فصل دوازدهم
گزاره های مسور
Quantified Statements
بخش اول
کمیّت نما ها
Quantifiers

توجه : کلمه مسور با مصور اشتبا ه نشود. سور یا کمیّت نما در منطق ریاضی نشانه ای است که دائره مصداق ها را مشخص می کند. سور در دستور زبان ، اسم است. مسور از کلمه سور آمده به معنی سور دار یا کمی شده که اینجا به صورت صفت آمده برای گزاره. مثلا می گوییم گزاره مسور یا گزاره سور شده یا گزاره سور دار.

مقدمه : قبلا نماد های $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ را دیده ایم. این نماد ها می توانند جریان منطقی الگوریتم ها را هدایت کنند. یاد گرفتن ایم که چگونه آنها را بجای گزاره ها و جملات فارسی بکار بریم. دیده ایم که چگونه این نماد ها می توانند در فهم گزاره های مختلف که در حقیقت یک مفهوم و معنی دارند ، به ما کمک کنند.
اما نماد های بالا به تنهایی برای بیان هر گزاره ای کافی نیست. مثلا ، فرض کنید با یک مجموعه اعداد صحیح می خواهیم کار کنیم. این مجموعه ممکن است به صورت $S = \{x_۱, x_۲, x_۳, \cdots\}$ باشد. حالا فرض کنید می خواهیم بگوییم تمام اعداد S فرد هستند. پس ممکن است بنویسیم

$$P(x_۱) \wedge p(x_۲) \wedge p(x_۳) \wedge \cdots$$

در عبارت بالا $P(x)$ گزاره باز x فرد است , می باشد.
یا اگر بخواهیم بگوییم حد اقل یک عضو S وجود دارد که فرد است ، می نویسیم

$$P(x_۱) \vee p(x_۲) \vee p(x_۳) \vee \cdots$$

اما ، این عبارت ها ممکن است هرگز به پایان نرسند.

برای رفع این مشکل دو نماد جدید $\forall$ و $\exists$ معرفی می کنیم. نماد $\forall$ بجای عبارت برای تمام و نماد $\exists$ بجای عبارت وجود دارد بکار می روند. بنا براین گزاره تمام عناصر S فرد هستند به صورت زیر نوشته می شود.

$$\forall x \in S, P(x)$$

و گزاره حد اقل یک عنصر S وجود دارد که فرد است به صورت زیر نوشته می شود.

$$\exists\, x \in S, P(x)$$

این نماد های جدید، **کمیّت نما ها Quantifiers** نامیده می شوند. این نماد ها موضوع این فصل هستند.

۱۲.۱ ـ کمیّت نما ها

تعریف ۱۲.۱.۱
نماد های $\forall$ و $\exists$ را **کمیّت نما ها Quantifiers** می نامند.
نماد $\forall$ بجای عبارت *برای تمام* یا *برای همه* یا *برای هر* بکار می رود.
نماد $\exists$ بجای عبارت *یک…وجود دارد* بکار می رود.

بنا بر این ، گزاره

برای هر $n \in \mathbb{Z}$ عدد $۲n$ زوج است.

می تواند به یکی از دو طریق زیر بیان شود.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$ عدد $۲n$ زوج است.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$ داریم $E(۲n)$

به همین طریق ، گزاره

یک زیر مجموعه X از $\mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که $|X| = ۵$ است.

می توان به صورت زیر ترجمه کرد.

$$\exists X, (X \subseteq \mathbb{N}) \wedge (|X| = 5)$$

یا

$$\exists X \subseteq \mathbb{N}, |X| = 5$$

یا

$$\exists X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| = 5.$$

نماد های $\forall$ و $\exists$ را کمیت نما یا کمی کننده نامیده می شوند ، زیرا از جهتی یا به طریقی به کمیّت متغیر بعد از آنها ، اشاره می کنند.

نماد $\forall$ **سور عمومی یا کمیّت نمای کلی Universal Quantifier** نامیده می شود.

نماد $\exists$ **سور وجودی Existential Quantifier** نامیده می شود.

گزاره هایی که شامل دو نماد بالا هستند را **گزاره های مسور Quantified Statements** نامیده می شوند

گزاره ای که با $\forall$ شروع می شود ، **گزاره مسور کلی Universally Quantified Statement** نامیده می شود.

گزاره ای که با $\exists$ شروع می شود، **گزاره مسور وجودی Existentially Quantified Statement** نامیده می شود.

مثال ۱۲.۱.۱

گزاره های فارسی زیر همراه با ترجمه آنها با نماد های منطقی آمده اند.

هر عددی که فرد نیست ، زوج است.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \sim (n \text{ فرد است}) \Rightarrow (n \text{ زوج است})$$

یک عدد وجود دارد که زوج نیست.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \sim E(n)$$

برای هر عدد حقیقی x یک عدد حقیقی y وجود دارد بطوری که $y^۳ = x$ است.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^۳ = x$$

برای هر دو عدد گویای a و b داریم ab گویا هستند.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, ab \in \mathbb{Q}$$

برای یک مجموعه S مانند $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ و غیرو ، یک گزاره مسور $\forall x \in S, P(x)$ صحیح است اگر $P(x)$ برای هر x در S صحیح باشد.

اگر حد اقل یک $x \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $P(x)$ غلط باشد ، پس $\forall x \in S, P(x)$ یک گزاره غلط است.

به همین طریق: $\exists x \in S, P(x)$ صحیح است اگر $P(x)$ صحیح باشد برای حد اقل یک عنصر $x \in S$, در غیر این صورت غلط است.

پس گزاره های مثال ۱۲.۱.۱ صحیح هستند.

مثال ۱۲.۱.۲

گزاره های مسور غلط زیر همراه با ترجمه آنها در ذیل می آیند.

تمام اعداد صحیح زوج هستند.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, E(n)$$

یک عدد صحیح n وجود دارد بطوری که $n^۲ = ۲$ است.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2.$$

برای هر عدد حقیقی x یک عدد حقیقی y وجود دارد بطوری که $y^۲ = x$ است.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x.$$

برای هر دو عدد گویای a و b عدد $\sqrt{ab}$ گویا است.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}.$$

مثال ۱۲.۱.۳

هنگامی که یک گزاره شامل دو کمیّت نما باشد ، باید مواظب ترتیب آنها باشید ، زیرا اگر ترتیب آنها را جا بجا کنید ، معنی آنها ممکن است تغییر کند. گزاره زیر از مثال ۱۲.۱.۱ در نظر بگیرید.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

این گزاره صحیح است. زیرا x هر عددی باشد ، یک عدد $y = \sqrt[3]{x}$ وجود دارد بطوری که $y^3 = x$ است. حالا ترتیب کمیّت نما ها را عوض می کنیم ، تا یک گزاره جدید بدست آوریم.

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

این گزاره جدید می گوید یک عدد بخصوص y وجود دارد با این خصوصیات که $y^3 = x$ است برای هر عدد حقیقی x. چون هیچ عدد y نمی تواند چنین خصوصیتی داشته باشد ، پس گزاره غلط است.
ملاحظه می کنید این دو گزاره های بالا مفاهیم کاملا متفاوت دارند.
در مکالمه ها نیز گاهی سهل انگاری می شود ، مثلا شاید شنیده باشید یک نفر بگوید

تمام دانشجویان شهریه کامل نمی پردازند.

در صورتی که منظور آن شخص ، جمله زیر باشد.

همه دانشجویان شهریه کامل نمی پردازند.

جمله اول یعنی تمام دانشجویان از پرداخت شهریه کامل معاف هستند ، اما جمله دوم یعنی بعضی از دانشجویان ممکن است از پرداخت شهریه کامل معاف باشند. شاید چنین اشتباهاتی در مکالمه روزمره قابل اغماض باشد ، اما در ریاضیات نباید چنین اشتباهاتی رخ دهد.
هرگز نگویید تمام اعداد صحیح زوج نیستند. زیرا این جمله یعنی هیچ عدد صحیح زوجی وجود ندارد.
در عوض باید بگویید همه اعداد صحیح ، زوج نیستند.

تمرینات ۱۲.۱
گزاره های زیر را به صورت جملات فارسی بنویسید. بگویید صحیح هستند یا غلط.

۱) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

۲) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ax = x$

۳) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| < n$

۴) $\forall X \subseteq \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, |X| = n$

۵) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m = n + 5$

پاسخ تمرینات ۱۲.۱
گزاره های زیر را به صورت جملات فارسی بنویسید. بگویید صحیح هستند یا غلط.

۱) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

پاسخ
برای هر عدد حقیقی x داریم $x^۲ > 0$.
یا ، مربع هر عدد حقیقی ، مثبت است.
این گزاره **غلط** است ، زیرا صفر یک عدد حقیقی است ، اما صحیح نیست بگوییم $0^۲ > 0$ است.

۲) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ax = x$

پاسخ
یک عدد حقیقی a وجود دارد بطوری که برای تمام اعداد حقیقی x داریم $ax = x$
این گزاره **صحیح** است. مثلا $a = ۱$ را در نظر بگیرید.

۳) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| < n$

پاسخ
برای هر عدد طبیعی n یک زیر مجموعه X از $\mathbb{N}$ وجود دارد با $|X| < n$.
این گزاره **صحیح** است. زیرا ، فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد و فرض کنید $X = \emptyset$ باشد ، پس داریم $|X| = 0 < n$

۴) $\forall X \subseteq \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, |X| = n$

پاسخ
برای هر زیر مجموعه X از $\mathbb{N}$, یک عدد صحیح n وجود دارد بطوری که $|X| = n$ است.
این گزاره **غلط** است. مثلا ، مجموعه $X = \{۲, ۴, ۶, ۸, \cdots\}$ از تمام اعداد طبیعی زوج نا متناهی است پس هیچ عدد صحیح n وجود ندارد بطوری که $|X| = n$ باشد.

۵) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m = n + 5$

پاسخ
برای هر عدد صحیح n یک عدد صحیح دیگر m وجود دارد بطوری که $m = n + ۵$ است.
این گزاره **صحیح** است.

۱۲.۲ – مطا لب بیشتر در مورد گزاره های شرطی More on Conditional Statements

حالا زمانی است که یک نکته مهم در مورد گزاره های شرطی که شامل متغیر ها است صحبت کنیم. برای درک موضوع ، اجازه دهید یک مثال در مورد اعداد صحیح x بیاوریم.

$$(\text{یک ضریب شش است } x) \Rightarrow (\text{زوج است } x)$$

این یک گزاره صحیح است. چون می دانید که همه ضریب های ۶ زوج هستند ، پس صحت این گزاره بستگی به x ندارد. اگر x ضریب ۶ باشد ، حتما زوج است.

حتی می توانیم این حقیقت را با نوشتن این گزاره صحیح به صورت زیر درک کنیم.

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (\text{یک ضریب شش است } x) \Rightarrow (\text{زوج است } x)$$

اما ، حالا ترتیب گزاره را تغییر می دهیم تا گزاره جدیدی بدست آوریم.

$$(\text{زوج است } x) \Rightarrow (\text{یک ضریب شش است } x)$$

این گزاره جدید برای بعضی از مقادیر x مثلا ۱۸ ,۱۲ ,۶– و غیرو صحیح است ، اما برای مقادیر دیگر مانند ۲,۴ و غیرو صحیح نیست.
در بخش ۳.۱ فصل سوم ، گفتیم یک **گزاره نما** **Open Sentence** گزاره ای است که صحت آن بستگی به مقدار یک یا چند متغیر دارد.
اما ، اگر یک کمیّت نمای کلی یا سور عمومی $\forall$ جلو آخرین گزاره نمای بالا بگذاریم ، عبارت زیر را بدست می آوریم.

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (\text{زوج است } x) \Rightarrow (\text{یک ضریب شش است } x)$$

که مسلما غلط است. پس این عبارت جدید یک گزاره است ، نه یک گزاره نما.بطور کلی ، اگر دو گزاره نمای $P(x)$ و $Q(x)$ در مورد عدد صحیح x داشته باشیم ، عبارت $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \Rightarrow Q(x)$ یا صحیح است یا غلط ، پس آن یک گزاره است ، نه گزاره نما.

حالا ، به یک نکته مهم می رسیم. در ریاضیات ، هر گاه $P(x)$ و $Q(x)$ گزاره نما هایی در رابطه با عناصر x در مجموعه S باشند ، یک عبارت به شکل $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به معنی گزاره $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x)$ است. به عبارت دیگر ، اگر یک گزاره شرطی صریحا مسور نشده باشد ، یعنی جلو آن نماد $\forall$ نباشد ، پس تصور می شود که تلویحا یک سور عمومی جلو آن است. زیرا گزاره هایی به شکل $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x)$ بقدری متداول هستند که بکار بردن $\forall x \in S$ خسته کننده بنظر می رسد.

پس گزاره زیر ، یک گزاره صحیح است.

اگر x یک ضریب ۶ باشد ، پس x زوج است.

به همین طریق ، گزاره زیر یک گزاره غلط است.

اگر x زوج باشد ، پس x یک ضریب ۶ است.

خلاصه مطالب بالا در تعریف زیر می آوریم.

تعریف ۱۲.۲.۱
اگر P و Q گزاره و یا گزاره نما باشند ، پس

اگر P پس Q

یک گزاره است.

پس عبارت های زیر، گزاره های **صحیح** هستند.

اگر $x \in \mathbb{R}$ پس $x^۲ + ۱ > 0$

اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد ، پس f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

اگر یک لیست دارای n ورودی باشد ، پس دارای $n!$ جایگشت دارد.

عبارت های زیر، گزاره های **غلط** هستند.

اگر p یک عدد اول باشد ، پس p فرد است.

گزاره بالا غلط است ، زیرا ۲ عدد اول است.

اگر f یک تابع گویا باشد ، پس f یک خط مجانب دارد.

گزاره بالا غلط است ، زیرا $x^۲$ گویا است.

اگر مجموعه X دارای n عضو باشد ، پس $|\mathscr{P}(X)| = n^2$

گزاره بالا صحیح است فقط اگر $|X| = ۲$ باشد.

۱۲.۳- ترجمه جملات فارسی به منطق نمادی Translating Farsi to Symbolic Logic

در نوشتن و خواندن اثبات قضیه ها ، باید همیشه مواظب ترکیب منطقی و معانی جملات باشیم. گاهی لازم است این جملات را به صورت عبارت های شامل نماد های منطقی تبدیل کنیم. هدف این بخش این است که به شما تمرین کافی داده شود تا بتوانید جملات فارسی به صورت فرم منطقی ترجمه کنید و ترکیب منطقی آنها را درک کنید.

مثال ۱۲.۳.۱

قضیه مقدار میانگین که در حسابان خوانده اید را بخاطر بیاورید.

اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، و در بازه (a,b) مشتق پذیر ، پس یک عدد $c\in(a,b)$ وجود دارد ، بطوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است.

در ذیل ترجمه قضیه بالا به صورت نمادی ملاحظه می کنید.

$$\big((f \text{ در } [a,b] \text{ پیوسته است}) \wedge (f \text{ در } (a,b) \text{ مشتق پذیر است})\big) \Rightarrow \left(\exists\, c\in(a,b), f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

مثال ۱۲.۳.۲

حدس گولد باخ Goldbach Conjecture در بخش ۳.۱ فصل سوم را بخاطر بیاورید.

هر عدد صحیح زوج بزرگ تر از ۲ مجموع دو عدد اول است.

گزاره بالا به دو طریق زیر می توان ترجمه کرد. در ترجمه های زیر ، P مجموعه اعداد اول است و $S=\{۴,۶,۸,\dots\}$ مجموعه اعداد صحیح زوج بزرگ تر از ۲ است. توجه کنید به تفاوت حرف بزرگ P و حرف کوچک p

$$(n\in S)\Rightarrow(\exists\ p,q\in P, n=p+q)$$
$$\forall n\in S, \exists\, p,q\in P, n=p+q$$

در ترجمه حدس گولد باخ توجه کنید. اولین ترجمه ، ساختمان $(n\in S)\Rightarrow\ Q(n)$ دارد و دومین ترجمه ، ساختمان $\forall n\in S, Q(n)$ دارد. اما معنی هر دو یکسان است. این موضوع مهمی است. **هر گزاره مسور کلی می تواند به صورت گزاره شرطی بیان شود.**

مطالب بالا در امر مسلم زیر خلاصه می شود.

امر مسلم ۱۲.۳.۱

فرض کنید S یک مجموعه و $Q(x)$ یک گزاره در مورد هر $x\in S$ باشد. گزاره های زیر یک مفهوم دارند.

$$\forall x\in S, Q(x)$$
$$(x\in S)\Rightarrow\ Q(x)$$

این امر مسلم ، مهم است. زیرا بسیاری از قضایا شکل یک گزاره شرطی دارند. درک امر مسلم بالا به ما کمک می کند بین دو شکل هر کدام را می خواهیم ، انتخاب کنیم.

آخرین اخطار ، کاملا مواظب باشید، هر جا کلمه **و** دیدید فورا آنرا به $\wedge$ تبدیل نکنید. همچنین کلمه **یا** را فورا به $\vee$ تبدیل نکنید. اول به معنی جمله توجه کنید. به مثال زیر توجه کنید.

حد اقل یکی از دو اعداد صحیح x و y زوج است.

چون کلمه **و** در گزاره بالا است، دچار اشتباه نشوید و آنرا به $\wedge$ تبدیل نکنید. معنی گزاره بالا این است

یک یا هر دو عدد ، زوج است.

لذا ترجمه گزاره بالا به صورت زیر است.

(y زوج است) $\vee$ (x زوج است)

در نهایت ، معنی منطقی **اما** می تواند **و** تعبیر شود. مثلا به گزاره زیر توجه کنید.

عدد صحیح x زوج است ، اما عدد صحیح y فرد است.

ترجمه گزاره بالا به صورت زیر است.

(y فرد است) $\wedge$ (x زوج است)

تمرینات ۱۲.۳

هر یک از جملات زیر به منطق نمادی یا منطق صوری ترجمه کنید.

۱ ـ اگر f یک چند جمله ای با درجه بزرگ تر از ۲ باشد ، پس f' آن یک عدد ثابت نیست.
۲ ـ اگر x یک عدد اول باشد ، پس $\sqrt{x}$ یک عدد گویا نیست.
۳ ـ برای هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت δ وجود دارد بطوری که $|x-a|<\delta$ دلالت دارد که $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ است.
۴ ـ یک عدد حقیقی a وجود دارد بطوری که برای هر عدد حقیقی x داریم $a+x=x$ است.
۵ ـ اگر x یک عدد گویا باشد و $x \neq 0$, پس $\tan(x)$ یک عدد گویا نیست.

پاسخ تمرینات ۱۲.۳

هر یک از جملات زیر به منطق نمادی یا منطق صوری ترجمه کنید.

۱ ـ اگر f یک چند جمله ای با درجه بزرگ تر از ۲ باشد ، پس f' آن یک عدد ثابت نیست.

ترجمه: $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

در ترجمه بالا P بجای f یک چند جمله ای است ، آمده
حرف Q بجای f دارای درجه بزرگ تر از ۲ است ، آمده
حرف R بجای f' یک عدد ثابت نیست ، آمده

۲ ـ اگر x یک عدد اول باشد ، پس $\sqrt{x}$ یک عدد گویا نیست.

ترجمه: $P \Rightarrow \sim Q$

در ترجمه بالا P بجای x عدد اول است ، آمده
حرف Q بجای $\sqrt{x}$ یک عدد گویا است ، آمده

۳ ـ برای هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت δ وجود دارد بطوری که $|x-a|<\delta$ دلالت دارد که $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ است.

ترجمه :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, (|x-a|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$$

۴ ـ یک عدد حقیقی a وجود دارد بطوری که برای هر عدد حقیقی x داریم $a+x=x$ است.

ترجمه :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, a+x=x$$

۵ ـ اگر x یک عدد گویا باشد و $x \neq 0$, پس $\tan(x)$ یک عدد گویا نیست.

ترجمه :

$$((x \in \mathbb{Q}) \wedge (x \neq 0)) \Rightarrow (\tan(x) \notin \mathbb{Q})$$

۱۲.۴ - نقیض گزاره ها Negation of Statements

اگر یک گزاره R داشته باشیم ، گزاره $\sim R$ را **نقیض** R می نامند. اگر R یک گزاره مختلط باشد ، پس، در بیشتر موارد، نقیض آن می تواند به شکل ساده تر یا مفید تر نوشته شود. عمل پیدا کردن این شکل ساده را **نقیض گزاره R پیدا کردن** می نامند. حالا طریق انجام این عمل را بر رسی می کنیم.

قبلا ، قسمتی از این موضوع را توضیح داده ایم. **قوانین دو مورگان DeMorgan's Laws** را در بخش ۳.۶ فصل سوم دیده ایم و در ذیل برای یاد آوری می آوریم.

$$\sim(P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q) \qquad (۱۲.۴.۱)$$
$$\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q) \qquad (۱۲.۴.۲)$$

فرمول های بالا را می توان به عنوان قواعد ی تصور کرد که به مامی گوید چگونه نقیض گزاره های $P \wedge Q$ و $P \vee Q$ را پیدا کنیم. در ذیل چند مثال می آوریم تا نشان دهیم چگونه قواعد دو مورگان را برای پیدا کردن نقیض های گزاره هایی که شامل $\wedge$ و $\vee$ هستند پیدا کنیم.

مثال ۱۲.۴.۱

ملاحظه کنید چگونه نقیض گزاره زیر را پیدا می کنیم.

R : می توانید آنرا از طریق فاکتور گیری یا با فرمول درجه دوم حل کنید

حالا ، R یعنی

(شما می توانید آنرا از طریق فاکتور گیری حل کنید) یا (میتوانید آنرا با فرمول درجه دوم حل کنید)

که آنرا به صورت $P \vee Q$ بیان می کنیم. نقیض آن میشود.

$$\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

به صورت کلمات فارسی ، نقیض R می شود.

$\sim R$: شما نمی توانید آنرا با فاکتور گیری حل کنید و نمی توانید آنرا با فرمول درجه دوم حل کنید.

مثال ۱۲.۴.۲

گزاره زیر را نفی می کنیم.

R: اعداد x و y هر دو فرد هستند.

این گزاره یعنی

$$(x \text{ فرد است}) \wedge (y \text{ فرد است})$$

پس نفی آن می شود.

$$\sim\big((x \text{ فرد است}) \wedge (y \text{ فرد است})\big) = \sim(x \text{ فرد است}) \vee \sim(y \text{ فرد است})$$
$$= (x \text{ زوج است}) \vee (y \text{ زوج است})$$

لذا نفی R به صورت های زیر بیان شود.

$\sim R$: عدد x زوج است یا عدد y زوج است.

$\sim R$: حد اقل یکی از x و y زوج است.

حالا ، اجازه دهید به یک نوع دیگر مساله بپردازیم. اغلب لازم می شود که نقیض یک گزاره مسور پیدا کنیم. مثلا ، $\sim\big(\forall x \in \mathbb{N}, P(x)\big)$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم این عبارت را به صورت کلمات بخوانیم ، جمله زیر را خواهیم داشت.

نمی توان گفت که $P(x)$ برای تمام عدد طبیعی x صحیح است.

این یعنی $P(x)$ حد اقل برای یک x غلط است. به صورت نماد ، می توان چنین نوشت.

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$$

پس

$$\sim\big(\forall x \in \mathbb{N}, P(x)\big) = \exists\, x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$$

به همین طریق ، می توانیم بگوییم

$$\sim(\exists x \in \mathbb{N}, P(x)) = \forall x \in \mathbb{N}, \sim P(x).$$

بطور کلی

$$\sim(\forall x \in S, P(x)) = \exists x \in S, \sim P(x), \qquad (۱۲.۴.۳)$$

$$\sim(\exists x \in S, P(x)) = \forall x \in S, \sim P(x). \qquad (۱۲.۴.۴)$$

مثال ۱۲.۴.۳

گزاره زیر را در نظر بگیرید.

R: مربع هر عدد حقیقی ، نا منفی است.

به صورت نماد می توان چنین نوشت.

$$R: \forall x \in \mathbb{R}, x^{۲} \geq 0$$

پس نفی آن می شود.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0) = \exists x \in \mathbb{R}, \sim(x^2 \geq 0) = \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0.$$

به صورت کلمات فارسی داریم.

$\sim R$: یک عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن ، منفی است.

توجه دارید که R صحیح است و $\sim R$ غلط است.

اگر یک گزاره چند کمیّت نما داشته باشد برای نفی آن باید چند مرتبه تساوی های (۱۲.۴.۳) و (۱۲.۴.۴) بکار بریم. مثلا ، گزاره زیر را در نظر بگیرید.

S: برای هر عدد حقیقی x یک عدد حقیقی y وجود دارد ، بطوری که $y^{۳} = x$ است.

این گزاره تصریح می کند که هر عدد حقیقی x یک ریشه سوم دارد ، پس صحیح است. به صورت نماد S را می توان به طریق زیر نوشت.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

حالا روی نفی آن کار می کنیم.

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x) &= \exists x \in \mathbb{R}, \sim (\exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x) \\ &= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sim (y^3 = x) \\ &= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^3 \neq x. \end{aligned}$$

پس نفی آن ، گزاره زیر است که البته غلط است.

$\sim S$: یک عدد حقیقی x وجود دارد ، بطوری که برای تمام اعداد حقیقی y داریم $y^{۳} \neq x$ است ،

هنگام نوشتن برهان ها ، گاهی باید یک گزاره شرطی مانند $P \Rightarrow Q$ را نفی کنید. در بقیه این بخش توضیح می دهیم که چگونه این کار را انجام دهید. برای شروع به عبارت $\sim(P \Rightarrow Q)$ نگاه کنید. این عبارت می گوید $P \Rightarrow Q$ غلط است. با توجه به جدول درستی $\Rightarrow$ که در فصل سوم بحث کردیم ، تنها زمانی $P \Rightarrow Q$ می تواند غلط باشد که P صحیح باشد و Q غلط. پس

$$\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q \qquad (۱۲.۴.۵)$$

مثال ۱۲.۴.۴

نقیض گزاره زیر را پیدا کنید. a یک عدد ثابت است.

R: اگر a فرد باشد ، پس $a^{۲}$ فرد است.

استفاده از فرمول $(۱۲.۴.۵)$ داریم.

$\sim R$: a فرد است و $a^{۲}$ فرد نیست.

توجه داشته باشید که R صحیح است ، اما $\sim R$ غلط است ، مقدار a مهم نیست.

مثال ۱۲.۴.۵

این مثال مانند مثال ۱۲.۴.۴ است ، با این تفاوت که a یک متغیر است. گزاره زیر را نفی می کنیم.

R: اگر x فرد باشد ، پس $x^{۲}$ فرد است.

همانطور که در بخش ۱۲.۲ بحث کردیم ، گزاره بالا را گزاره مسور کلی تلقی می کنیم.

$$R: \forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ فرد}) \Rightarrow (x^{۲} \text{ فرد})$$

بر اساس تساوی های $(۱۲.۴.۳)$ و $(۱۲.۴.۵)$ نقیض زیر را برای R داریم.

$$\begin{aligned} \sim \left(\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ odd}) \Rightarrow (x^2 \text{ odd})\right) &= \exists x \in \mathbb{Z}, \sim \left((x \text{ odd}) \Rightarrow (x^2 \text{ odd})\right) \\ &= \exists x \in \mathbb{Z}, (x \text{ odd}) \wedge \sim (x^2 \text{ odd}). \end{aligned}$$

به کلمات فارسی تبدیل می کنیم ، داریم.

$\sim R$: یک عدد صحیح فرد x وجود دارد که مربع آن فرد نیست.

ملاحظه می کنید که R صحیح است و $\sim R$ غلط است.

مثال ۱۲.۴.۵ بالا نشان می دهد چگونه یک گزاره شرطی $P(x) \Rightarrow Q(x)$ را نفی کنیم.

تمرینات ۱۲.۴
گزاره های زیر را نفی کنید.
۱ - عدد x مثبت است ، اما عدد y مثبت نیست.
۲ - برای هر عدد اول p یک عدد اول دیگر q وجود دارد با $q > p$.
۳ - برای هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت M وجود دارد بطوری که اگر $x > M$ باشد ، $|f(x) - b| < \varepsilon$ است.
۴ - هر چیزی که صورت دارد ، نمی خورم. منظور گوشت است ، زیرا حیوانات صورت دارند ، پس من گوشت نمی خورم.
۵ - اگر $\sin(x) < 0$ باشد ، پس صحیح نیست بگوییم $0 < x \leq \pi$ است.
۶ – همه وقت می توانید همه مردم را فریب بدهید.

پاسخ تمرینات ۱۲.۴
گزاره های زیر را نفی کنید.
۱ - عدد x مثبت است ، اما عدد y مثبت نیست.
پاسخ

حرف ربط (اما) می می تواند به معنی (و) تعبیر کرد. با استفاده از قانون دو مورگان نفی گزاره می شود.

عدد x مثبت نیست یا عدد y مثبت است.

۲ - برای هر عدد اول p یک عدد اول دیگر q وجود دارد با $q > p$.
پاسخ
یک عدد اول p وجود دارد بطوری که برای هر عدد اول q داریم $q \leq p$ است.

۳ - برای هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت M وجود دارد بطوری که اگر $x > M$ باشد ، $|f(x) - b| < \varepsilon$ است.
پاسخ
برای پیدا کردن نقیض این گزاره ، ممکن است مفید باشد اگراول آنرا با نماد ها بنویسیم

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists M \in (0,\infty), (x > M) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)$$

حالا روی گزاره بدست آمده کار می کنیم.

$$\begin{aligned}
&\sim \left(\forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists M \in (0,\infty), (x > M) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)\right) = \\
&\exists \varepsilon \in (0,\infty), \sim \left(\exists M \in (0,\infty), (x > M) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)\right) = \\
&\exists \varepsilon \in (0,\infty), \forall M \in (0,\infty), \sim \left((x > M) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)\right).
\end{aligned}$$

حالا با استفاده از مثال ۱۲.۴.۴ آخرین گزاره شرطی بالا ، داریم.

$$\exists \varepsilon \in (0,\infty), \forall M \in (0,\infty), \exists x, (x > M) \wedge \sim (|f(x) - b| < \varepsilon)).$$

ترجمه نقیض گزاره شرطی بالا به فارسی به شکل زیر است.
نفی: یک عدد مثبت ε وجود دارد با این خصوصیات که برای هر عدد مثبت M یک عدد x وجود دارد بطوری که $x > M$ و $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ است.

۴ - هر چیزی که صورت دارد ، نمی خورم. منظور گوشت است ، زیرا حیوانات صورت دارند ، پس من گوشت نمی خورم.
پاسخ
نفی: بعضی چیز ها که صورت دارند خواهم خورد .
توجه: اگر پاسخ شما مانند گزاره زیر باشد ، غلط است، هم از نظر اخلاقی و هم از نظر ریاضی. اگر هر چیزی که صورت دارد می خورید ، پس ادم خوار هستید! خیلی باید مواظب باشید ، لذا گزاره زیر غلط است.

هر چیزی که صورت دارد خواهم خورد.

۵ - اگر $\sin(x) < 0$ باشد ، پس صحیح نیست بگوییم $0 < x \leq \pi$ است.
پاسخ
نفی : یک عدد x وجود دارد بطوری که $\sin(x) < 0$ و $0 \leq x \leq \pi$ است.

۶ – همه وقت می توانید همه مردم را فریب بدهید.
پاسخ
به چند طریق می توانید گزاره بالا را نفی کنید. دو تا از آنها در ذیل می آوریم.
یک نفر هست که شما نمیتوانید همه وقت او را فریب دهید.
یا
یک شخص x و یک زمان y وجود دارد بطوری که شخص x در زمان y فریب نمی خورد.
آبر هام لینکن می گوید
شما می توانید همه اشخاص را پاره ای از اوقات فریب دهید ، و بعضی از اشخاص را همه وقت ، اما شما نمی توانید همه را همیشه فریب دهید.

۱۲.۵ - استنتاج منطقی Logical Inference

به چهار دلیل مهم ، منطق می خوانیم. دلیل اول ، جدول درستی ، معانی دقیق کلماتی از قبیل
و ، یا ، نه
و غیرو را به ما می گوید. پس ، هنگامی که به ساختار **اگر ...پس** در متن ریاضی مواجه می شویم ، منطق به ما می گوید منظور چیست.
دلیل دوم ، قواعد منطقی ، مانند قانون های دو مورگان به ما کمک می کنند بعضی از گزاره ها را به گزاره های مفید تر ودر عین حال با همان مفهوم ، تبدیل کنیم.
دلیل سوم ، منطق، عامل و عنصر اصلی در طرح و روانی الگوریتم ها است.
دلیل چهارم که هدف این بخش است ، منطق ، وسیله ای در اختیار ما می گذارد که اطلاعات داده شده را با هم تلفیق کنیم و اطلاعات جدیدی ایجاد کنیم.

برای شروع ، فرض کنید می دانیم که یک گزاره به شکل $P \Rightarrow Q$ صحیح است. این گزاره به ما می گوید هر گاه P صحیح باشد ، Q هم صحیح خواهد بود. اما صحیح بودن $P \Rightarrow Q$ به تنهایی به ما نمی گوید کدام یک از P یا Q صحیح است. می تواند هر دو غلط باشند ، یا P ممکن است غلط باشد و Q صحیح باشد. اما ، اگر بدانیم P صحیح است ، پس نتیجه می گیریم Q باید صحیح باشد. به این می گویند **استنتاج منطقی Logical Inference** یعنی اگر دو گزاره صحیح داشته باشیم ، می توانیم نتیجه بگیریم که گزاره سومی هم صحیح است. در این مثال $P \Rightarrow Q$ و P با هم جمع می شوند تا Q بدست آید. این موضوع در ذیل شرح داده شده است. به این طریق که اول $P \Rightarrow Q$ می نویسیم ، زیر آن P را می نویسیم ، سپس یک خط افقی ، یعنی این دو را جمع می کنیم و در نهایت ، نتیجه را که Q است. می نویسیم.
یعنی $P \Rightarrow Q$ و P ترکیب می شوند و Q را ایجاد می کنند.

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

این طرحی است که مکرر بکار برده می شود. این را **قاعده قیاس استثنایی** **Modus Ponens Rule** می نامند.
دو استنتاج منطقی دیگر به نام ها **قیاس دفع** **Modus Tollens** و **حذف** **Elimination** وجود دارد که در ذیل به آنها می پردازیم. در هر کدام ازحالت ها باید خود را متقاعد کنید که درستی گزاره های بالای خط ، منطقا منتج به صحت گزاره پااین خط می شود.

قیاس استثنایی	قیاس دفع	حذف
$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$

نام ها مهم نیستند ، و شما هم مجبور نیستید این نام ها را بخاطر داشته باشد ، اما قواعد مهم هستند و باید آنها را بخاطر داشته باشد.

سه استنتاج منطقی دیگر در ذیل می آید. اولی همان حقیقت واضح را بیان می کنند که اگر P و Q هر دو صحیح باشند ، پس گزاره $P \wedge Q$ هم صحیح است.

از طرف دیگر اگر $P \wedge Q$ صحیح باشد ، الزاما P و همچینین Q صحیح هستند.
و در نهایت ، اگر P صحیح باشد ، پس $P \vee Q$ صحیح است ، و مهم نیست که گزاره Q چیست.

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}}{P \wedge Q}$$