
بر عکس باید ثابت کنیم اگر $۷|a$ و $۲|a$ پس $۱۴|a$. باز هم برهان مستقیم بکار می بریم.
فرض می کنیم $۷|a$ و $۲|a$ چون $۲|a$ پس $a = ۲m$ است برای یک عدد صحیح m . و این دلالت می کند a زوج است. چون $۷|a$ پس $a = ۷n$ است برای یک عدد صحیح n. حالا چون می دانیم a زوج است و $a = ۷n$ است ، پس n زوج است. پس $n = ۲p$ برای یک عدد صحیح p. حالا $n = ۲p$ را در $a = ۷n$ می گذاریم ، پس داریم $a = ۷(۲p) = ۱۴p$ پس $۱۴|a$.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۶ - فرض کنید $a,b\in\mathbb{Z}$ باشد. ثابت کنید $(a-۳)b^{۲}$ زوج است اگر و فقط اگر a فرد یا b زوج باشد.

برهان

ابتدا ثابت می کنیم اگر $(a-۳)b^{۲}$ زوج باشد ، پس a فرد است یا b زوج است.
برای این کار از برهان عکس نقیض استفاده می کنیم.
فرض می کنیم a فرد نیست یا b زوج نیست. بر اساس قانون دو مورگان a زوج است و b فرد است. پس اعداد صحیح m و n وجود دارند بطوری که $a=۲m$ و $b=۲n+۱$ است. حالا عملیات زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{aligned}(a-۳)b^{۲}&=(۲m-۳)(۲n+۱)^{۲}=(۲m-۳)\left(۴n^{۲}+۴n+۱\right)\\&=۸mn^{۲}+۸mn+۲m-۱۲n^{۲}-۱۲n-۳\\&=۸mn^{۲}+۸mn+۲m-۱۲n^{۲}-۱۲n-۴+۱\\&=۲\left(۴mn^{۲}+۴mn+m-۶n^{۲}-۶n-۲\right)+۱\end{aligned}$$

این نشان می دهد که $(a-۳)b^{۲}$ فرد است ، پس زوج نیست.
بر عکس ، باید نشان دهیم اگر a فرد باشد یا b زوج باشد ، پس $(a-۳)b^{۲}$ زوج است.
برای این کار از برهان مستقیم با دو حالت استفاده می کنیم.
حالت اول : فرض می کنیم a فرد باشد. پس $a=۲m+۱$ است برای یک عدد صحیح m.
پس $(a-۳)b^{۲}=(۲m+۱-۳)b^{۲}=(۲m-۲)b^{۲}=۲(m-۱)b^{۲}$ است. در این صورت $(a-۳)b^{۲}$ زوج است.
حالت دوم : فرض می کنیم b زوج باشد. پس $b=۲n$ است برای یک عدد صحیح n .
پس $(a-۳)b^{۲}=(a-۳)(۲n)^{۲}=(a-۳)۴n^{۲}==۲(a-۳)۲n^{۲}$ است. پس در این حالت هم $(a-۳)b^{۲}$ زوج است.
لذا در هر صورت $(a-۳)b^{۲}$ زوج است.

۷ - یک عدد اول بین ۹۰ و ۱۰۰ وجود دارد.

برهان

عدد ۹۷ را ملاحظه کنید.

۸ - اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد ، $۲^{0}+۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+\cdots+۲^{n}=۲^{n+۱}-۱$ است.

برهان مستقیم

فرض می کنیم $n\in\mathbb{N}$ باشد. فرض می کنیم S عدد زیر باشد.

$$S=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n-1}+2^n. \qquad (1)$$

طرفین (۱) را در ۲ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$2S=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n+2^{n+1}. \qquad (2)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حالا معادله (۱) را از معادله (۲) کم می کنیم. پس داریم. $۲S - S = ۲^0 + ۲^{n+۱}$ ، ساده می کنیم. پس داریم $S = ۲^{n+۱} - ۱$ ، این را با معادله (۱) ترکیب می کنیم. پس داریم.

$$۲^0 + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + \cdots + ۲^n = ۲^{n+۱} - ۱$$

این برهان را کامل می کند.

۹ - فرض کنید a, b, c اعداد صحیح باشند. اگر $a|b$ و $a|\left(b^۲ - c\right)$ پس $a|c$ ·

برهان مستقیم

فرض می کنیم $a|b$ و $a|\left(b^۲ - c\right)$، این یعنی $b = ad$ و $b^۲ - c = ae$ است برای اعداد صحیح d و e، معادله اول را به توان ۲ می رسانیم ، پس داریم. $b^۲ = a^۲d^۲$، معادله $b^۲ - c = ae$ را از $b^۲ = a^۲d^۲$ کم می کنیم ، پس داریم.

$$c = a^۲d^۲ - ae = a\left(ad^۲ - e\right)$$

چون $ad^۲ - e \in \mathbb{Z}$ است ، پس $a|c$.

۱۰ - اگر $a|bc$ و $gcd(a,b) = ۱$ باشد ، پس $a|c$ ·

برهان مستقیم

فرض می کنیم $a|bc$ و $gcd(a,b) = ۱$ باشد. این حقیقت که $a|bc$ یعنی $bc = az$ است برای یک عدد صحیح z ، و این حقیقت که $gcd(a,b) = ۱$ یعنی $ax + by = ۱$ است برای اعداد صحیح x, y، بر اساس حکم در بخش ۱۷.۲ صفحه ۵۰۵

از این $acx + bcy = c$ بدست می آوریم. در این معادله بجای bc می گذاریم az پس داریم. $acx + bcy = c$، این یعنی $a(cx + zy) = c$ است. لذا $a|c$.

www.riazisara.ir	دانلود از سایت ریاضی سرا