RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

فصل پانزدهم
تناقض
Contradiction
بخش اول
برهان گزاره ها از طریق تناقض
Proving Statements with Contradiction

مقدمه : حالا روش سوم برهان را مورد بر رسی قرار می دهیم :**برهان بوسلیه تناقض.** این روش تنها منحصر به برهان گزاره های شرطی نمی شود. این روش می تواند برای برهان هر نوع گزاره ای بکار رود. ایده اصلی این است که فرض کنیم گزاره ای را که می خواهیم ثابت کنیم ، **غلط است**. و سپس نشان دهیم ، این فرض ، درست نیست و نتیجه بگیریم که اشتباه کردیم که فرض کردیم گزاره غلط بوده ، و لذا گزاره باید **صحیح باشد**. برای مثال به حکم زیر و برهان آن توجه کنید.

حکم : اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $a^۲ - ۴b \neq ۲$ است.

برهان فرض می کنیم این حکم غلط بشد،
این گزاره شرطی غلط است یعنی اعداد a, b وجود دارند بطوری که $a, b \in \mathbb{Z}$ است ، اما $a^۲ - ۴b \neq ۲$ غلط است.

به عبارت دیگر ، اعداد $a, b \in \mathbb{Z}$ وجود دارند ، بطوری که $a^۲ - ۴b = ۲$ است.

ازتساوی قرمزرنگ ، این تساوی را $a^۲ = ۴b + ۲ = ۲(۲b + ۱)$ بدست می اویم. پس $a^۲$ زوج است. چون $a^۲$ زوج است ، پس a زوج است. پس $a = ۲c$ است ، برای یک عدد صحیح c .

حالا ، $a = ۲c$ را در تساوی قرمز رنگ می‌گذاریم تا $(۲c)^۲ - ۴b = ۲$ بدست آوریم.

پس $۴c^۲ - ۴b = ۲$ است. طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم ، و $۲c^۲ - ۲b = ۱$ بدست می آوریم.

لذا $۱ = ۲(c^۲ - b)$ است ، زیرا $c^۲ - b \in \mathbb{Z}$ است. این یعنی ۱ زوج است.

می دانیم که ۱ **زوج نیست.** پس یک چیزی غلط از آب در امد.

پس اشتباه کردیم که فرض کردیم حکم غلط است. این حکم صحیح است.

۱۵.۱ - برهان گزاره ها از طریق تناقض Proving Statements with Contradiction

حالا ، اجازه دهید ببینیم چرا برهان بالا ، از نظر منطقی معتبر است. در آن برهان لازم بود نشان دهیم که گزاره $P: (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a^۲ - ۴b \neq ۲)$ صحیح است. برهان را با فرض این که P غلط است شروع کردیم ، یعنی گفتیم $\sim P$ صحیح است ، و از این موضوع نتیجه گرفتیم $C \wedge \sim C$.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

به عبارت دیگر، ثابت کردیم اگر $\sim P$ صحیح باشد ، لازم است $C \wedge \sim C$ صحیح باشد. این یعنی ثابت کردیم گزاره شرطی $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ صحیح است.

برای روشن شدن این موضوع به جدول درستی زیر برای $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ نگاه کنید. ملاحظه می کنید که ستون های P و $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ دقیقا یکی هستند ، پس P از نظر منطقی معادل گزاره زیر است.

$$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$$

P	C	$\sim P$	$C \wedge \sim C$	$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
T	T	F	F	**T**
T	F	F	F	**T**
F	T	T	F	**F**
F	F	T	F	**F**

لذا برای این که ثابت کنیم گزاره P صحیح است ، کافی است گزاره شرطی $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ را ثابت کنیم. این کار با برهان مستقیم هم می توان انجام داد. فرض کنید $\sim P$ و نتیجه بگیرید $C \wedge \sim C$.

مشکلی که اینجا مطرح می شود ، این است که در ابتدای برهان نمی دانیم گزاره C چگونه خواهد بود. کاری که می توانید انجام دهید این است که فرض کنید $\sim P$ و یک گزاره C را نتیجه بگیرید و آنرا نفی کنید.

تعریف ۱۵.۱.۱
یک عدد حقیقی x **گویا** است اگر $x = \frac{a}{b}$ باشد ، برای $a, b \in \mathbb{Z}$. همچنین ، x گنگ است اگر گویا نباشد ، یعنی اگر $x \neq \frac{a}{b}$ باشد برای $a, b \in \mathbb{Z}$.

حالا آماده هستیم تا ثابت کنیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. طبق توضیحاتی که در بالا داده شد ، اولین خط برهان باید فرض کنیم صحیح نیست بگوییم $\sqrt{۲}$ گنگ است.

حکم : عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است.

برهان : فرض می کنیم صحیح نیست بگوییم $\sqrt{۲}$ گنگ است. پس $\sqrt{۲}$ گویا است. پس اعداد صحیح a, b وجود دارند ، بطوری که

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

$$\sqrt{۲} = \frac{a}{b} \qquad (۱۵.۱.۱)$$

فرض می کنیم این کسر ساده باشد ، یعنی a, b هر دو زوج نباشند. زیرا اگر هر دو زوج باشند ، باید فاکتور گیری شوند و اعداد ۲ از صورت و مخرج حذف شوند. طرفین تساوی $(۱۵.۱.۱)$ را به توان ۲ میرسانیم. در نتیجه داریم:

$$۲ = \frac{a^۲}{b^۲}$$

و لذا

$$a^۲ = ۲b^۲ \qquad (۱۵.۱.۲)$$

و از این نتیجه می گیریم $a^۲$ زوج است. اما ، قبلا ثابت کردیم اگر $a^۲$ زوج باشد ، یعنی a زوج است. و چون می دانیم a و b هر دو زوج نیستند ، پس b باید **فرد** باشد. حال چون a زوج است ، پس یک عدد صحیح c وجود دارد ، بطوری که $a = ۲c$ است. این را در تساوی $(۱۵.۱.۲)$ می گذاریم و $(۲c)^۲ = ۲b^۲$ بدست می آوریم. پس $۴c^۲ = ۲b^۲$ است و لذا $b^۲ = ۲c^۲$ است. یعنی $b^۲$ زوج است و لذا b باید زوج باشد. اما قبلا نتیجه گرفتیم b فرد است. این تناقض است که **b هم زوج** باشد وهم **فرد باشد.**

در برهان بالا فرض کردیم $\sqrt{۲}$ گویا باشد ، سپس به یک تناقض رسیدیم ، یعنی

$$(\text{زوج است } b) \wedge \sim (\text{زوج است } b)$$

که همان شکل

$$C \wedge \sim C$$

دارد.

حکم : بی نهایت اعداد اول وجود دارد.

برهان تناقض :

فرض می کنیم تعداد محدودی اعداد اول وجود داشته باشد. پس می توانیم تمام اعداد اول را به صورت یک لیست $p_۱, p_۲, p_۳, \cdots, p_n$ بنویسیم. اینجا $p_۱ = ۲, p_۲ = ۳, p_۳ = ۵, p_۴ = ۷$ و الی آخر. پس p_n عدد n ام و بزرگ ترین عدد اول است. حالا $a = (p_۱p_۲p_۳ \cdots p_n) + ۱$ را در نظر بگیرید. یعنی a حاصلضرب تمام اعداد اول است به اضافه ۱. حالا a مانند هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ حد اقل یک مقسوم علیه اول دارد و این یعنی $p_k|a$ برای حد اقل یکی از n اعداد اول بنام p_k. پس یک عدد صحیح c وجود دارد ، بطوری که $a = cp_k$ است ، که می گوید

$$(p_1p_2p_3 \cdots p_{k-1}p_kp_{k+1} \cdots p_n) + 1 = cp_k.$$

طرفین را بر p_k تقسیم می کنیم. پس داریم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_{k+1}\cdots p_n)+\frac{1}{p_k}=c,$$

پس

$$\frac{1}{p_k}=c-(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_{k+1}\cdots p_n).$$

عبارت سمت راست یک عدد صحیح است ، اما عبارت سمت چپ یک عدد صحیح نیست. این تناقض است.

برهان تناقض ، اغلب برای برهان گزاره هایی به شکل $\forall x, P(x)$ خوب کار می کند. دلیل این هم این است که برهان با فرض $\sim\forall x, P(x)$ شروع می کنیم که بر اساس بخش ۱۲.۴ می دانیم معادل $\exists x, \sim P(x)$ است. این یک x به ما می دهد بطوری که $\sim P(x)$ صحیح است. و اغلب برای ایجاد تناقض ، کافی است.

این دقیقا همان چیزی است که در برهان $\sqrt{۲}$ گنگ است اتفاق افتاد. گزاره $\sqrt{۲}$ گنگ است منطقا معادل $\forall a, b \in \mathbb{Z}, ۲ \neq \left(\frac{a}{b}\right)^۲$ است. در برهان تناقض فرض می کنیم این گزاره غلط است، یعنی فرض می کنیم $\sim\left(\forall a, b \in \mathbb{Z}, ۲ \neq \left(\frac{a}{b}\right)^۲\right)$ باشد ، که به $\exists\ a, b \in \mathbb{Z}, ۲ \neq \left(\frac{a}{b}\right)^۲$ تبدیل می شود. این معادله عینی $\left(\frac{a}{b}\right)^۲ = ۲$ به ما می دهد ، که روی آن کار کنیم. و این ایجاد تناقض کرد.

به یک مثال دیگر توجه کنید.

حکم : برای هر عدد حقیقی $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, داریم $\sin x + \cos x \geq ۱$.

برهان تناقض

فرض می کنیم این گزاره صحیح نباشد.

پس یک $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وجود دارد ، بطوری که $\sin x + \cos x < ۱$ است.

چون $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ است ، نه $\sin x$ و نه $\cos x$ منفی نیستند. پس $0 \leq \sin x + \cos x < ۱$.

لذا $0^۲ \leq (\sin x + \cos x)^۲ < ۱^۲$ است ،

این به ما $0^۲ \leq \sin^۲ x + ۲\sin x\cos x + \cos^۲ x < ۱^۲$ می دهد.

چون $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ است ، پس داریم $0 \leq ۱ + ۲\sin x\cos x < ۱$.

لذا $۱ + ۲\sin x\cos x < ۱$ است. از طرفین ۱ کسر می کنیم، پس داریم. $۲\sin x\cos x < 0$,

اما این متناقض این حقیقت است که نه $\sin x$ و نه $\cos x$ هیچ کدام منفی نیستند.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۵.۲ - برهان گزاره های شرطی از طریق تناقض
Proving Conditional Statements by Contradiction

چون دو فصل قبل در مورد برهان گزاره های شرطی بحث کردیم ، حالا روش برهان گزاره های شرطی از طریق تناقض را مشخص می کنیم. فرض کنید می خواهیم یک حکم به صورت زیر را ثابت کنیم.

حکم : اگر P پس Q.

پس باید ثابت کنیم $P \Rightarrow Q$ یک گزاره صحیح است. برهان از طریق تناقض با این فرض شروع می شود که $\sim (P \Rightarrow Q)$ صحیح است ، یعنی $P \Rightarrow Q$ غلط است. اما ، می دانیم اگر $P \Rightarrow Q$ غلط باشد ، یعنی این ممکن است P صحیح باشد در حالی که Q غلط است. پس اولین قدم برای برهان این است که فرض کنیم P و $\sim Q$.

برای نشان دادن این روش تازه ، حکم آشنای زیر را دوباره بر رسی می کنیم.

حکم : فرض می کنیم $a \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر a^2 زوج باشد ، پس a زوج است.

برهان تناقض

فرض می کنیم a^2 زوج باشد و a زوج نباشد. پس a^2 زوج است ، و a فرد است.

چون a فرد است ، پس یک عدد صحیح c وجود دارد ، بطوری که $a = 2c + 1$ است.

پس $a^2 = (2c+1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2\left(2c^2 + 2c\right) + 1$ است. پس a^2 فرد است.

پس a^2 زوج است و a^2 زوج نیست. این یک تناقض است.

مثالی دیگر

حکم : اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \geq 2$ باشد ، پس $a \nmid b$ یا $a \nmid (b+1)$.

برهان تناقض

فرض می کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ وجود دارد و $a \geq 2$ است ، بطوری که صحیح نیست بگوییم $a \nmid b$ یا $a \nmid (b+1)$.

بر اساس قانون دو مورگان ، داریم $a \mid b$ و $a \mid (b+1)$.

تعریف بخش پذیری می گوید $c, d \in \mathbb{Z}$ وجود دارند با $b = ac$ و $b + 1 = ad$.

یکی از این تساوی ها را از دیگری کسر می کنیم ، پس داریم $ad - ac = 1$.

پس $a(d-c) = 1$ است. چون a مثبت است ، پس $d - c$ هم مثبت است. در غیر این صورت $a(d-c)$ باید منفی باشد. پس $d - c$ یک عدد صحیح مثبت است و $a(d-c) = 1$ است. پس $a = \frac{1}{d-c} < 2$ است.

پس داریم $a \geq 2$ و $a < 2$. این یک تناقض است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵.۳ - ترکیب روش ها Combining Techniques

اغلب ، مخصوصا در برهان های پیچیده تر ، چندین روش برهان با هم ترکیب می شوند و تشکیل یک برهان واحد می دهند. مثلا ، هنگام برهان یک گزاره شرطی $P \Rightarrow Q$, ممکن است با برهان مستقیم شروع کنیم و به این طریق فرض کنیم P صحیح است ، تا بالاخره نشان دهیم Q صحیح است. اما درستی Q ممکن است به درستی یک گزاره دیگر R متصل شود ، که همراه با P نشان دهد که Q. سپس لازم است که R را ثابت کنیم ، که این مربوط می شود با کدام روش مناسب است R را ثابت کنیم. این منجر به برهان داخل برهان می شود.

مثال زیر را ملاحظه کنید. با برهان مستقیم شروع می کنیم ، اما داخل برهان مستقیم یک برهان تناقض وجود دارد.

حکم : هر عدد گویای غیر صفر را می توان به صورت حاصلضرب دو عدد گنگ بیان کرد.

برهان

این حکم را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

اگر r یک عدد گویای غیر صفر باشد ، پس r یک حاصلضرب دو عدد گنگ است. این را با برهان مستقیم شروع می کنیم.

فرض می کنیم r یک عدد گویای غیر صفر باشد. پس $r = \frac{a}{b}$ است ، برای اعداد صحیح a و b . همچنین ، r را می توان به صورت حاصلضرب دو عدد نوشت. یعنی

$$r = \sqrt{۲} * \frac{r}{\sqrt{۲}}$$

می دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است. پس برای کامل کردن برهان باید نشان دهیم $\frac{r}{\sqrt{۲}}$ هم گنگ است. برای نشان دادن این ، از روش تناقض استفاده می کنیم. پس فرض می کنیم $\frac{r}{\sqrt{۲}}$ گویا است. یعنی

$$\frac{r}{\sqrt{۲}} = \frac{c}{d}$$

برای اعداد صحیح c و d ، پس

$$\sqrt{۲} = r\frac{d}{c}$$

است. اما می دانیم $r = \frac{a}{b}$ است ، که با تساوی بالا تلفیق می شود تا عبارت زیر را بدست آوریم.

$$\sqrt{2} = r\frac{d}{c} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

این یعنی $\sqrt{۲}$ گویا است , که تناقض است زیرا می دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. لذا $\frac{r}{\sqrt{۲}}$ گنگ است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

در نتیجه

$$r = \sqrt{۲} * \frac{r}{\sqrt{۲}}$$

یک حاصلضرب دو عدد گنگ است.

با وجود قدرت برهان تناقض ، بهتر است آنرا هنگامی بکار برد که برهان مستقیم و عکس نقیض کار نمی کنند. دلیل هم این است که برهان تناقض ، اغلب یک برهان عکس نقیض در خود پنهان دارد. به مثال زیر توجه کنید.

حکم : فرض کنید $a \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر $a^۲ - ۲a + ۷$ زوج باشد ، پس a فرد است.

برهان

بر عکس ، فرض می کنیم $a^۲ - ۲a + ۷$ زوج باشد و a فرد نباشد.

یعنی ، فرض می کنیم $a^۲ - ۲a + ۷$ زوج است و a زوج است.

چون a زوج است ، پس یک عدد صحیح c وجود دارد ، بطوری $a = ۲c$ است.

پس

$$a^2 - 2a + 7 = (2c)^2 - 2(2c) + 7 = 2(2c^2 - 2c + 3) + 1$$

است. پس $a^۲ - ۲a + ۷$ فرد است. لذا $a^۲ - ۲a + ۷$ هم فرد است و هم زوج. یک تناقض .

گر چه در برهان بالا چیز غلطی مشاهده نمی شود ، توجه کنید به آن قسمت که فرض می شود a فرد نیست و نتیجه گرفته می شود که $a^۲ - ۲x + ۷$ زوج نیست. این یک عکس نقیض است. پس کار آمد تر است اگر برهان عکس نقیض را بکار بریم.

حکم : فرض کنید $a \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر $a^۲ - ۲a + ۷$ زوج باشد ، پس a فرد است.

برهان عکس نقیض

فرض می کنیم a فرد نباشد.

پس a زوج است. پس یک عدد صحیح c وجود دارد ، بطوری که $a = ۲c$ است.

پس

$$a^2 - 2a + 7 = (2c)^2 - 2(2c) + 7 = 2(2c^2 - 2c + 3) + 1$$

است. پس $a^۲ - ۲a + ۷$ فرد است. یعنی $a^۲ - ۲a + ۷$ زوج نیست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵.۴ ـ تمرینات فصل پانزدهیم

با استفاده از برهان تناقض ، گزاره های زیر را ثابت کنید. در عین حال ، فکر کنید برهان مستقیم یا عکس نقیض هم ممکن است کار کند. در هر مورد ، متوجه خواهید شد که برهان تناقض آسان تر است.

۱ ـ فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر n فرد باشد ، پس $n^{۲}$ فرد است.

۲ ـ ثابت کنید $\sqrt[۳]{۲}$ گنگ است.

۳ ـ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۴ ـ اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $a^{۲} - ۴b - ۳ \neq 0$ است.

۵ ـ فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ باشد. اگر a گویا و ab گنگ باشد ، پس b گنگ است.

۶ ـ هیچ عدد صحیح a و b وجود ندارد ، بطوری که $۱۸a + ۶b = ۱$ باشد.

۷ ـ برای هر $x \in \left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$, داریم $\sin x - \cos x \geq ۱$.

۸ ـ اگر $b \in \mathbb{Z}$ باشد و $b \nmid k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$, پس $b = 0$ است.

۹ – برای هر $n \in \mathbb{Z}$, داریم $۴ \nmid \left(n^{۲} + ۲\right)$.

www.riazisara.ir   دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات فصل پانزدهم

باستفاده از برهان تناقض ، گزاره های زیر را ثابت کنید. در عین حال ، فکر کنید برهان مستقیم یا عکس نقیض هم ممکن است کار کند. در هر مورد ، متوجه خواهید شد که برهان تناقض آسان تر است.

۱ - فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر n فرد باشد ، پس $n^{۲}$ فرد است.

برهان تناقض

فرض می کنیم n فرد باشد و $n^{۲}$ فرد نباشد.

پس $n^{۲}$ زوج است. حالا ، چون n فرد است ، پس داریم $n = ۲a + ۱$ است برای یک عدد صحیح a .

پس $n^{۲} = \left(۲a + ۱\right)^{۲} = ۴a^{۲} + ۴a + ۱ = ۲\left(۲a^{۲} + ۲a\right) + ۱$ است. این نشان می دهد $n^{۲} = ۲b + ۱$ است ، اینجا b عدد صحیح $b = ۲a^{۲} + ۲a$ است.

لذا داریم $n^{۲}$ فرد است و $n^{۲}$ زوج است. یک تناقض.

۲ - ثابت کنید $\sqrt[۳]{۲}$ گنگ است.

برهان تناقض .

فرض می کنیم $\sqrt[۳]{۲}$ گنگ نیست. پس گویا است. ، لذا اعداد صحیح a و b وجود دارند ، بطوری که $\sqrt[۳]{۲} = \frac{a}{b}$ است. فرض می کنیم این کسر در ساده ترین شکل باشد ، پس a و b هر دو زوج نیستند.

یعنی یکی فرد است و دیگری زوج. حالا داریم $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^{۳} = \left(\frac{a}{b}\right)^{۳}$, که به ما $۲ = \frac{a^{۳}}{b^{۳}}$ یا $۲b^{۳} = a^{۳}$ می دهد. باا این، ملاحظه می کنیم $a^{۳}$ زوج است ، که نتیجه می گیریم a زوج است. زیرا اگر a فرد بود ، پس داشتیم

$$a^{۳} = \left(۲c + ۱\right)^{۳} = ۸c^{۳} + ۱۲c^{۲} + ۶c + ۱ = ۲\left(۴c^{۳} + ۶c^{۲} + ۳\right) + ۱$$

که فرد است و نه زوج.

چون a زوج است ، پس نتیجه می گیریم $a = ۲d$ است برای یک عدد صحیح d .

معادله $۲b^{۳} = a^{۳}$ بالا می شود $۲b^{۳} = \left(۲d\right)^{۳} = ۸d^{۳}$. طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم و $b^{۳} = ۴d^{۳}$ بدست می آوریم. این یعنی $b^{۳}$ زوج است. پس b هم زوج است.

تا اینجا ، دریافته ایم که هم a و هم b زوج هستند. این متناقض این حقیقت بالا است که دریافتیم a و b هر دو زوج نیستند.

دانلود از سایت ریاضی سرا　　www.riazisara.ir

یک برهان دیگر این گزاره

فرض می کنیم $\sqrt[۳]{۲}$ گنگ نیست. پس اعداد صحیح a و b وجود دارند ، بطوری که داریم $\frac{a}{b} = \sqrt[۳]{۲}$ است. طرفین را به توان ۳ می رسانیم ، پس داریم $۲ = \frac{a^۳}{b^۳}$ از این رابطه داریم $a^۳ = b^۳ + b^۳$ ، این باآخرین قضیه فرما ت Fermat's Last Theorem متناقض است.

آخرین قضیه فرمات یا پیش گویی فرما ت می گوید

هیچ عدد صحیح a, b, c وجود ندارد که داشته باشیم $a^۳ + b^۳ = c^۳$ اینجا n یک عدد صحیح بزرگ تر از ۲ است.

۳ ـ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است. هنگام چک کردن مواظب | و ∤ باشید. ممکن است اشتباه بصری رخ دهد.

برهان تناقض.

فرض می کنیم $\sqrt{۳}$ گنگ نیست. پس گویا است. پس اعداد صحیح a و b وجود دارند ، بطوری که $\frac{a}{b} = \sqrt{۳}$ است. فرض می کنیم این کسر به صورت ساده ترین شکل باشد. پس a و b فاکتور مشترک ندارند. ملاحظه کنید که $\left(\frac{a}{b}\right)^۲ = \left(\sqrt{۳}\right)^۲$ است. پس $۳ = \frac{a^۲}{b^۲}$ یا $۳b^۲ = a^۲$ است. این یعنی $۳|a^۲$.

حالا می خواهیم نشان دهیم اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد و $۳|a^۲$, پس $۳|a$. این یک برهان داخل یک برهان است. برهان عکس نقیض برای اثبات این گزاره شرطی بکار می بریم.

فرض می کنیم $۳ \nmid a$ ، پس یک باقیمانده ۱ یا ۲ وجود دارد هنگامی که a بر ۳ تقسیم می شود.

حالت اول: باقیمانده ۱ است ، هنگامی که a بر ۳ تقسیم می شود. پس $a = ۳m + ۱$ است برای یک عدد صحیح m، در نتیجه $a^۲ = ۹m^۲ + ۶m + ۱ = ۳\left(۳m^۲ + ۲m\right) + ۱$ و این یعنی هنگامی که $a^۲$ بر ۳ تقسیم می شود ، باقیمانده ۱ است. پس $۳ \nmid a^۲$.

حالت دوم :باقیمانده ۲ است هنگامی که a بر ۳ تقسیم می شود. پس $a = ۳m + ۲$ است برای یک عدد صحیح m، در نتیجه

$$a^۲ = ۹m^۲ + ۱۲m + ۴ = ۹m^۲ + ۱۲m + ۳ + ۱ = ۳\left(۳m^۲ + ۴m + ۱\right) + ۱$$

این یعنی هنگامی که $a^۲$ بر ۳ تقسیم شود ، باقیمانده ۱ است. پس $۳ \nmid a^۲$، در هر دو حالت $۳ \nmid a^۲$.

پس نشان دادیم $۳ \nmid a$ یعنی $۳ \nmid a^۲$، لذا اگر $۳|a^۲$ پس $۳|a$.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

حالا بر می گردیم به $۳|a^۲$ در پاراگراف اول. این را با نتیجه پاراگراف دوم تلفیق می کنیم که نتیجه می شود $۳|a$ پس $a = ۳d$ است برای یک عدد صحیح d ۰ حالا باز در پاراگراف اول داشتیم $۳b^۲ = a^۲$ که می شود $۳b^۲ = (۳d)^۲$ یا $۳b^۲ = ۹d^۲$ پس $b^۲ = ۳d^۲$ است. اما این یعنی $۳|b^۲$ و دومین پراگرف می گوید $۳|b$ پس نتیجه می گیریم $۳|a$ و $۳|b$ اما این متناقض این حقیقت است که کسر $\frac{a}{b}$ ساده است.

۴ - اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $a^۲ - ۴b - ۳ \neq 0$ است.

برهان تناقض

فرض می کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد ، اما $a^۲ - ۴b - ۳ = 0$ باشد. پس داریم

$$a^۲ = ۴b + ۳ = ۲(۲b + ۱) + ۱$$

این یعنی $a^۲$ فرد است. پس a هم فرد است. پس $a = ۲c + ۱$ است برای یک عدد صحیح c ۰ این a را در $a^۲ - ۴b - ۳ = 0$ می گذاریم ، پس داریم.

$$\begin{aligned}
(2c+1)^2 - 4b - 3 &= 0\\
4c^2 + 4c + 1 - 4b - 3 &= 0\\
4c^2 + 4c - 4b &= 2\\
2c^2 + 2c - 2b &= 1\\
2(c^2 + c - b) &= 1.
\end{aligned}$$

از این آخرین معادله می بینیم که ۱ یک عدد زوج است. یک تناقض .

۵ - فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ باشد. اگر a گویا و ab گنگ باشد ، پس b گنگ است.

برهان تناقض

فرض می کنیم a گویا و ab گنگ باشد و b **گنگ نباشد.** پس داریم a و b گویا هستند و ab گنگ است. چون a و b گویا هستند ، پس می دانیم اعداد صحیح c, d, e, f وجود دارند بطوری که $a = \frac{c}{d}$ و $b = \frac{e}{f}$ است. پس $ab = \frac{ce}{df}$ است و چون ce و df اعداد صحیح هستند ، پس نتیجه می شود که ab گویا است. اما این تناقض است ، زیرا با این فرض شروع کردیم که ab گنگ است.

۶ - هیچ عدد صحیح a و b وجود ندارد ، بطوری که $۱۸a + ۶b = ۱$ باشد.

برهان تناقض

فرض می کنیم اعداد صحیح a و b وجود دارند ، بطوری که $۱۸a + ۶b = ۱$ است. پس داریم $۱ = ۲(۹a + ۳b)$ این یعنی ۱ زوج است. یک تناقض.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷ - برای هر $x \in \left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$, داریم $\sin x - \cos x \geq ۱$.

برهان تناقض

فرض می کنیم $x \in \left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$ باشد ، اما $\sin x - \cos x < ۱$ باشد. چون $x \in \left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$ است ، می دانیم $\sin x \geq 0$ و $\cos x \leq 0$ است. پس $\sin x - \cos x \geq 0$ است. پس داریم

$$0 \leq \sin x - \cos x < ۱$$

و می دانیم مربع هر عدد بین صفر و ۱ باز هم بین صفر و ۱ است. پس داریم

$$0 \leq (\sin x - \cos x)^۲ < ۱$$

و یا $0 \leq \sin^۲ x - ۲\sin x\cos x + \cos^۲ x < ۱$. با توجه به این که $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ است ، پس داریم $0 \leq -۲\sin x\cos x + ۱ < ۱$. عدد ۱ را کسر می کنیم ، پس داریم $-۲\sin x\cos x < 0$. اما در بالا گفتیم $\sin x \geq 0$ و $\cos x \leq 0$ است و لذا $-۲\sin x\cos x \geq 0$ است. تناقض داریم $-۲\sin x\cos x < 0$ و $-۲\sin x\cos x \geq 0$.

۸ - اگر $b \in \mathbb{Z}$ باشد و $b \nmid k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$, پس $b = 0$ است.

برهان تناقض

فرض می کنیم $b \in \mathbb{Z}$ و $b \nmid k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ اما $b \neq 0$ باشد.

حالت اول : $b > 0$ باشد ، پس $b \in \mathbb{N}$ پس $b|b$ تناقض با $b \nmid k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$.

حالت دوم : $b < 0$ باشد. پس $-b \in \mathbb{N}$ پس $b|(-b)$ باز هم تناقض.

۹ – برای هر $n \in \mathbb{Z}$, داریم $۴ \nmid \left(n^۲ + ۲\right)$.

برهان تناقض

فرض می‌کنیم $n \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد با $۴|\left(n^۲ + ۲\right)$. پس برای یک $k \in \mathbb{Z}$ داریم $۴k = n^۲ + ۲$ یا $۲k = n^۲ + ۲(۱ - k)$. اگر n فرد باشد ، این یعنی $۲k$ فرد است. و به تناقض می رسیم. اگر n زوج باشد ، پس $n = ۲j$ است و داریم $k = ۲j^۲ + ۱ - k$ برای یک $j \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $۲\left(k - j^۲\right) = ۱$ است ، پس عدد ۱ زوج است و این تناقض است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir