فصل سیزدهم
برهان مستقیم
Direct Proof
بخش اول
قضیه ها
Theorems

قبل از بحث در مورد برهان مستقیم ، ابتدا در بخش اول ، توضیح می دهیم که قضیه چیست ، در بخش دوم تعریف های لازم برای برهان می آوریم ، در نهایت در بخش سوم به برهان مستقیم می پردازیم.

۱۳.۱ - قضیه ها Theorems

یک قضیه گزاره ای است که صحیح است و صحت آن ثابت شده است. در مراحل تحصیلی مختلف ریاضی ، به قضیه های متعددی بر خورد کرده اید. در ذیل چند قضیه را که در جبر و حساب دیده اید ، می آوریم. شما با آنها اشنا هستید ، اما ممکن است برهان آنها را نخوانده باشد.

قضیه : فرض می کنیم f در بازه باز I مشتق پذیر باشد ، و فرض کنیم $c \in I$ باشد. اگر $f(c)$ مقدار ماکسیمم یا مینیمم f در I باشد ، پس $f'(c) = 0$ است.

قضیه : اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد ، پس $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ است.

قضیه : فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. پس f در $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

قضیه : هر سری مطلقا همگرا ، همگرا است.

ملاحظه می کنید که هر کدام از این قضایا ، یا به شکل شرطی اگر P پس Q می باشد و یا می توان آنها را به این شکل تبدیل کرد. اولین قضیه با جمله زیر شروع می شود.

فرض می کنیم f در بازه باز I مشتق پذیر باشد ، و فرض کنیم $c \in I$ باشد.

که یک توضیح ارائه می دهد. ، اما یک گزاره شرطی به دنبال آن می آید. قضیه سوم شکل فرض کنید P پس Q دارد. که همان مفهوم اگر P پس Q دارد. قضیه آخر را می توان به صورت زیر باز نویسی کار.

اگر یک سری مطلقا همگرا باشد ، پس همگرا است.

یک قضیه به شکل اگر P پس Q را می توان شیوه ای قلمداد کرد که از P اطلاعات جدیدی بوجود می آورد . هنگامی که به یک حالتی بر خورد می کنیم که در آن P صحیح است ، پس قضیه ضمانت می کند که Q هم صحیح است. چون این نوع بسط اطلاعات ، مفید است ، قضیه های به شکل اگر P پس Q

خیلی متداول است.
اما همه قضیه ها یک گزاره شرطی نیستند. بعضی از آنها شکل شرط دو طرفه $P \Leftrightarrow Q$ دارند.
همانطور که می دانید ، گزاره شرطی دو طرفه را می توان با دو گزاره شرطی بیان کرد.
بعضی قضیه ها ، فقط یک حقیقت در مورد چیز های بخصوصی ، بیان می کنند. مثلا ، یک مثال از حسابان می آوریم.

قضیه : سری $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ وا گرا است. باز نویسی این قضیه به صورت گزاره شرطی مشکل است.

لازم است بدانید کلمات دیگری هم هستند که همان معنی قضیه را می دهند. اما کمی با هم متفاوت هستند و به طرق متفاوت بکار برده می شوند.
بطور کلی ، کلمه قضیه منحصرا برای گزاره های مهم بکار می رود ، مثلا قضیه فیثاغورث که یک گزاره صحیح است. یک گزاره که صحیح است اما مهم نیست ، **گزاره** یا **حکم** **Proposition** می نامند.

اصل موضوع **Lemma** قضیه ای است که برای کمک به اثبات قضیه دیگر بکار می رود.
قضیه تبعی **Corollary** نتیجه ای است که پیامد مستقیم یک قضیه یا حکم است.

مهم نیست که تمام این کلمات جدید را بخاطر بسپارید. زیر مفهوم آنها در عمل روشن و اشکار می شود.
هدف ، یاد گیری نحوه اثبات قضایا است. همان طور که از مثال های بالا استنباط می شود ، برهان قضایا ، احتیاج به درک صحیح گزاره های شرطی دارد. به همین دلیل در فصل سوم به طور مشروح در باره گزاره های شرطی صحبت کردیم. همچنین لازم است که نقش تعریف ها را هم درک کنید ، که موضوع بخش بعدی است.

۱۳.۲ - تعاریف Definitions

برهان یک قضیه باید کاملا متقاعد کننده باشد. از ابهام و دو پهلو نوشتن باید خود داری شود. همه باید با مفهوم دقیق هر یک از کلمات ریاضی بکار رفته توافق داشته باشند. تا کنون معنی مجموعه های $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \emptyset$ تعریف کرده ایم. همچنین مفاهیم $\subseteq, \in$ را مکررا گوشزد کرده ایم. در ذیل تعریف های دیگر را که مکرر بکار برده می شوند ، می آوریم.

تعریف ۱۳.۲.۱
یک عدد صحیح n **زوج** است اگر $n = ۲a$ باشد ، برای یک عدد صحیح $a \in \mathbb{Z}$

پس ۱۰ زوج است زیرا ۵ * ۲ = ۱۰ است. همچنین بر اساس تعریف بالا عدد ۷ زوج نیست ، زیرا هیچ عدد صحیح a پیدا نمی شود بطوری که داشته باشیم $۲a = ۷$ ، اما می توانیم بگوییم اگر عددی زوج نیست ، پس آن عدد فرد است.

تعریف ۱۳.۲.۲
یک عدد صحیح n **فرد** است اگر $n = ۲a + ۱$ باشد ، برای یک عدد صحیح $a \in \mathbb{Z}$

پس عدد ۷ فرد است ، زیرا ۱ + ۳ * ۲ = ۷ است. این تعریف ها را هنگامی که منظور عدد فرد یا زوج باشد ، بکار می بریم.

تعریف ۱۳.۲.۳
دو عدد صحیح **هم افراز** یا **هم نوع** **Same Parity** هستند اگر هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. در غیر این صورت آنها **افراز مخالف** **Opposite Parity** هستند، یا **هم نوع نیستند.**

پس عدد ۶ و ۴ هم افراز هستند یا هم نوع هستند. اما ۳ و ۴ هم نوع نیستند.

تعریف ۱۳.۲.۴
فرض کنید a و b اعداد صحیح باشند. می گوییم عدد a را b **تقسیم می کند** یا **عاد می کند** و می نویسیم $a|b$ اگر $b = ac$ باشد برای یک $c \in \mathbb{Z}$
همچنین ، می گوییم a **مقسوم علیه** b است و b یک **مضرب** a است.

مثلا ۵ عدد ۱۵ را عاد می کنند یا تقسیم می کند ، زیرا ۳ * ۵ = ۱۵ است. و می نویسیم ۵|۱۵ همچنین ۸|۳۲ زیرا ۴ * ۸ = ۳۲ است. و ۶|۶- زیرا ۱- * ۶- = ۶
اما ۶ عدد ۹ را عاد نمی کند زیرا هیچ عدد صحیح c پیدا نمی شود بطوری که $c * ۶ = ۹$ باشد.

در این صورت می نویسیم $9 \nmid 6$ و می خوانیم ۶ عدد ۹ را تقسیم نمی کند و یا عاد نمی کند.

در مورد تفسیر نماد ها دقت کنید. $a|b$ یعنی a عدد b را تقسیم می کند. اما a/b یک کسر است.
تا کنون هر گاه اعداد را به حروف لاتین نوشتیم این نماد / خط کسری است و اگر عدد را به فارسی نوشتیم این نما د علامت اعشاری است مثلا ۴/۵ را می خوانیم چهار و نیم. اما گاهی اوقات هنگامی که یک کسر به صورت توان بکار برده شود ، برای این که جای زیاد اشغال نکند این نماد / خط کسری است ، مثلا $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$ است. اما اگر عدد به صورت لاتین باشد ، مثلا $8/16 = 0.5$ و $8/20 = 0.4$
خلاصه خیلی دقت کنید که نماد ها را بطور صحیح بکار برید.

هر عدد صحیح دارای یک مجموعه اعداد صحیح است که آنرا عاد یا تقسیم می کنند. مثلا مجموعه مقسوم علیه های ۶ مطابق زیر است.

$$\{a \in \mathbb{Z} : a \mid 6\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$$

مجموعه مقسوم علیه های ۵ مطابق زیر است.

$$\{-5,-1,1,5\}.$$

مجموعه مقسوم علیه های صفر ، مجموعه $\mathbb{Z}$ است. این موضوع ما را به تعریف سوق می دهد.

تعریف ۱۳.۲.۵
یک عدد طبیعی n اول **Prime** است اگر دقیقا دو مقسوم علیه مثبت ۱ و n دسته باشد.

مثلا اعداد ۲, ۵, ۱۷ اول هستند. بر اساس تعریف بالا ۱ اول نیست ، زیرا فقط یک مقسوم علیه دارد و نه دو تا. یعنی فقط ۱ مقسوم علیه ۱ است. یک عدد n را **مرکب** **Composite** می گویند اگر به صورت مضرب های $n = ab$ باشد. $a, b > 1$

تعریف ۱۳.۲.۶
بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک **Greatest Common Divisor** اعداد صحیح a و b که با نماد $gcd(a,b)$ نشان داده می شود ، بزرگ ترین عدد صحیحی است که هم a و هم b را عاد می کند.
کوچک ترین مضرب مشترک **Least Common Multiple** دو عدد غیر صفر a و b که با نماد $lcm(a,b)$ نشان داده می شود ، کوچک ترین عدد صحیح مثبت است که یک مضرب هم a و هم b باشد.

در کتب ریاضی به زبان فارسی ، عبارت **Least Common Multiple** را کوچک ترین مخرج مشترک ترجمه کرده اند. شاید چون این عبارت بیشتر هنگام پیدا کردن مخرج مشترک بکار می رود ، این طور ترجمه کرده اند. اما به نظر این بنده کوچک ترین مضرب مشترک صحیح تر است. کوچک

ترین مضرب مشترک ، نه تنها برای پید کردن مخرج مشترک بکار می رود ، بلکه کار برد های مهم دیگری هم دارد ، فعلا بحث در مورد آنها متوقف می کنیم.

پس $gcd(۱۸,۲۴) = ۶$ و $gcd(۵,۵) = ۵$ و $gcd(۳۲,-۸) = ۸$ و $gcd(۵۰,۱۸) = ۲$ است. اما $gcd(۵۰,۹) = ۱$ است. توجه داشته باشید $gcd(۰,۶) = ۶$ است ، زیرا اگر چه هر عدد صحیحی صفر را عاد می کنند ، اما بزرگ ترین مقسوم علیه ۶ عدد ۶ است.

عبارت $gcd(۰,۰)$ پرسمانی و دشوار است. هر عدد صحیحی، صفر را عاد می کند. پس تنها نتیجه این است که بگوییم $gcd(۰,۰) = \infty$ است. پس مساله را این طور حل می کنیم که توافق می کنیم $gcd(a,b)$ هنگامی می توانیم در نظر بگیریم که a و b هر دو صفر نباشند.

به مثال ها ادامه می دهیم. $lcm(۴,۶) = ۱۲$ و $lcd(۷,۷) = ۷$ است.

همان طور که در حسابان دیده اید ، ما هم در فصل دوم بحث کردیم ،ترتیب طبیعی عناصر $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ را قبول داریم. مثلا می دانیم که $۷ < ۵$ است.
و اگر $x < y$ باشد ، پس $-x > -y$ است و لزومی برای اثبات آن لازم نیست.

علاوه بر این ، حقیقت زیر را بدون دلیل و برهان قبول داریم.

حقیقت ۱۳.۲.۱
فرض می کنیم a و b اعداد صحیح باشند. پس ؛
$$a + b \in \mathbb{Z}$$
$$a - b \in \mathbb{Z}$$
$$ab \in \mathbb{Z}$$

همچنین قبول داریم که هر عدد صحیح a را می توانیم بر یک عدد غیر صفر b تقسیم کنیم ، و نتیجه یک خارج قسمت منحصر به فرد q و باقیمانده r است. مثلا اگر $b = ۳$ و $a = ۱۷$ باشد. پس $۱۷ \div ۳$ نتیجه می دهد $q = ۵$ و $r = ۲$ زیرا $۱۷ = ۵ * ۳ + ۲$ است. این همان الگوریتم تقسیم است که قبلا ذکر کردیم.

الگوریتم تقسیم The Division Algorithm
اگر a و b اعداد صحیح باشند و $b > 0$ پس اعداد صحیح منحصر به فرد q و r وجود دارند ، بطوری که داریم $a = qb + r$ و $0 \leq r < b$

حقیقت دیگری را فعلا بدون دلیل قبول می کنیم و آن این است که :

هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱, یک تجزیه منحصربه فرد، به عامل های اعداد اول دارد. مثلا عدد ۱۱۷۶ می تواند به عوامل اول تجزیه شود.

$$1176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2.$$

منظور از منحصر به فرد این است که ۱۱۷۶ فقط به عوامل ۲ و ۳ و ۷ تجزیه می شود. اما عامل ۵ در این فاکتور گیری هرگز نخواهیم داشت.

۱۳.۳ - برهان مستقیم Direct Proof

در این بخش ، یک روش ساده برای برهان قضیه ها و حکم هایی که به صورت گزاره های شرطی هستند را شرح می دهیم. به این روش ، برها مستقیم می گویند. برای ساده کردن بحث ، اولین مثال های ما شامل گزاره هایی هستند که تقریبا آشکارا ، صحت دارند. بنا بر این به این گزاره ها می گوییم حکم ها و نه قضیه ها.

برای این که بفهمید چگونه روش برهان مستقیم کار می کند ، فرض کنید یک حکم به صورت زیر داریم.

حکم : اگر P پس Q

این حکم یک گزاره شرطی به صورت $P \Rightarrow Q$ است. هدف ما این است که نشان دهیم این گزاره شرطی صحیح است. برای این که نشان دهیم چگونه پیش برویم ، به جدول رستی زیر توجه کنید.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	**F**
F	T	T
F	F	T

جدول نشان می دهد اگر P غلط باشد ، گزاره $P \Rightarrow Q$ بطور اتوماتیک صحیح است. این یعنی اگر به حالتی بر خورد کردیم که نشان می دهد $P \Rightarrow Q$ صحیح است ، نباید نگران حالتی باشیم که P غلط است. زیرا همانطور که در جدول، دو خط آخر می بینید ، $P \Rightarrow Q$ بطور اتوماتیک صحیح است. اما باید خیلی مواظب حالتی باشیم که P صحیح است. همان طور که در دو خط اول جدول می بینید. باید نشان دهیم در حالتی که P صحیح است ، پس Q باید صحیح باشد ، این یعنی خط دوم نمی تواند اتفاق افتد.

این خطوط اصلی برای برهان گزاره به صورت $P \Rightarrow Q$ است. با فرض این که P صحیح است شروع کنید و نشان دهید Q باید صحیح باشد.

به عنوان اولین مثال ، ثابت می کنیم اگر x فرد باشد ، پس $x^۲$ هم فرد است.

حکم : اگر x فرد باشد ، پس $x^۲$ هم فرد است.

برهان

توجه کنید برای اثبات، باید سعی کنیم از تعریف های گفته شده حد اکثر استفاده را بکنیم.

فرض می کنیم x فرد باشد. پس بر اساس تعریف فرد ، داریم $x = ۲a + ۱$ است ، برای یک $a \in \mathbb{Z}$.

لذا $x^۲ = (۲a + ۱)^۲ = ۴a^۲ + ۴a + ۱ = ۲(۲a^۲ + ۲a) + ۱$ است.

پس $x^۲ = ۲b + ۱$, اینجا b یک عدد صحیح است بطوری که $b = ۲a^۲ + ۲a$ است.

لذا $x^۲ = ۲b + ۱$ است ، برای یک عدد صحیح b

لذا $x^۲$ فرد است ، بر اساس تعریف عدد فرد.

مثال دیگر

حکم : فرض کنید a, b, c اعداد صحیح باشند ، اگر $a|b$ و $b|c$ پس $a|c$

برهان : این طریق انجام می دهیم.
فرض می کنیم $a|b$ و $b|c$
⋮
پس $a|c$

اولین اقدام این است که تعریف ۱۳.۲.۴ را برای خط اول طرح بالا بکار بریم. تعریف می گوید $a|b$ یعنی $b = ac$ است. برای یک $c \in \mathbb{Z}$ ۰ اما چون در همان خط اول ، c در یک زمینه دیگر بکار رفته ، باید یک حرف دیگر ، مثلا d را بکار بریم. به همین سیاق اجازه دهید حرف e را در تعریف $b|c$ بکار بریم. پس حکم را به صورت زیر ثابت می کنیم.

فرض می کنیم $a|b$ و $b|c$ بر اساس تعریف ۱۳.۲.۴ می دانیم $a|b$ یعنی یک عدد صحیح d وجود دارد بطوری که $b = ad$ است. به همین طریق $b|c$ یعنی یک عدد صحیح e وجود دارد بطوری که $c = be$ است. پس $a|c$

تقریبا جای خالی ⋮ را پر کرده ایم. ، پس برهان را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.
فرض می کنیم $a|b$ و $b|c$ بر اساس تعریف ۱۳.۲.۴ می دانیم $a|b$ یعنی یک عدد صحیح d وجود دارد بطوری که $b = ad$ است. به همین طریق $b|c$ یعنی یک عدد صحیح e وجود دارد بطوری که $c = be$ لذا $c = be = (ad)e = a(de)$ پس $c = ax$ است برای یک عدد صحیح $x = de$ لذا $a|c$ است.

در مثال بعد ، دیگر قدم به قدم ثابت نمی کنیم. همه برهان را یکجا می آوریم.

حکم : اگر x یک عدد صحیح زوج باشد ، پس $x^{۲} - ۶x + ۵$ فرد است.
برهان : فرض می کنیم x یک عدد صحیح زوج باشد.
پس $x = ۲a$ است برای یک $a \in \mathbb{Z}$, بر اساس تعریف یک عدد صحیح زوج. پس داریم.

$$x^2-6x+5=(2a)^2-6(2a)+5=4a^2-12a+5=4a^2-12a+4+1=2(2a^2-6a+2)+1$$

لذا داریم $x^{۲} - ۶x + ۵ = ۲b + ۱$ برای $b = ۲a^{۲} - ۶a + ۲ \in \mathbb{Z}$
در نتیجه بر اساس تعریف عدد صحیح فرد ، $x^{۲} - ۶x + ۵$ فرد است.

لزومی ندارد که هر جمله را جدا بنویسیم ، ام این کار را برای وضوح بیشتر ، انجام می دهیم.

حکم : اگر $a, b, c, \in \mathbb{N}$ باشد ، پس $lcm(ca, cb) = c * lcm(a, b)$ است.

برهان: فرض می کنیم $a, b, c, \in \mathbb{N}$ باشد.
فرض می کنیم $m = lcm(ca, cb)$ و $n = c * lcm(a, b)$ باشد. نشان می دهیم که $m = n$ است. طبق تعریف ، $lcm(a, b)$ هم مضرب a است و هم b, پس $lcm(a, b) = ax = by$ است برای یک $x, y \in \mathbb{Z}$. از این نتیجه می گیریم $n = c * lcm(a, b) = cax = cby$ هم مضرب ca است و هم cb. و اما $m = lcm(ca, cb)$ کوچک ترین مضرب هم ca است و هم cb. لذا $m \leq n$ است.
از طرف دیگر ، چون $m = lcm(ca, cb)$ هم مضرب ca است و هم cb, پس برای $x, y \in \mathbb{Z}$ داریم $m = cax = cby$ است. پس $\frac{1}{c}m = ax = by$ مضرب هم a است و هم b. پس داریم $lcm(a, b) \leq \frac{1}{c}m$ است ، پس $lcm(a, b) \leq m$ است ، یعنی $n \leq m$ است. نشان داده ایم که $m \leq n$ است و $n \leq m$ است ، پس $m = n$ است. و حکم ثابت شد.

تا کنون مثال ها درمورد اثبات گزاره های شامل اعداد صحیح بودند. حالا در مورد اعداد حقیقی مثال می آوریم.

حکم : فرض می کنیم x و y اعداد مثبت باشند. اگر $x \leq y$ باشد ، پس $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ است.

برهان : فرض می‌کنیم $x \leq y$ باشد. y را از طرفین کسر می کنیم ، پس داریم $x - y \leq 0$. این عبارت را می توان به صورت $\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 \leq 0$ نوشت. از این عبارت فاکتور می گیریم. پس داریم $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq 0$ ، طرفین را بر عدد مثبت $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ تقسیم می کنیم ، پس داریم $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0$. به طرفین $\sqrt{y}$ اضافه می کنیم ، داریم $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

این حکم می گوید هر گاه $x \leq y$ باشد ، می توانیم از طرفین ریشه دوم بگیریم و مطمئن باشیم $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ است. این مهم است ، همان طور که در حکم بعدی خواهیم دید.

حکم بعدی مربوط است به عبارت $2\sqrt{xy} \leq x + y$. توجه دارید که اعداد مثبت دلخواه به متقیر ها می دهیم. و عبارت صحیح است برای هر عدد مثبتی که به متغیر ها بدهیم. مثلا ، برای $x = 6$ و $y = 4$, سمت چپ داریم $2\sqrt{6 \cdot 4} = 4\sqrt{6} \approx 9.79$, که کمتر از سمت راست $6 + 4 = 10$ است. آیا عبارت $2\sqrt{xy} \leq x + y$ برای هر عدد مثبت x و y صحیح است؟ چگونه می توانیم ثابت کنیم؟

اجازه دهید این عبارت را به صورت یک گزاره شرطی بنویسیم. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند پس $2\sqrt{xy} \leq x + y$ است. این برهان با این فرض شروع می شود که x و y مثبت هستند ، و به $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ختم می شود.

حکم : اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند ، پس $۲\sqrt{xy} \leq x + y$ است.
برهان : فرض می کنیم x و y اعداد حقیقی مثبت باشند. طرفین عبارت داده شده در حکم را به توان دو می رسانیم. پس داریم. $۴xy \leq x^۲ + ۲xy + y^۲$ حال از طرفین $۴xy$ کم می کنیم. پس داریم $۰ \leq x^۲ - ۲xy + y^۲$ به طرفین $۴xy$ اضافه می کنیم. داریم. $۴xy \leq x^۲ + ۲xy + y^۲$ یا $۴xy \leq (x + y)^۲$ از طرفین ریشه دوم می گیریم ، داریم. $۲\sqrt{xy} \leq x + y$ حکم ثابت شد.

ملاحظه می کنید که در مرحله آخر برهان آخرین حکم ، ریشه دوم طرفین را بدست آوردیم ، ولی جهت نا مساوی تغییر ندادیم. این نتیجه حکم قبلی است

۱۳.۴ - بکار بردن حالت های مختلف Using Multiple Cases

هنگام اثبات صحت یک گزاره ، گاهی مجبور هستیم تمام حالت های ممکن را آزمایش و بر رسی کنیم. در این بخش چند نمونه را نشان می دهیم.

مثال ها همه ، در مورد عبارت $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ است. در ذیل یک جدول برای مقادیر مختلف اعداد صحیح n ملاحظه می کنید. متوجه می شوید که تمام خطوط در جدول زیر $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ مضربی از ۴ است.

n	$1+(-1)^n(2n-1)$
1	0
2	4
3	−4
4	8
5	−8
6	12

آیا همیشه $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ مضربی از ۴ است؟ ثابت می کنیم که پاسخ آری است. اما ، توجه کنید که عبارت $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ بستکی به فرد یا زوج بودن n دارد. می بینید که اگر n فرد باشد ، مقدار $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ منفی است و اگر n زوج باشد ، مقدار عبارت $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ مثبت است. پس برهان باید دو حالت ممکن را جداگانهٔ مورد بر رسی قرار دهد.

حکم : اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد ، پس $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ مضربی از ۴ است.

برهان : فرض می کنیم $n\in\mathbb{N}$ باشد ، پس $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ یا زوج است یا فرد. ان دو حالت را جداگانه مورد بر رسی قرار می دهیم.

حالت اول : اگر n زوج باشد. پس $n=۲k، k\in\mathbb{Z}$ و $(-۱)^{n}=۱$ است. پس

$$۱+(-۱)^{n}(۲n-۱)=۱+(۱)(۲*۲k-۱)=۴k$$

مضرب ۴ است.

حالت دوم : اگر n فرد باشد. پس $n=۲k+۱ ، k\in\mathbb{Z}$ و $(-۱)^{n}=-۱$ است. لذا

$$۱+(-۱)^{n}(۲n-۱)=۱-(۲(۲k+۱)-۱)=-۴k$$

مضرب ۴ است.

این حالت ها نشان می دهد که $(۲n-۱)(-۱)^{n}+۱$ همیشه یک مضرب ۴ است.

حالا اجازه دهید سئوال را بر گردانیم. همین حالا ثابت کردیم $۱+(-۱)^n(۲n-۱)$ همیشه یک مضرب ۴ است. اما ، آیا می توانیم هر مضرب ۴ را به این طریق بدست اوریم؟ حکم بعدی ثابت می کند که پاسخ ، مثبت است.

حکم : هر مضرب ۴ مساوی است با $۱+(-۱)^n(۲n-۱)$ برای $n \in \mathbb{N}$

برهان : حکم بالا به صورت گزاره شرطی ، مطابق زیر بازنویسی می کنیم.
اگر k یک مضرب ۴ باشد ، پس یک $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که

$$۱+(-۱)^n(۲n-۱)=k$$

است. آنچه به دنبال می آید ، برهان این گزاره شرطی است.
فرض می کنیم k یک مضرب ۴ باشد.
این یعنی $k=۴a$ است برای یک عدد صحیح a .
باید یک $n \in \mathbb{N}$ پیدا کنیم بطوری که $۱+(-۱)^n(۲n-۱)=k$ باشد.
این در سه حالت ممکن است اتفاق افتد. یعنی اگر $a=0$ است یا $a>0$ است و یا $a<0$ است.
حالت اول : اگر $a=0$ باشد. فرض می کنیم $n=۱$ است. پس داریم.

$$۱+(-۱)^n(۲n-۱)=۱+(-۱)^۱(۲-۱)=0=۴*0=۴a=k$$

حالت دوم : اگر $a>0$ باشد. فرض می کنیم $n=۲a$ باشد ، که عضوی از $\mathbb{N}$ است زیرا a مثبت است. همچنین n زوج است. پس $(-۱)^n=۱$ است. لذا

$$1+(-1)^n(2n-1)=1+(2n-1)=2n=2(2a)=4a=k.$$

حالت سوم اگر $a<0$ باشد. فرض می کنیم $n=۱-۲a$ باشد ، که عضوی از $\mathbb{N}$ است زیرا a منفی است. که سبب می شود $۱-۲a$ مثبت باشد. همچنین n فرد است ، پس $(-۱)^n=-۱$ است. پس داریم

$$1+(-1)^n(2n-1)=1-(2n-1)=1-(2(1-2a)-1)=4a=k.$$

حالت های سه گانه بالا نشان می دهد a خواه صفر باشد ، خواه مثبت باشد ، خواه منفی ، برای $n \in \mathbb{N}$ داریم.

$$k=1+(-1)^n(2n-1)$$

۱۳.۵ - کار با حالت های مشابه Treating Similar Cases

گاهی اوقات دو یا چند حالت در یک برهان بقدری شبیه هستند که نوشتن آنها بطور مجزا خسته کننده و غیر ضروری بنظر می رسد. در زیر یک مثال می آوریم.

حکم : اگر دو عدد صحیح هم نوع نباشند ، پس مجموع آنها فرد است.
فرض می کنیم m و n دو عدد صحیح باشند که هم نوع نیستند. یعنی یکی فرد است و دیگری زوج.
باید نشان دهیم $m+n$ فرد است. این کار در دو حالت انجام می شود.
حالت اول : فرض می کنیم m زوج باشد و n فرد. پس $m=۲a$ و $n=۲b+۱$ است برای دو عدد صحیح a و b ・ پس داریم $m+n=۲a+۲b+۱=۲(a+b)+۱$ که بر اساس تعریف ، فرد است.
حالت دوم : فرض می کنیم m فرد باشد و n زوج. پس $m=۲a+۱$ و $n=۲b$ است برای دو عدد صحیح a و b ・ پس داریم $m+n=۲a+۱+۲b=۲(a+b)+۱$ که بر اساس تعریف ، فرد است.
در هر دو حالت $m+n$ فرد است.

دو حالت در این برهان کاملا شبیه هتند ، بجز ترتیب جمله های فرد و زوج. کاملا مناسب است که فقط یک حالت را ثابت کنیم و بگوییم حالت دیگر هم شبیه حالت اول است.

در زیر باز نویسی مثال بالا را ملاحظه می کنید.

حکم : اگر دو عدد صحیح ، افراز متفاوت داشته باشند ، پس مجموع آنها فرد است.
برهان : فرض می کنیم m و n اعداد صحیح با افراز های متفاوت باشند.
باید نشان دهیم $m+n$ فرد است.
بدون از دست دادن عمومیت ، فرض می کنیم m زوج و n فرد باشد.
پس $m=۲a$ و $n=۲b+۱$ است برای اعداد صحیح a و b
بنا بر این داریم $m+n=۲a+۲b+۱=۲(a+b)+۱$ که بر اساس تعریف ، فرد است.

۱۳.۶ - تمرینات فصل سیزدهم

با استفاده از روش برهان مستقیم ، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۱ - اگر x یک عدد صحیح زوج باشد ، پس $x^۲$ زوج است.

۲ - اگر a یک عدد صحیح فرد باشد ، پس $a^۲ + ۳a + ۵$ فرد است.

۳ - فرض کنید $x, y \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر x زوج باشد ، پس xy زوج است.

۴ - فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر $a|b$ ، پس $a^۲|b^۲$ ·

۵ - فرض کنید a یک عدد صحیح باشد. اگر $۷|۴a$ ، پس $۷|a$ ·

۶ - فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ باشد. اگر $a|b$ و $c|d$ ، پس $ac|bd$ ·

۷ – فرض کیند $x, y \in \mathbb{R}$ باشد. اگر $x^۲ + ۵y = y^۲ + ۵x$ باشد ، پس $x = y$ است یا $x + y = ۵$ است.

۸ – اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $n^۲ + ۳n + ۴$ زوج است. حالت های مختلف را امتحان کنید.

۹ - اگر دو عدد صحیح افراز متفاوت باشند ، پس حاصلضرب آنها زوج است. افراز متفاوت یعنی یکی زوج است و دیگری فرد.

۱۰ – فرض کنید a, b, c اعداد صحیح باشند. اگر $a^۲|b$ و $b^۳|c$ پس $a^۶|c$ ·

۱۱ - اگر p یک عدد اول باشد و k یک عدد صحیح بطوری که داشته باشیم $0 < k < p$ ، پس $p|\binom{p}{k}$ ·

۱۲ - اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد ، پس $\binom{۲n}{n}$ زوج است.

۱۳ -اگر $a, b, c \in \mathbb{N}$ باشد $c \le b \le a$ و ، پس $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}$ است.

۱۴ - فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ باشد. اگر $gcd(a,b) > ۱$ باشد ، پس $b|a$ یا b عدد اول نیست.

پاسخ تمرینات فصل سیزدهم

با استفاده از روش برهان مستقیم ، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۱ - اگر x یک عدد صحیح زوج باشد ، پس $x^۲$ زوج است.

برهان : فرض می کنیم x زوج باشد. پس $x = ۲a$ است برای $a \in \mathbb{Z}$

در نتیجه $x^۲ = (۲a)^۲ = ۴a^۲ = ۲(۲a^۲)$ است

لذا $x^۲ = ۲b$ است ، در اینجا b عدد صحیح $۲a^۲$ است.

پس بر اساس تعریف عدد زوج ، $x^۲$ زوج است.

۲ - اگر a یک عدد صحیح فرد باشد ، پس $a^۲ + ۳a + ۵$ فرد است.

برهان : فرض می کنیم a فرد باشد.

پس بر اساس تعریف عدد فرد ، برای یک عدد صحیح c عدد $a = ۲c + ۱$ فرد است.

پس

$$a^2+3a+5=(2c+1)^2+3(2c+1)+5=4c^2+4c+1+6c+3+5=4c^2+10c+9$$
$$=4c^2+10c+8+1=2(2c^2+5c+4)+1.$$

این نشان می دهد $a^۲+۳a+۵=۲b+۱$ است ، اینجا $b=۲c^۲+۵c+۴\in\mathbb{Z}$ است.
لذا $a^۲+۳a+۵$ فرد است.

۳ - فرض کنید $x,y\in\mathbb{Z}$ باشد. اگر x زوج باشد ، پس xy زوج است.
برهان : فرض می کنیم $x,y\in\mathbb{Z}$ و x هم زوج باشد.
پس $x=۲a$ است برای یک عدد صحیح a , بر اساس تعریف عدد زوج.
پس $xy=(۲a)(y)=۲(ay)$ ۰
لذا $xy=۲b$, اینجا b عدد صحیح xy است. پس xy زوج است.

۴ - فرض کنید $a,b\in\mathbb{Z}$ باشد. اگر $a|b$, پس $a^۲|b^۲$ ۰
برهان : فرض می کنیم $a|b$ ۰
بر اساس تعریف بخش پذیری ، این یعنی $b=ac$ است برای یک عدد صحیح c ۰
طرفین این معادله را به توان ۲ می رسانیم ، پس داریم $b^۲=a^۲c^۲$ ۰
پس $b^۲=a^۲d$, اینجا $d=c^۲\in\mathbb{Z}$ ۰
بر اساس تعریف بخش پذیری داریم $a^۲|b^۲$ ۰

۵ - فرض کنید a یک عدد صحیح باشد. اگر $۷|۴a$, پس $۷|a$ ۰
برهان : فرض می کنیم $۷|۴a$ ۰
بر اساس تعریف بخش پذیری ، این یعنی $۴a=۷c$ است برای یک عدد صحیح c ۰
چون $۴a=۲(۲a)$ است ، پس $۴a$ زوج است ، و چون $۴a=۷c$ است ، میدانیم $۷c$ زوج است.
پس c نمی تواند فرد باشد ، زیرا این سبب می شود $۷c$ فرد باشد و نه زوج.
پس c زوج است ، و لذا $c=۲d$ است برای یک عدد صحیح d۰
حالا بر می گردیم به معادله $۴a=۷c$ و c را جانشین می کنیم با $۲d$ ۰ پس داریم $۴a=۱۴d$ ۰
طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم و $۲a=۷d$ بدست می آوریم.
حالا چون $۲a=۷d$ است ، نتیجه می گیریم $۷d$ زوج است ، و لذا d نمی تواند فرد باشد.
پس d زوج است ، لذا $d=۲e$ است برای یک عدد صحیح e ۰
بر می گردیم به $۲a=۷d$ و بجای d می نویسیم $۲e$ و در نتیجه $۲a=۱۴e$ بدست می آوریم.
طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم و $a=۷e$ بدست می آوریم.
و در نهایت معادله $a=۷e$ یعنی $۷|a$ ۰

۶ - فرض کنید $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ باشد. اگر $a|b$ و $c|d$, پس $ac|bd$ ۰
برهان فرض می کنیم $a|b$ و $c|d$۰
چون $a|b$ پس بر اساس تعریف بخش پذیری یک عدد صحیح x وجود دارد بطوری که $b=ax$ است.

به همین طریق چون $c|d$ پس یک عدد صحیح y وجود دارد بطوری که $d = cy$ است.
چون $b = ax$ است ، می توانیم یک طرف $d = cy$ را در b ضرب کنیم و طرف دیگر را در ax ضرب کنیم.
این به ما $bd = axcy$ یا $bd = (ac)(xy)$ می دهد.
چون $xy \in \mathbb{Z}$ است ، تعریف بخش پذیری را بر $bd = (ac)(xy)$ اعمال می کنیم و نتیجه می گیریم $ac|bd$ ٠

۷ – فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}$ باشد. اگر $x^۲ + ۵y = y^۲ + ۵x$ باشد ، پس $x = y$ است یا $x + y = ۵$ است.
برهان : فرض می کنیم $x^۲ + ۵y = y^۲ + ۵x$ باشد.
پس داریم $x^۲ - y^۲ = ۵x - ۵y$, فاکتور می گیریم. $(x - y)(x + y) = ۵(x - y)$ ٠
دو حالت در نظر می گیریم.
حالت اول : اگر $x - y \neq 0$ باشد. می توانیم طرفین را بر $x - y$ تقسیم کنیم. پس $x + y = ۵$ بدست می آوریم.
حالت دوم : اگر $x - y = 0$ باشد ، پس $x = y$ است.
در نهایت داریم $x = y$ است یا $x + y = ۵$ است. گزاره ثابت شد.

۸ – اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد ، پس $n^۲ + ۳n + ۴$ زوج است. حالت های مختلف را امتحان کنید.
برهان : فرض می کنیم $n \in \mathbb{Z}$ باشد. دو حالت را در نظر می گیریم.
حالت اول : فرض می کنیم n زوج باشد ، پس $n = ۲a$ است برای یک $a \in \mathbb{Z}$ ٠
لذا داریم

$$n^2 + 3n + 4 = (2a)^2 + 3(2a) + 4 = 4a^2 + 6a + 4 = 2(2a^2 + 3a + 2).$$

پس $n^۲ + ۳n + ۴ = ۲b$ است. اینجا $b = ۲a^۲ + ۳a + ۲ \in \mathbb{Z}$ است. پس $n^۲ + ۳n + ۴$ زوج است.
حالت دوم : فرض می کنیم n فرد باشد. پس $n = ۲a + ۱$ است برای یک $a \in \mathbb{Z}$ ٠
لذا داریم.

$$n^2 + 3n + 4 = (2a+1)^2 + 3(2a+1) + 4 = 4a^2 + 4a + 1 + 6a + 3 + 4 = 4a^2 + 10a + 8$$
$$= 2(2a^2 + 5a + 4).$$

پس $n^۲ + ۳n + ۴ = ۲b$ است. اینجا $b = ۲a^۲ + ۵a + ۴ \in \mathbb{Z}$ است. پس $n^۲ + ۳n + ۴$ در هر دو حالت زوج است.

۹ - اگر دو عدد صحیح افراز متفاوت باشند ، پس حاصلضرب آنها زوج است. افراز متفاوت یعنی یکی زوج است و دیگری فرد.
برهان : فرض می کنیم a و b دو عدد صحیح با افراز متفاوت باشند. پس یکی زوج است و دیگری فرد. فرض می کنیم a زوج باشد و b فرد باشد. پس اعداد صحیح c و d وجود دارند بطوری که $a = ۲c$ و $b = ۲d + ۱$ هستند. پس حاصلضرب a و b می شود

$$ab = ۲c(۲d + ۱) = ۲(۲cd + c)$$

لذا $ab = ۲k$ است. اینجا $k = ۲cd + c \in \mathbb{Z}$ است. پس حاصلضرب ab زوج است.

۱۰ – فرض کنید a, b, c اعداد صحیح باشند. اگر $a^۲|b$ و $b^۳|c$ پس $a^۶|c$.

برهان : چون $a^۲|b$ پس داریم $b = ka^۲$ است برای یک $k \in \mathbb{Z}$. و چون $b^۳|c$ پس داریم $c = hb^۳$ است برای یک $h \in \mathbb{Z}$. پس $c = h\left(ka^۲\right)^۳ = hk^۳a^۶$ است. پس $a^۶|c$.

۱۱ - اگر p یک عدد اول باشد و k یک عدد صحیح بطوری که داشته باشیم $0 < k < p$, پس $p|\binom{p}{k}$.

برهان : از فرمول $\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!}$ داریم $p! = \binom{p}{k}(p-k)!\,k!$. حالا ، چون عدد اول p یک ضریب $p!$ در سمت چپ است ، پس باید یک ضریب $\binom{p}{k}(p-k)!\,k!$ در سمت راست هم باشد. لذا عدد اول p در تجزیه به عوامل اول $\binom{p}{k}(p-k)!\,k!$ ظاهر می شود.
حالا ، $k!$ یک حاصلضرب اعداد کوچک تر از p است ، پس تجزیه به عوامل اول آن شامل هیچ p نیست. به همین طریق تجزیه به عوامل اول $(p-k)!$ شامل هیچ p بنیست. اما گفتیم که تجزیه به عوامل اول $\binom{p}{k}(p-k)!\,k!$ باید شامل p باشد ، این یعنی تجزیه به عوامل اول $\binom{p}{k}$ شامل یک p است.
پس $p|\binom{p}{k}$.

۱۲ - اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد ، پس $\binom{۲n}{n}$ زوج است.

برهان : بر اساس تعریف ، $\binom{۲n}{n}$ عبارت است از تعداد زیر مجموعه های n عضوی یک مجموعه A که دارای $۲n$ عضو است. برای هر زیر مجموعه $X \subseteq A$ با $|X| = n$, متمم $\overline{X}$ یک مجموعه متفاوت است ، اما دارای $۲n - n = n$ عضو است. اگر تمام زیر مجموعه های n عضوی یک مجموعه A را به صورت لیست بنویسیم ، به صورت زیر خواهد بود.

$$X_1, \overline{X_1},\ X_2, \overline{X_2},\ X_3, \overline{X_3},\ X_4, \overline{X_4},\ X_5, \overline{X_5}\ldots$$

اقلام این لیست زوج است ، زیرا هر کدام به صورت دو تائی گروه بندی شده اند ، پس $\binom{۲n}{n}$ زوج است.

۱۳ -اگر $a, b, c \in \mathbb{N}$ باشد و $c \le b \le a$ ، پس $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}$ است.

برهان ؛ فرض می کنیم $a, b, c \in \mathbb{N}$ باشد و $c \le b \le a$
پس داریم

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \frac{a!}{(a-b)!b!}\frac{b!}{(b-c)!c!} =$$

$$\frac{a!}{(a-b+c)!(a-b)!}\frac{(a-b+c)!}{(b-c)!c!} = \frac{a!}{(b-c)!(a-b+c)!}\frac{(a-b+c)!}{(a-b)!c!} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}.$$

۱۴ - فرض کنید $a,b \in \mathbb{N}$ باشد. اگر $gcd(a,b) > ۱$ باشد ، پس $b|a$ یا b عدد اول نیست.

برهان : فرض می کنیم $gcd(a,b) > ۱$ باشد. و فرض می کنیم $c = gcd(a,b) > ۱$ باشد. پس چون c مقسوم علیه هم a است و هم b پس داریم $a = cx$ و $b = cy$ برای اعداد صحیح x و y. دو حالت داریم.

حالت اول : فرض می کنیم b عدد اول باشد. پس معادله $b = cy$ با $c > ۱$ لازم می شود $c = b$ و $y = ۱$ باشد. پس $a = cx$ می شود $a = bx$ یعنی $b|a$ و نتیجه می گیریم گزاره زیر صحیح است.

$b|a$ یا b اول نیست

حالت دوم : فرض می کنیم b عدد اول نیست. پس گزاره زیر بطور اتوماتیک صحیح است.

$b|a$ یا b اول نیست