فصل شانزدهم
برهان در رابطه با مجموعه ها
Proofs Involving Sets
بخش اول
یک شئی عضو یک مجموعه است
An Object is an Element of a Set

مقدمه

هر چه بیشتر در ریاضیات وارد شویم ، بیشتر به اثبات برهان های در رابطه به مجموعه ها بر خورد می کنیم.

در این فصل در مورد مطالب زیر بحث می کنیم.

چگونه نشان دهیم یک شئی ، عضو یک مجموعه است.

چگونه ثابت کنیم یک مجموعه ، زیر مجموعه دیگری است.

چگونه ثابت کنیم دو مجموعه با هم برابر هستند.

در این فصل ممکن است به تعریف هایی در مورد مجموعه ها احتیاج پیدا کنید ، که ما در زیر خلاصه ای از آنها را برای یاد آوری باز گو می کنیم.

$$\begin{aligned} A\times B &= \{(x,y): x\in A,\ y\in B\}, \\ A\cup B &= \{x:(x\in A)\vee(x\in B)\}, \\ A\cap B &= \{x:(x\in A)\wedge(x\in B)\}, \\ A-B &= \{x:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}, \\ \overline{A} &= U-A. \end{aligned}$$

بخاطر بیاورید که $A\subseteq B$ است یعنی هر یک از اعضای A یک عضو B هم است. همچنین مجموعه تهی $\{\ \}=\emptyset$ تنه مجموعه ای است که هیچ عضوی ندارد. و برای هر مجموعه B داریم $\emptyset\subseteq B$ است.

۱.۱۶ ـ چگونه ثابت کنیم $a\in A$ است

ابتدا مروری داریم بر نماد مجموعه ساز Set Builder Notation سپس چگونه نشان دهیم که یک شئی مانند a یک عضو یک مجموعه A است.

بطور کلی ، یک مجموعه بوسیله نماد مجموعه ساز بیان می شود. مانند $A=\{x:P\}$ ، اینجا $P(x)$ یک گزاره نما در مورد x است. فهمیده می شود که مجموعه A دارای تمام اشیای x است بطوری که $P(x)$ در مورد آنها صادق است.

مثلا

$$\{x:\ \text{یک عدد صحیح فرد است}\ x\}=\{\cdots,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,\cdots\}$$

$$\{n \in \mathbb{Z}: \text{فرد است } n\} = \{\cdots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \cdots\}$$
$$\{x \in \mathbb{N}: ۶|x\} = \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, \cdots\}$$
$$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: b = a + ۵\} = \{\cdots, (-۲, ۳), (-۱, ۴), (۰, ۵), (۱, ۶), \cdots\}$$
$$\{X \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}) : |X| = 1\} = \{\ldots, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots\}$$

حالا باید واضح باشد که چگونه ثابت کنیم یک شئی a متعلق به یک مجموعه $\{x: P(x)\}$ است. چون $\{x; P(x)\}$ شامل تمام اشیا x است بطوری که $P(x)$ صحیح است ، پس برای نشان دادن $a \in \{x: P(x)\}$ است ، تنها کافی است نشان دهیم $P(a)$ صحیح است. به همین ترتیب برای نشان دادن $a \in \{x \in S: P(x)\}$ لازم است تائید کنیم $a \in S$ و $P(a)$ صحیح است. این مطالب در ذیل خلاصه شده اند.

چگونه نشان دهیم $a \in \{a: P(x)\}$

باید نشان دهیم $P(a)$ صحیح است.

چگونه نشان دهیم $a \in \{x \in S: P(x)\}$

۱ - نشان دهیم $a \in S$ است .

۲- نشان دهیم $P(a)$ صحیح است.

مثال ۱۶.۱.۱

می خواهیم عناصر $A = \{x: x \in \mathbb{N}$ و $۷|x\}$ را مورد بررسی قرار دهیم. این مجموعه شکل $A = \{x: P(x)\}$ دارد ، اینجا $P(x)$ گزاره باز $(x \in \mathbb{N}) \wedge (۷|x)$ است. پس $۲۱ \in A$ است ، زیرا $P(۲۱)$ صحیح است. به همین ترتیب $۷, ۱۴, ۲۸, ۳۵$ و غیرو همه عناصر A هستند. اما $۸ \notin A$ زیرا $P(۸)$ غلط است. همچنین $-۱۴ \notin A$ زیرا $P(-۱۴)$ غلط است.

مثال ۱۶.۱.۲

مجموعه $A = \{X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : |X| = 3\}$ را در نظر بگیرید. می دانیم که $\{۴, ۱۳, ۴۵\} \in A$ است زیرا $\{4, 13, 45\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ است و $|\{۴, ۱۳, ۴۵\}| = ۳$ است. همچنین $\{۱, ۲, ۳\} \in A$ و $\{۱۰, ۸۵۴, ۳\} \in A$ است. اما $\{۱, ۲, ۳, ۴\} \notin A$ زیرا $|\{۱, ۲, ۳, ۴\}| \neq ۳$ است. علاوه بر این $\{-۱, ۲, ۳\} \notin A$ زیرا $\{-1, 2, 3\} \notin \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

مثال ۱۶.۱.۳

مجموعه $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: x \equiv y (mod\ ۵)\}$ را در نظر بگیرید. ملاحظه می کنید که $(۸, ۲۳) \in B$ است ، زیرا $(۸, ۲۳) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است و $۸ \equiv ۲۳ (mod\ ۵)$. به همین طریق $(۱۰۰, ۷۵) \in B$ و $(۱۰۲, ۷۷) \in B$ اما $(۶, ۱۰) \notin B$.

حالا فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ باشد و زوج مرتب $(۴n + ۳, ۹n - ۲)$ را در نظر بگیرید. آیا این زوج مرتب متعلق به B است؟ برای پاسخ به این سوال ، ابتدا ملاحظه می کنیم که

$$(۴n+۳, ۹n-۲) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

است. سپس می بینیم که $(۴n+۳)-(۹n-۲)=-۵n+۵=۵(۱-n)$ است ، پس $۵|\big((۴n+۳)-(۹n-۲)\big)$ این یعنی $(۴n+۳)\equiv(۹n-۲)(mod\ ۵)$ است. لذا نشان دادیم که $(۴n+۳, ۹n-۲)$ شرایط لازم برای تعلق داشتن به B رادارد ، پس برای هر $n\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ داریم $(۴n+۳, ۹n-۲)\in B$ است.

مثال ۱۶.۱.۴

این مثال طریق متداول تعریف یک مجموعه است. مجموعه $C=\{۳x^۳+۲ : x\in\mathbb{Z}\}$ را در نظر بگیرید. عناصر این مجموعه شامل کلیه مقادیر $۳x^۳+۲$ است اینجا x یک عدد صحیح است. پس $-۲۲\in C$ است. زیرا $۳(-۲)^۳+۲=-۲۲$ است. می توان تایید کرد که $-۱\in C$ و $۵\in C$ است. همچنین $0\notin C$ و $\frac{۱}{۲}\notin C$.

۱۶.۲- چگونه ثابت کنیم $A \subseteq B$ است

به خاطر آورید که اگر A و B مجموعه باشند، پس $A \subseteq B$ است یعنی هر عضوی از A یک عضو B هم است. به عبارت دیگر اگر $a \in A$ باشد ، پس $a \in B$ است. لذا برای ثابت کردن $A \subseteq B$ فقط لازم است ثابت کنیم گزاره شرطی

اگر $a \in A$ باشد ، پس $a \in B$ است.

صحیح است. برای برهان مستقیم، فرض کنید $a \in A$ است و نتیجه بگیرید $a \in B$ است.
برای برهان عکس نقیض ، فرض کنید $a \notin B$ و نتیجه بگیرید $a \not\subset A$ است.

مثال ۱۶.۲.۱

ثابت کنید $\{x \in \mathbb{Z} : ۱۸|x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : ۶|x\}$

برهان

فرض می کنیم $a \in \{x \in \mathbb{Z} : ۱۸|x\}$ باشد. این یعنی $a \in \mathbb{Z}$ است و $۱۸|a$ ۰ بر اساس تعریف بخش پذیری ، یعنی عدد صحیح c وجود دارد بطوری که $a = ۱۸c$ است. در نتیجه $a = ۶(۳c)$ است. و از این نتیجه می گیریم که $۶|a$ ۰ پس a یکی از اعداد صحیح است که ۶ آنرا تقسیم می کند ، پس $a \in \{x \in \mathbb{Z} : ۶|x\}$ ۰ نشان دادیم$a \in \{x \in \mathbb{Z} : ۱۸|x\}$ یعنی$a \in \{x \in \mathbb{Z} : ۶|x\}$ ۰
پس نتیجه می گیریم $\{x \in \mathbb{Z} : ۱۸|x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : ۶|x\}$

مثال ۱۶.۲.۲

ثابت کنید $\{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} :\ ۶|x\}$

برهان

فرض می کنیم $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\}$ باشد. بر اساس تعریف فصل مشترک این یعنی $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\}$ و $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\}$ ۰ چون $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\}$ است ، می دانیم $۲|a$ پس برای یک $c \in \mathbb{Z}$ داریم $a = ۲c$, پس a زوج است.
چون $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\}$ است ، می دانیم $۹|a$, پس برای یک $d \in \mathbb{Z}$ داریم $a = ۹d$ ۰
چون a زوج است ، پس $a = ۹d$ یعنی d زوج است. پس $d = ۲e$ است برای یک عدد صحیح e ۰ و داریم $a = ۹d = ۹(۲e) = ۶(۳e)$ ۰ از $a = ۶(۳e)$ نتیجه می گیریم $۶|a$ و این یعنی $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۶|x\}$ ۰
نشان دادیم $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\}$ یعنی $a \in \{x \in \mathbb{Z} :\ ۶|x\}$ ۰ پس
$\{x \in \mathbb{Z} :\ ۲|x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} :\ ۹|x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} :\ ۶|x\}$

مثال ۱۶.۲.۳

نشان دهید

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{۶}\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{۳}\}$$

برهان

فرض می کنیم $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{۶}\}$ باشد. این یعنی

$(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و $a \equiv b(mod\ ۶)$ ، در نتیجه $۶|(a-b)$ پس $a-b=۶c$ است برای یک عدد صحیح c ، لذا $a-b=۳(۲c)$ و این یعنی $۳|(a-b)$ پس $a \equiv b(mod\ ۳)$ لذا $(a,b) \in \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y\ (mod\ ۳)\}$.

حالا می بینیم $(a,b) \in \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y\ (mod\ ۶)\}$، دلالت می کند که

$$(a,b) \in \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y\ (mod\ ۳)\}$$

پس نتیجه می گیریم

$$\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y\ (mod\ ۶)\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y\ (mod\ ۳)\}$$

بعضی از گزاره های در رابطه با زیر مجموعه ها آنقدر واضح و آشکار هستند که بدون برهان آنها را می پذیریم وبکار می بریم. مثلا اگر A و B دو مجموعه باشند، پس کاملا آسان است که ثابت کنیم $A\cap B \subseteq A$ است. دلیل :فرض کنید $x \in A\cap B$ باشد ، پس $x\in A$ و $x \in B$ است، پس $x \in A$ است. لذا $x \in A\cap B$ یعنی $x\in A$ است، پس $A\cap B \subseteq A$ است.

گزاره های دیگر شبیه این ، شامل $A \subseteq A\cup B$ و $A-B\subseteq A$ است. همچنین گزاره شرطی

$$\big((A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)\big) \Rightarrow (A\subseteq C) \text{ و } (X\subseteq A) \Rightarrow (X\subseteq A\cup B)$$

مثال بعدی نشان می دهد اگر A و B دو مجموعه باشند ، پس داریم.

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B).$$

قبل از شروع به اثبات ، اجازه دهید به یک مثال نگاه کنیم تا ببینیم آیا این گزاره واقعا صحت دارد .

فرض می کنیم $A=\{۱,۲\}$ و $B=(۲,۳)$ باشد. پس

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B) &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\cup\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}\\ &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}.\end{aligned}$$

همچنین

$$\mathscr{P}(A\cup B)=\mathscr{P}(\{1,2,3\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}.$$

پس اگر چه

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\neq\mathscr{P}(A\cup B),$$

است اما برای این مجموعه های بخصوص A و B صحیح است که بگوییم

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$$

حالا اجازه دهید بدون در نظر گرفتن A و B چه مجموعه هایی هستند ، ثابت کنیم

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$$

مثال ۱۶.۲.۴

ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه باشند ، پس داریم

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B).$$

برهان

فرض می کنیم $X\in\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$باشد. بر اساس تعریف اتحاد ، این یعنی

$X \in \mathscr{P}(A)$ یا $X \in \mathscr{P}(B)$.

پس بر اساس تعریف مجموعه های توانی داریم $X \subseteq A$ و $X \subseteq B$ است.

حالت اول : فرض می کنیم $X \subseteq A$ باشد. پس $X \subseteq A \cup B$ است. این یعنی $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$.

حالت دوم : فرض می کنیم $X \subseteq B$ باشد. پس $X \subseteq A \cup B$ است. این یعنی $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$.

حالت های دو گانه بالا نشان می دهند $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$.

پس نشان دادیم $X \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ یعنی $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$, و این برهان را کامل می کنند که

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B).$$

مثال ۱۶.۲.۵

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. اگر $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ باشد ، پس $A \subseteq B$ است.

برهان مستقیم.

فرض می کنیم $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ بر اساس فرض ، باید نشان دهیم $A \subseteq B$ است. برای این کار فرض می کنیم $a \in A$ باشد. پس مجموعه یک عضوی $\{a\}$ یک زیر مجموعه A است. پس $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$ و چون $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ است نتیجه می گیری $\{a\} \in \mathscr{P}(B)$. این یعنی

$$\{a\} \subseteq B$$

است و لذا $a \in B$ است. پس نشان دادیم $a \in A$ یعنی $a \in B$ است و لذا $A \subseteq B$ است.

۱۶.۳- چگونه ثابت کنیم $A = B$ است How to Prove $A = B$

یک روش استاندارد وجود دارد که نشان دهیم دو مجموعه با هم مساوی هستند. فرض کنید می خواهیم ثابت کنیم $A = B$ است. اگر نشان دهیم $A \subseteq B$ است ، پس هر عضوی از A در B هم است. اما این امکان دارد B شامل عضوی باشد که در A نیست. پس نمی توانیم نتیجه بگیریم $A = B$ است. اما اگر همچنین نشان دهیم $B \subseteq A$ است ، پس B نمی تواند شامل عضوی باشد که در A نباشد. پس باید ثابت کنیم $A \subseteq B$ است و هم $B \subseteq A$ است.

مثال ۱۶.۳.۱

ثابت کنید $\{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\} = \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$

برهان

ابتدا نشان می دهیم $\{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ است. فرض می کنیم $a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\}$ باشد. این یعنی $۳۵|a$ پس $a = ۳۵c$ است برای یک $c \in \mathbb{Z}$ ، پس $a = ۵(۷c)$ و $a = ۷(۵c)$ است. در نتیجه $۷|a$ یعنی $a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ ، چون a هم به $\{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\}$ و $\{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ تعلق دارد ، پس داریم

$$a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$$

پس نشان دادیم $\{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ است.

حالا نشان می دهیم $\{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\}$ است. فرض می کنیم $a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ باشد. بر اساس تعریف اشتراک این یعنی

$$a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \text{ و } a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$$

لذا $۵|a$ و $۷|a$ ، بر اساس تعریف بخش پذیری ، اعداد صحیح c و d وجود دارند بطوری که $a = ۵c$ و $a = ۷d$ است. لذا a هم شامل فاکتور اول ۵ است و هم فاکتور اول ۷ است. پس تجزیه به عوامل اول a باید شامل ۵ و ۷ باشد. لذا $۳۵ = ۵ * ۷|a$ پس $a \in \{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\}$ ،

حالا نشان داده ایم $\{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\}$

پس تا کنون نشان داده ایم $\{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$ و $\{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\}$ است و در نتیجه ثابت کرده ایم

$$\{n \in \mathbb{Z}: ۳۵|n\} = \{n \in \mathbb{Z}: ۵|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}: ۷|n\}$$

در جبر دیده ایم اگر $c \neq 0$ باشد و $ac = bc$ باشد ، پس $a = b$ است. مثال بعد مشابه همین گزاره را برای مجموعه های A, B, C بکار می بریم.

مثال ۱۶.۳.۲

فرض کنید A, B, C مجموعه باشند. و $C \neq \emptyset$ ، ثابت کنید اگر $A \times C = B \times C$ باشد ، پس $A = B$ است.

برهان مستقیم

فرض می کنیم $A \times C = B \times C$ باشد ، باید نشان دهیم $A = B$ است.

ابتدا نشان می دهیم $A \subseteq B$ است. فرض می کنیم $a \in A$ باشد. چون $C \neq \emptyset$ است پس یک عضو $c \in C$ وجود دارد. لذا چون $a \in A$ و $c \in C$ است ، پس داریم $(a,c) \in A \times C$ بر اساس تعریف ضرب دکارتی. و چون $A \times C = B \times C$ است ، پس داریم $(a,c) \in B \times C$ است. باز بر اساس تعریف ضرب دکارتی داریم $a \in B$ است. پس نشان داده ایم $a \in A$ دلالت می کند که $a \in B$ است، پس $A \subseteq B$ است.
حالا نشان می دهیم $B \subseteq A$ است. همان استدلال بالا را بکار می بریم. یعنی جای A و B را عوض می کنیم.
. فرض می کنیم $a \in B$ باشد. چون $C \neq \emptyset$ است پس یک عضو $c \in C$ وجود دارد. لذا چون $a \in B$ و $c \in C$ است ، پس داریم $(a,c) \in B \times C$ بر اساس تعریف ضرب دکارتی. و چون $B \times C = A \times C$ است ، پس داریم $(a,c) \in A \times C$ است.نتیجه می گیریم $a \in A$ است. پس نشان دادیم $a \in B$ دلالت دارد که $a \in A$ است ، پس $B \subseteq A$ است.
دردو پاراگراف بالا نشان داده ایم که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ است ، پس $A = B$ است. خلاصه نشان داده ایم اگر $A \times C = B \times C$ باشد پس $A = B$ است. این برهان را کامل می کند.

باز هم در مثال دیگری نشان می دهیم که عملیات روی اعداد و عملیات روی مجموعه ها شبیه هم هستند.
می دانیم که اگر a,b,c اعداد حقیقی باشند ، پس داریم $a * (b+c) = a * b + a * c$
حالا اگر بجای اعداد a,b,c مجموعه های A,B,C و بجای $*$ نماد $\times$ و بجای $+$ نماد $\cap$ قرار دهیم ، خواهیم داشت $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

مثال ۱۶.۳.۳

اگر A,B,C مجموعه باشند ، ثابت کنید $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ است.

برهان

ابتدا نشان می دهیم $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ است.
فرض می کنیم $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ باشد.
بر اساس تعریف ضرب دکارتی ، این یعنی $a \in A$ و $b \in B \cap C$ است. بر اساس تعریف اشتراک داریم $b \in B$ و $b \in C$ ،
لذا چون $a \in A$ و $b \in B$ است ، بر اساس تعریف $\times$ داریم $(a,b) \in A \times B$ است.
همچنین ، چون $a \in A$ و $b \in C$ است ، بر اساس تعریف $\times$ داریم $(a,b) \in A \times C$ است.
حالا داریم $(a,b) \in A \times B$ و $(a,b) \in A \times C$ پس $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ،
نشان داده ایم $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ دلالت می کند $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ است.
پس نشان داده ایم $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
حالا نشان می دهیم $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ است.
فرض می کنیم $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ باشد.
بر اساس تعریف ضرب دکارتی ، این یعنی $(a,b) \in A \times B$ و $(a,b,) \in A \times C$ است.
بر اساس تعریف ضرب دکارتی $(a,b) \in A \times B$ یعنی $a \in A$ و $b \in B$ است.
بر اساس تعریف ضرب دکارتی $(a,b) \in A \times C$ یعنی $a \in A$ و $b \in C$ است.
حالا نشان داده ایم $b \in B$ و $b \in C$ است ، پس $b \in B \cap C$ است، بر اساس تعریف اشتراک.
پس نتیجه گرفتیم $a \in A$ و $b \in B \cap C$ است ، پس $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ ،
خلاصه نشان داده ایم $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ دلالت می کند که $(a,b) \in A \times (B \cap C)$

پس داریم $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$است.
دو پاراگراف بالا ، نشان می دهند که

$$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$$

و

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$$

پس نتیجه می گیریم

$$(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$$

قبل از پرداختن به مثال بعدی ، لازم است بگوییم که گزاره P از نظر منطقی معادل $P \wedge P$ است. اگر شک دارید ، جدول درستی آنها را بنویسید. در مثال زیر بجا ی $x \in A$ گزاره معادل آن یعنی $(x \in A) \wedge (x \in a)$ بکار می بریم.

مثال ۱۶.۳.۴
اگر A, B, C مجموعه باشند. ثابت کنید $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ است.
برهان
تساوی های مسلسل زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{aligned}
A \times (B \cap C) &= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B \cap C)\} \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} \\
&= \{(x,y) : ((x \in A) \wedge (y \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (y \in C))\} \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\} \cap \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in C)\} \\
&= (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

تساوی اول بر اساس تعریف $\times$
تسوی دوم بر اساس تعریف $\cap$
تساوی سوم $P = P \wedge P$
تساوی چهارم جا بجا
تساوی پنجم آدر اساس تعریف $\cap$
تساوی ششم بر اساس تعریف $\times$
برهان تمام است.
معادله $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$ از قوانین اساسی ریاضی بدست آمده است. بعضی از آنها را در ذیل می آوریم. مثلا بر اساس قوانین دو مورگان برای مجموعه ها داریم.

$$\left.\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}\right\}$$

۱۶.۴- تمرینات فصل شانزدهم

با استفاده از روش های بحث شده در این فصل ، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۱ - ثابت کنید $\{۱۲n: n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۲n: n \in \mathbb{Z}\} \cap \{۳n: n \in \mathbb{Z}\}$

۲ - اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $\{n \in \mathbb{Z}: n|k\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: n|k^{۲}\}$

۳ - اگر p و q اعداد صحیح مثبت باشند ، پس $\{pn: n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn: n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ است.

۴ - فرض کنید A, B, C مجموعه باشند. اگر $B \subseteq C$ باشد ، پس $A \times B \subseteq A \times C$ است.

۵ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ است.

۶ - اگر A و B مجموعه هایی در مجموعه مرجع U باشند ، پس $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ است.

۷ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ است.

۸ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ است.

۹ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ است.

۱۰ - ثابت کنید که $\{۹^{n}: n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۳^{n}: n \in \mathbb{Z}\}$ است ، اما $\{۹^{n}: n \in \mathbb{Z}\} \neq \{۳^{n}: n \in \mathbb{Z}\}$

۱۱ - فرض کنید A, B, C, D مجموعه باشند. ثابت کنید که

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

۱۲ - ثابت کنید $\{۱۲a + ۴b: a, b \in \mathbb{Z}\} = \{۴c: c \in \mathbb{Z}\}$ است.

پاسخ تمرینات بخش شانزدهم

با استفاده از روش های بحث شده در این فصل ، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۱ - ثابت کنید $\{۱۲n: n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۲n: n \in \mathbb{Z}\} \cap \{۳n: n \in \mathbb{Z}\}$

برهان

فرض می کنیم $a \in \{۱۲n: n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. این یعنی $a = ۱۲n$ است برای یک $n \in \mathbb{Z}$ ،
پس $a = ۲(۶n)$ و $a = ۳(۴n)$ است. از $a = ۲(۶n)$ نتیجه می شود که a مضربی از ۲ است
پس $a \in \{۲n: n \in \mathbb{Z}\}$ است. از $a = ۳(۴n)$ نتیجه می شود که a مضربی از ۳ است ، پس
$a \in \{۳n: n \in \mathbb{Z}\}$ است. لذا بر اساس تعریف اشتراک دو مجموعه ، داریم

$$a \in \{۲n: n \in \mathbb{Z}\} \cap \{۳n: n \in \mathbb{Z}\}$$

پس $\{۱۲n: n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۲n: n \in \mathbb{Z}\} \cap \{۳n: n \in \mathbb{Z}\}$ است.

۲ - اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $\{n \in \mathbb{Z}: n|k\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: n|k^{۲}\}$

برهان

فرض می کنیم $k \in \mathbb{Z}$ باشد. باید نشان دهیم $\{n \in \mathbb{Z}: n|k\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}: n|k^{۲}\}$ است.

فرض می کنیم $a \in \{n \in \mathbb{Z}: n|k\}$ باشد. پس $a|k$ و لذا یک عدد صحیح c وجود دارد بطوری که $k = ac$ است. پس $k^۲ = a^۲c^۲$ است. لذا $k^۲ = a\left(ac^۲\right)$ است و از این ، تعریف بخش پذیری به ما $a|k^۲$ می دهد. اما $a|k^۲$ یعنی $a \in \left\{n \in \mathbb{Z}: n|k^۲\right\}$ ، پس نشان داده ایم

$$\{n \in \mathbb{Z}: n|k\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{Z}: n|k^۲\right\}$$

است.

۳ - اگر p و q اعداد صحیح مثبت باشند ، پس $\{pn: n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn: n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ است.

برهان

فرض می کنیم p و q اعداد صحیح باشند. عدد صحیح pq را در نظر بگیرید. مشاهده می شود که $pq \in \{pn: n \in \mathbb{N}\}$ و $pq \in \{qn: n \in \mathbb{N}\}$ است. پس

$$pq \in \{pn: n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn: n \in \mathbb{N}\}$$

است .نتیجه می شود $\{pn: n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn: n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ است.

۴ - فرض کنید A, B, C مجموعه باشند. اگر $B \subseteq C$ باشد ، پس $A \times B \subseteq A \times C$ است.

برهان

این یک گزاره شرطی است ، و از طریق برهان مستقیم آنرا ثابت می کنیم.

فرض می کنیم $B \subseteq C$ باشد. باید ثابت کنیم $A \times B \subseteq A \times C$ است.

فرض می کنیم $(a,b) \in A \times B$ باشد. پس بر اساس تعریف ضرب دکارتی داریم $a \in A$ و $b \in B$ است. اما چون $b \in B$ و $B \subseteq C$ است ، پس داریم $b \in C$ است. چون $a \in A$ و $b \in C$ است ، نتیجه می شود $(a,b) \in A \times C$ باشد. حالا نشان داده ایم $(a,b) \in A \times B$ دلالت می کند که $(a,b) \in A \times C$ است. پس $A \times B \subseteq A \times C$ است.

خلاصه ، نشان داده ایم اگر $B \subseteq C$ باشد ، پس $A \times B \subseteq A \times C$ است. و این برهان را کامل می کند.

۵ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ است.

برهان

قانون پخش پذیری را بکار می بریم. یعنی $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ،

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C\} \\
&= \{x : x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C)\} \\
&= \{x : (x \in A \ \wedge \ x \in B) \vee (x \in A \ \wedge \ x \in C)\} \\
&= \{x : (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

تساوی اول بر اساس تعریف اشتراک.

تساوی دوم بر اساس اتحاد.

تساوی سوم بر اساس قانون پخش پذیری.

تساوی چهارم بر اساس اشتراک .

تساوی پنجم بر اساس اتحاد.

برهان کامل است.

۶ - اگر A و B مجموعه هایی در مجموعه مرجع U باشند ، پس $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ است.

برهان

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= U - (A \cup B) \\
&= \{x : (x \in U) \wedge (x \notin A \cup B)\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge \sim (x \in A \cup B)\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge \sim ((x \in A) \vee (x \in B))\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge (\sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B))\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B)\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge (x \in U) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B)\} \\
&= \{x : ((x \in U) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in U) \wedge (x \notin B))\} \\
&= \{x : (x \in U) \wedge (x \notin A)\} \cap \{x : (x \in U) \wedge (x \notin B)\} \\
&= (U - A) \cap (U - B) \\
&= \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

برهان کامل است.

۷ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ است.

برهان

$$\begin{aligned}
A - (B \cup C) &= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C)\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge \sim (x \in B \cup C)\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge \sim ((x \in B) \vee (x \in C))\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (\sim (x \in B) \wedge \sim (x \in C))\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x : ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \cap \{x : (x \in A) \wedge (x \notin C)\} \\
&= (A - B) \cap (A - C)
\end{aligned}$$

برهان کامل است.

۸ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ است.

برهان

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - C &= \{x : (x \in A \cap B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin C) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x : ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C))\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin C)\} \cap \{x : (x \in B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= (A - C) \cap (B - C)
\end{aligned}$$

برهان کامل است.

۹ - اگر A, B, C مجموعه باشند ، پس $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ است.

برهان

به مثال ۱۶.۳.۳ بخش ۱۶.۳ مراجعه کنید.

۱۰ - ثابت کنید که $\{۳^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۹^n : n \in \mathbb{Z}\}$ است ، اما $\{۹^n : n \in \mathbb{Z}\} \neq \{۳^n : n \in \mathbb{Z}\}$

برهان

فرض می کنیم $a \in \{۹^n : n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. این یعنی $a = ۹^n$ است برای یک عدد صحیح n.
پس $a = ۹^n = \left(۳^۲\right)^n = ۳^{۲n}$ است. این نشان می دهد a یک توان عدد صحیح ۳ است ، پس $a \in \{۳^n : n \in \mathbb{Z}\}$ است. لذا $a \in \{۹^n : n \in \mathbb{Z}\}$ دلالت می کنند $a \in \{۳^n : n \in \mathbb{Z}\}$ است.
پس $\{۳^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۹^n : n \in \mathbb{Z}\}$ است.
اما توجه کنید که $\{۹^n : n \in \mathbb{Z}\} \neq \{۳^n : n \in \mathbb{Z}\}$ زیرا $۳ \in \{۳^n : n \in \mathbb{Z}\}$ است ، اما
$۳ \notin \{۹^n : n \in \mathbb{Z}\}$

۱۱ - فرض کنید A, B, C, D مجموعه باشند. ثابت کنید که

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

برهان

فرض می کنیم $(a, b) \in (A \times B) \cup (C \times D)$ باشد. بر اساس تعریف اتحاد این یعنی

$$(a, b) \in (A \times B)$$

است یا

$$(a, b) \in (C \times D)$$

است. این دو حالت را بر رسی می کنیم.

حالت اول : فرض می کنیم $(a, b) \in (A \times B)$ باشد. بر اساس تعریف $\times$ داریم $a \in A$ و $b \in B$ است. از این و تعریف $\cup$ داریم $a \in A \cup C$ و $b \in B \cup D$ است. و باز بر اساس تعریف $\times$ داریم $(a, b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

حالت دوم : فرض می کنیم $(a, b) \in (C \times D)$ باشد. بر اساس تعریف $\times$ داریم $a \in C$ و $b \in D$ است. از این و تعریف $\cup$ داریم $a \in A \cup C$ و $b \in B \cup D$ است.
باز بر اساس تعریف $\times$ داریم $(a, b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ است.
در هر دو حالت $(a, b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ بدست آوردیم.
پس ثابت کردیم $(a, b) \in (A \times B) \cup (C \times D)$ دلالت می کند $(a, b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ است. پس $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ است.

۱۲ - ثابت کنید $\{۴c : c \in \mathbb{Z}\} = \{۱۲a + ۴b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ است.

برهان

ابتدا نشان می دهیم $\{۴c : c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۱۲a + ۴b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ است.
فرض می کنیم $x \in \{۱۲a + ۴b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ باشد. پس $x = ۱۲a + ۴b$ است برای اعداد صحیح a و b. از این $x = ۴(۳a + b)$ بدست می آوریم. پس $x = ۴c$ است اینجا c عدد صحیح $۳a + b$ است. در نتیجه $x \in \{۴c : c \in \mathbb{Z}\}$ است. این ثابت می کند که

$$\{۱۲a + ۴b : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{۴c : c \in \mathbb{Z}\}$$

است.
حالا نشان می دهیم $\{12a+4b: a,b\in\mathbb{Z}\}\subseteq\{4c: c\in\mathbb{Z}\}$ است.
فرض می کنیم $x\in\{4c: c\in\mathbb{Z}\}$ باشد. پس $x=4c$ است برای یک $c\in\mathbb{Z}$.
پس $x=\left(12+4(-2)\right)c=12c+4(-2c)$ است. و چون c و $-2c$ اعداد صحیح هستند ،
پس داریم $x\in\{12a+4b: a,b\in\mathbb{Z}\}$.
این ثابت می کند که

$$\{12a+4b: a,b\in\mathbb{Z}\}=\{4c: c\in\mathbb{Z}\}$$

است.