RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riaziasara.ir

درســـنامه ها و جــزوه های ریاضـــی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

فصل یازدهم
باز نگری توابع حقیقی مقدار
Review of Real-Valued Functions
بخش اول
مرور توان ها
Exponent Review

مقدمه – در فصل ۱۰ دیدیم که چگونه کارایی یک الگوریتم بوسیله اندازه تابع ورودی ، سنجیده می شود. مثلا ، الگوریتم جستجوی ترتیبی ، برای جستجوی یک لیست به طول n در بد ترین حالت احتیاج به $f(n) = ۲ + ۲n$ مرحله دارد ، بر عکس درالگوریتم دو دو یی در بد ترین حالت، تعداد مراحل مورد احتیاج $g(n) = ۳ + ۲\log_۲(n)$ است.

اندازه تابع های ورودی برای عملکرد الگوریتم ها در علوم کامپیوتری خیلی مهم است. هدف این فصل بازنگری خواص اصلی تابع ها است.

در فصل هشتم ، در مورد تابع های $f: A \to B$ از یک مجموعه به مجموعه دیگر صحبت کردیم.

اینجا در مورد تابع های $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ صحبت می کنیم ، A و B مجموعه $\mathbb{R}$ است و شاید بازه هایی روی محور اعداد حقیقی. ، مانند $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$

۱۱.۱ – مروری بر توان Exponent Review

از ابتدا شروع می کنیم. در عبارت a^n که a به توان n رسیده است ، a را **پایه Base** و n را **توان Exponent** می نامند. برای یک عدد a و یک عدد صحیح مثبت n داریم.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ times}}.$$

همچنین

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ times}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ times}} \cdot \underbrace{b\cdot b\cdot b\cdots b}_{n \text{ times}} = a^n b^n,$$

یعنی $(ab)^n = a^n * b^n$ همچنین $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} * \frac{a}{b} * \cdots * \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}$ و $a^m a^n = a^{m+n}$ زیرا

$$a^m a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m \text{ times}} \cdot \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ times}} = a^{m+n}.$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

موقتا، اگر فرض کنیم $m > n$ باشد ، پس داریم.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m \text{ times}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ times}}} = \underbrace{a \cdot a \cdots \cdot a}_{m-n \text{ times}} = a^{m-n}$$

زیرا a ها در مخرج با n تای a ها در صورت حذف می شوند ، در نتیجه $m - n$ در صورت می ماند. همچنین $(a^n)^m = a^{mn}$ زیرا

$$(a^n)^m = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ times}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ times}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ times}}}^{m \text{ groups of } a\text{'s}} = a^{nm}.$$

خلاصه گفته های بالا یعنی **قوانین اساسی توان ها** را در امر مسلم زیر ملاحظه می کنید.

امر مسلم ۱۱.۱.۱ قوانین اساسی توان ها Basic Laws of Exponents

$a^1 = a$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^m a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{mn}$

تا کنون فرض کرده ایم که n یک عدد صحیح مثبت است ، زیرا در $a^n = a * a \cdots a$ اگر n یک عدد منفی و یا یک عدد کسری باشد ، انوقت نمی توانیم a را ، یک عدد منفی‌مرتبه ، یا کسری مرتبه در خودش ضرب کنیم . اما راهی وجود دارد تا این قوانین را بفهمیم ، هنگامی که n صفر یا منفی یا کسری باشد.

$$a^0 = a^{۱-۱} = \frac{a^۱}{a^۱} = ۱ \text{ ، به شرطی که } a \neq 0$$

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{۱}{a^n}$$

توجه : 0^0 تعریف شده نیست زیرا $0^0 = 0^{۱-۱} = \frac{0^۱}{0^۱} = \frac{0}{0}$ و می دانیم که $\frac{0}{0}$ تعریف شده نیست. اما می توانیم a^n را هنگامی که n صفر باشد و $a \neq 0$ یا اگر n منفی باشد پیدا کنیم . مانند $۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$ می توان گفت ، ۲ را در خودش ۳− مرتبه ضرب کرده ایم. همچنین $a^{-۱} = \frac{۱}{a}$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا   www.riazisara.ir

در مورد توان کسری چه می توان گفت؟ مثلا $a^{m/n}$ یا $a^{1/n}$
اگر می گوییم $(a^n)^m = a^{nm}$ است ، پس

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a.$$

به عبارت دیگر، $a^{1/n}$ یک عدد است که ، اگر به توان n برسد , نتیجه a است. این یعنی

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{مثلا} \quad ۱۶^{1/۴} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲ \ \text{و} \ ۲^{1/۲} = \sqrt{۲}$$

همچنین $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{\frac{1}{n}*m} = a^{m/n}$

گفته های بالا را خلاصه می کنیم.

امر مسلم ۱۱.۱.۲

قوانین توان های صفر ، منفی و کسری Laws of Zero, Negative and Rational Exponents

$$a^0 = 1 \quad (\text{if } a \neq 0) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۱.۱.۱ اگر قواعد داخل مستطیل های بالا بدانیم ، می توانیم بسیاری از عبارت ها را بدون استفاده از ماشین حساب ، محاسبه کنیم. فرض کنید داشته باشیم $۱۶^{-۱.۵}$ این عدد چیست ؟ می توان مطابق زیر تخمین زد.

$$16^{-1.5} = 16^{-3/2} = \frac{1}{16^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{16}^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

و یا

$$8^{-1.5} = 8^{-3/2} = \frac{1}{8^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{8}^3} = \frac{1}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2^3\sqrt{2}^3} = \frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

همچنین

$$(-8)^{5/3} = \sqrt[3]{-8}^{\,5} = (-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32.$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۱

حاصل توان های زیر را بدون استفاده از ماشین حساب ، بدست آورید و سپس با پاسخ ماشین حساب مقایسه کنید.

۱) $۲۵^{۱/۲}$

۲) $\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱/۲}$

۳) $(-۲۷)^{۱/۳}$

۴) $(-۲۷)^{۴/۳}$

۵) $۲^{-۲}$

۶) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}$

۷) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}$

۸) $\left(\sqrt{۲}\right)^{۶}$

۹) $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{-۴}$

۱۰) $\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳/۲}\right)^{۲}$

۱۱) $\left(\left(\sqrt{۲}\right)^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۱

حاصل توان های زیر را بدون استفاده از ماشین حساب ، بدست آورید و سپس با پاسخ ماشین حساب مقایسه کنید.

۱) $۲۵^{۱/۲}$

پاسخ

$$25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

۲) $\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱/۲}$

پاسخ

$$\frac{1}{4}^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

۳) $(-۲۷)^{۱/۳}$

پاسخ

$$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

۴) $(-۲۷)^{۴/۳}$

پاسخ

$$(-27)^{4/3} = \sqrt[3]{-27}^4 = (-3)^4 = 81$$

۵) $۲^{-۲}$

پاسخ

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

۶) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}$

پاسخ

$$\frac{1}{2}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

۷) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}$

پاسخ

$$\frac{1}{2}^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۸) $\left(\sqrt{۲}\right)^{۶}$

پاسخ

$$\sqrt{2}^6 = \left(\sqrt{2}^2\right)^3 = 2^3 = 8$$

۹) $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{-۴}$

پاسخ

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$$

۱۰) $\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳/۲}\right)^{۲}$

پاسخ

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}^3\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}^2\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

۱۱) $\left(\left(\sqrt{۲}\right)^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}}$

پاسخ

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

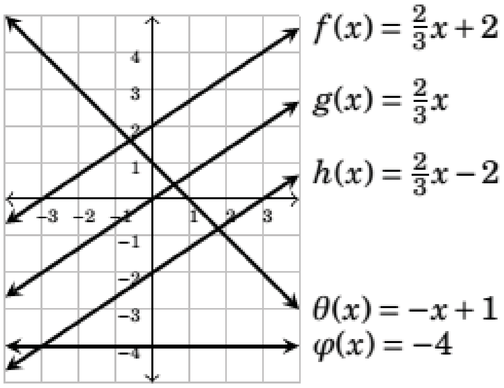
۱۱.۲ - توابع خطی ، توانی و چند جمله ای ها

Linear Functions, Power Functions and Polynomials

بعضی از توابع بقدری اساسی هستند ، که جزئی از کلمات روزمره ریاضیات شده اند. اینجا به شرح مختصری از آنها می پردازیم.

با توابع خطی شروع می کنیم. یک **تابع خطی A Linear Function** یک تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ است به شکل $f(x)=mx+b$, اینجا m و b اعداد ثابت هستند. نمودار این تابع یک خط مستقیم است با شیب m و b محل تلاقی با محور y ۰ تصویر ۱۱.۲.۱

تصویر ۱۱.۲.۱

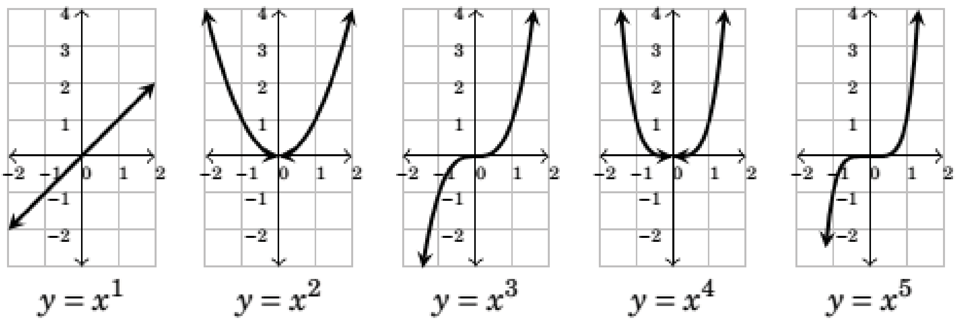


در رابطه $f(x)=mx+b$, ممکن است $m=0$ باشد ، تبدیل می شود به $f(x)=b$ ۰ به این تابع ، می گویند **تابع ثابت Constant Function**

در تابع ثابت ، مقدار ورودی x مهم نیست ، هرقدر که باشد ، خروجی همیشه همان b است. نمودار این تابع ، یک خط افقی است ، با شیب صفر ، که از نقطه b روی محور y عبور می کند. در تصویر بالا ، نمودار $\varphi(x)=-۴$ را ملاحظه می کنید.

یک **تابع توانی A Power Function** تابعی است به شکل $f(x)=x^n$, اینجا توان n یک عدد ثابت است. در تصویر ۱۱.۲.۲ نمودار چند تابع توانی را ملاحظه می کنید. در این نمودار ها n یک عدد صحیح مثبت است.

تصویر ۱۱.۲.۲



به تصاویر خوب دقت کنید ، رابطه هر یک و یا تفاوت آنها را درک کنید. کمی با صرف وقت ، بفهمید چرا ، هر نمودار به این صورت است. ملاحظه می کنید ، هر گاه n زوج باشد ، x^n همیشه مثبت

دانلود از سایت ریاضی سرا   www.riazisara.ir

است. پس نمودار در این موارد ، بالای محور x است. بر عکس، اگر n فرد باشد ، مقدار x^n منفی است هرگاه x منفی است ، پس یک قسمت نمودار، زیر محور x است. در تصاویر بالا دامنه تمام تابع ها ، کلیه اعداد حقیقی است.

البته ، ممکن است توابع توانی $f(x) = x^n$ داشته باشیم ، n عدد صحیح نباشد. مثلا $f(x) = x^{۱/۲}$ و یا $f(x) = \sqrt{x}$ و یا بطور کلی $f(x) = x^{a/b} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a$ ، توجه داشته باشید که اگر a و b اعداد صحیح مثبت باشند ، پس $f(x) = x^{a/b} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a$ بطور دلخواه بزرگ می شود ، هنگامی که x افزایش می یابد. برای هر y مثبت ، $x > \sqrt[a]{y^b}$ یعنی $f(x) > \sqrt[b]{\sqrt[a]{y^b}}^{\,a} = y.$

امر مسلم ۱۱.۲.۳
اگر $n > 0$ باشد ، پس تابع توانی $f(x) = x^n$ بطرف ∞ می رود ، هنگامی که x به طرف ∞ می رود.

یک **تابع چند جمله ای A Polynomial Function** عبارت است از مجموع چند x با توان های اعداد صحیح با یک جمله ثابت که می تواند صفر باشد. پس

$$f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + \pi\, x + ۲$$

یک تابع چند جمله ای است با عدد ثابت ۲ و $g(x) = ۵x^۲ + ۳x - ۱$ یک تابع چند جمله ای است با عدد ثابت ۱−

درجه Degree یک چند جمله ای ، بزرگ ترین توان x است. پس درجه $f(x)$ چهار است و درجه $g(x)$ دو است. یک تابع خطی ، مانند $h(x) = ۳x + ۷$ یک چند جمله ای است با درجه یک. تابع ثابت $f(x) = b$ یک چند جمله ای با درجه صفر است. زیرا می توان نوشت $b = bx^0$ به شرطی که $x \neq 0$ باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

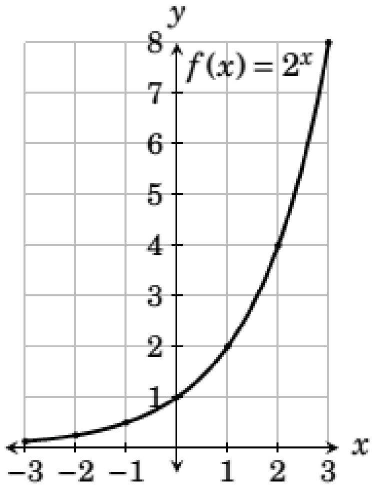
۱۱.۳ - توابع نمایی Exponential Functions

اگر در تابع توانی $f(x) = x^{۲}$ جای x و ۲ را با هم عوض کنیم ، تابع جدید $f(x) = ۲^{x}$ بدست می آوریم. تابعی مانند این ، یک عدد ثابت به توان یک متغیر ، **تابع نمایی** Exponential Function نامیده می شود.

یک **تابع نمایی** به صورت $f(x) = a^x$ است. a یک عدد ثابت مثبت است که **پایه** تابع نمایی نامیده می شود. مانند $f(x) = ۲^{x}$ و $f(x) = ۳^{x}$ و $f(x) = \frac{۱}{x}^{x}$. اگر $a = ۱$ باشد ، پس تابع خطی $f(x) = ۱^{x} = ۱$ بدست می آوریم. پس توافق می کنیم که پایه تابع نمایی هرگز ۱ نباشد.

اجازه دهید ، نمودار تابع نمایی $f(x) = ۲^{x}$ را رسم کنیم. تصویر ۱۱.۳.۱

تصویر ۱۱.۳.۱



ملاحظه می کنید که $f(x) = ۲^{x}$ برای هر مقدار x مثبت است ، اما هنگامی که x به سمت منفی حرکت می کند ، $f(x)$ به صفر نزدیک تر می شود. اما $۲^{x} > 0$ است برای هر مقدار از x, لذا نمودار هرگز محور x را لمس نمی کند ، یعنی هرگز به محور x نمی رسد. جدول ۱۱.۳.۱ چند مقادیر $f(x)$ را نشان می دهد.

جدول ۱۳.۳.۱

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

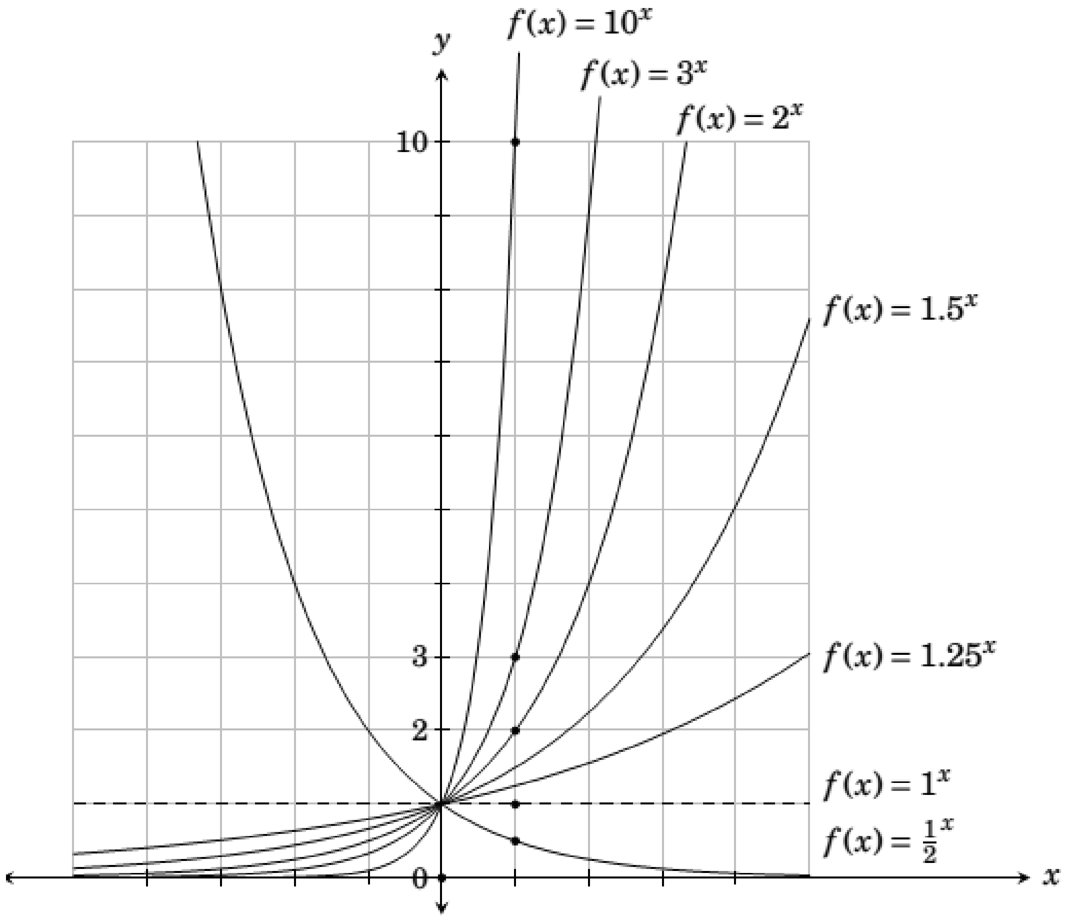
برای کار کردن با توابع نمایی ، باید مطالب بخش ۱۱.۱ را خوب بخاطر داشته باشید و در آنها مهارت پیدا کنید. مثلا باید بخاطر بیاورید که اگر $f(x) = ۲^{x}$ باشد ، پس $f(-۳) = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^{۳}} = \frac{۱}{۸}$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

و $\sqrt{۱}\,۲ = \sqrt{۲}\sqrt{۲}\sqrt{۲} = \left(\sqrt{۲}\right)^{۳} = ۲^{۳/۲} = f\left(\frac{۳}{۲}\right)$

نمودارچند تابع نمایی در تصویر ۱۱.۳.۲ ملاحظه می کنید. این نمودار ها دقیقا نشان می دهند که دامنه توابع نمایی ، $\mathbb{R}$ است. برد این توابع $(0,\infty)$ است. محل تلاقی توابع نمایی با محور y, یک است.

تصویر ۱۱.۳.۲



توجه داشته باشید که اگر پایه یک تابع نمایی کوچک تر از ۱ باشد ، مانند $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ پس نمودار نزول می کند ، هنگامی که x افزایش پیدا می کند. اگر شک دارید ، یک جدول برای این تابع بنویسید و آنرا رسم کنید. اما ، اگر پایه a از ۱ بزرگ تر باشد ، پس $f(x) = a^x$ خیلی سریع رشد می کند ، هنگامی که x بزرگ تر می شود.

امر مسلم ۱۱.۳.۱
اگر $a > ۱$ باشد ، تابع نمایی $f(x) = a^x$ به طرف ∞ افزایش می یابد ، هنگامی که x به طرف ∞ می رود.

در بخش بعد ، وارون های توابع نمایی را که لگاریتم ها نامیده می شوند ، مورد بر رسی قرار می دهیم.

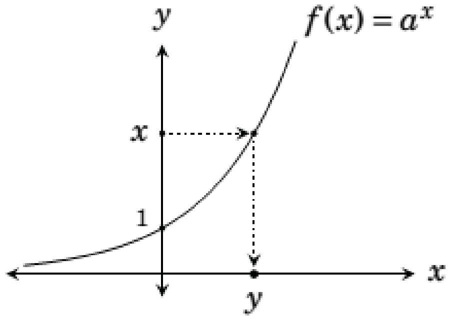
www.riazisara.ir		دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۴ - توابع لگاریتمی Logarithmic Functions

در بخش ۸.۵ در مورد تابع های وارون صحبت کردیم. حالا در مورد وارون های توابع نمایی بحث می کنیم. این وارون ها را **توابع لگاریتمی Logarithmic Functions** می نامند. یا فقط می گوییم **لگاریتم ها Logarithms**

یک تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، که آنرا به عنوان $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ مد نظر قرار می دهیم ، دو به دو است و لذا وارون دارد. همان طور که در تصویر ۱۱.۴.۱ ملاحظه می کنید ، این وارون ، هر عدد x را به عدد y می فرستد ، بطوری که $f(y) = x$ است ، یعنی $a^y = x$

تصویر ۱۱.۴.۱



به عبارت دیگر ،

$$f^{-۱}(x) = y \text{ ، بطوری که } a^y = x$$

با توجه به رابطه بالا ، به نظر می رسد که نام بهتر $f^{-۱}$ می تواند a باشد ، پس داریم.

$$a \quad (x) = y, \quad \text{بطوری که} \quad a^y = x$$

به عبارت دیگر (x) a عدد y است که داخل جعبه قرار می گیرد بطوری که $a^y = x$ است. پس نماد a را بجای $f^{-۱}$ یعنی وارون $f(x) = a^x$ بکار می بریم.

مثلا ، وارون $f(x) = ۲^x$ یک تابع است بنام ۲ بطوری که

$$۲ \quad (x) = y، \quad \text{بطوری که } ۲^y = x$$

مثلا (۸) ۲ را در نظر بگیرید. ۳ را داخل جعبه قرار می دهیم ، پس داریم $۸ = ۲^۳$ است. پس $۳ = (۸)$ ۲ است. به همین سیاق داریم.

$$۲ \quad (۱۶) = ۴ \quad \text{زیرا} \quad ۲^۴ = ۱۶$$

$$۲ \quad (۴) = ۲ \quad \text{زیرا} \quad ۲^۲ = ۴$$

$$۲ \quad (۲) = ۱ \quad \text{زیرا} \quad ۲^۱ = ۲$$

$$۲ \quad \left(\frac{۱}{۲}\right) = -۱ \quad \text{زیرا} \quad ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

به همین ترتیب ، وارون $f(x) = ۱۰^x$ یک تابع است بنام ۱۰ است و

$$۱۰\quad (x) = y \quad \text{،} \quad \text{بطوری که} \quad ۱۰^y = x$$

لذا داریم.

$$۱۰\quad (۱۰۰۰) = ۳ \quad \text{زیرا} \quad ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$$

$$۱۰\quad (۱۰) = ۱ \quad \text{زیرا} \quad ۱۰^۱ = ۱۰$$

$$۱۰\quad \left(\frac{۱}{۱۰}\right) = -۱ \quad \text{زیرا} \quad ۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}$$

بجز این کتاب ، تمام کتب ریاضی نماد $\log_a$ را بجای a بکار می برند و آنرا **لگاریتم در پایه a** می نامند.

تعریف ۱۱.۴.۱
برای $a > 0$ و $a \neq ۱$, **لگاریتم در پایه a** تابع زیر است.

$$\log_a(x) = a \quad (x) = y \quad \text{بطوری که} \quad a^y = x$$

تابع $\log_a$ خوانده می شود **لگاریتم در پایه a**. این تابع ، وارون $f(x) = a^x$ است.

مثال ۱۱.۴.۱

$\log_5(125) = 5^{\square}(125) = 3$	$\log_2(8) = 2^{\square}(8) = 3$
$\log_5(25) = 5^{\square}(25) = 2$	$\log_2(4) = 2^{\square}(4) = 2$
$\log_5(5) = 5^{\square}(5) = 1$	$\log_2(2) = 2^{\square}(2) = 1$
$\log_5(1) = 5^{\square}(1) = 0$	$\log_2(1) = 2^{\square}(1) = 0$

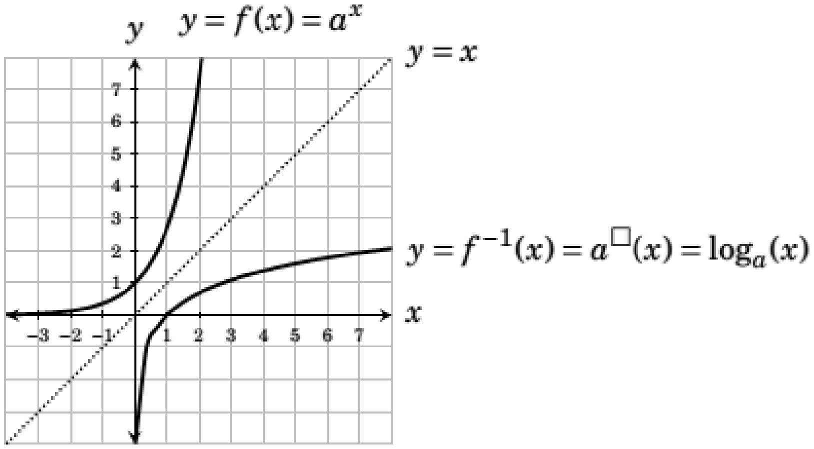
تکرار می کنیم $\log_a$ و a دو نام مختلف برای یک تابع است. ما هم مطابق قرار داد $\log_a$ را بکار می بریم.

درک و فهم نمودار های توابع لگاریتمی ، مهم است. بر اساس آنچه در جبر خوانده اید ، بخاطر بیاورید که نمودار $f^{-۱}(x)$ عبارت است انعکاس نمودار $f(x)$ بر روی خط $y = x$. چون $\log_a$ وارون $f(x) = a^x$ است ، پس نمودار آن عبارت است از انعکاس نمودار $y = a^x$ بر روی خط $y = x$. همانطور که در تصویر ۱۱.۴.۲ ملاحظه می کنید.

بخاطر داشته باشید که دامنه $\log_a$ تمام اعداد مثبت $(0, \infty)$ است ، زیرا این همان **برد** a^x است. به همین طریق **برد** $\log_a$ دامنه a^x است ، یعنی $\mathbb{R}$. همچنین، چون $\log_a(۱) = 0$ است ، پس محل تلاقی $y = \log_a x$ با محور x, یک است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تصویر ۱۱.۴.۲



لگاریتم پایه ۱۰ بقدری متداول است و مکررا بکار برده می شود ، که آنرا **لگاریتم معمولی** می نامند و در عمل پایه لگاریتم را حذف می کنند. پس $\log x$ همان $\log_{۱۰} x$ است. در ماشین های حساب هم روی یکی از کلید ها کلمه log نوشته شده است ، که منظور لگاریتم پایه ۱۰ است.

تعریف ۱۱.۴.۲

لگاریتم معمولی Common Logarithm که با نماد log مشخص میشود ، تابع زیر است.

$$\log(x) = \log_{10}(x) = 10^{\square}(x).$$

لگاریتم ها خواص مهمی دارند ، که در ذیل تعدادی از آنها را مرور می کنیم.
برای هر x واضح است که

$$\log_a(a^x) = x \qquad (۱)$$

زیرا می دانیم که $f^{-۱}\big(f(x)\big) = x$ است ، حال اگر $f(x) = a^x$ باشد ، می دانیم لگاریتم ، وارون $f(x) = a^x$ است. پس

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = f^{-۱}(a^x) = \log_a(a^x) = x$$

همچنین

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad (۲)$$

زیرا $f\left(f^{-۱}(x)\right) = x$ است.

همچنین

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad (۳)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad (۴)$$

$$\log_a(۱) = 0 \qquad (۵)$$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\log_a\left(\frac{۱}{y}\right) = -\log_a(y) \quad (۶)$$

قوانین لگاریتم Logarithm Laws

$\log_a(a^x) = x$	$\log_a(1) = 0$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a(x^y) = y\log_a(x)$
$a^{\log_a(x)} = x$	$\log_a(a) = 1$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$

با استفاده از قوانین لگاریتم ، بعضی از عبارت های لگاریتمی را می توان ساده کرد.

مثال ۱۱.۴.۲
عبارت زیر را ساده کنید.

$$\log_۲(۲۸x) - \log_۲(۷x)$$

پاسخ

$$\log_۲(۲۸x) - \log_۲(۷x) = \log_۲\left(\frac{۲۸x}{۷x}\right) = \log_۲(۴) = ۲$$

بر اساس قوانین بالا ، می توانیم معادله های لگاریتمی را هم حل کنیم.

مثال ۱۱.۴.۳
معادله $۲^x = ۵^{x+۷}$ را حل کنید. به عبارت دیگر ، می خواهیم مقدار x را پیدا کنیم ، بطوری که این معادله بر قرار باشد. چون x به عنوان توان در این معادله بکار رفته ، لگاریتم پایه ۱۰ هر دو طرف را می گیریم. و با استفاده از قوانین لگاریتم ، آنرا ساده می کنیم. پس داریم.

$$\begin{aligned}
\log(5^{x+7}) &= \log(2^x) \\
(x+7)\cdot\log(5) &= x\cdot\log(2) \\
x\log(5) + 7\log(5) &= x\log(2) \\
x\log(5) - x\log(2) &= -7\log(5) \\
x(\log(5) - \log(2)) &= -7\log(5) \\
x &= \frac{-7\log(5)}{\log(5)-\log(2)} \approx -12.2952955815
\end{aligned}$$

www.riazisara.ir   دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۱.۴.۴
فرض کنید a مثبت باشد. معادله $a^y = x$ را برای y حل کنید.
پاسخ
متغیر y یک توان است ، پس لگاریتم طرفین را می گیریم و ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} \log\left(a^y\right) &= \log(x) \\ y\log(a) &= \log(x) \\ y &= \frac{\log(x)}{\log(a)} \end{aligned}$$

پس ، مقدار y بر حسب x و a عدد $\frac{\log(x)}{\log(a)}$. است،

مثال ۱۱.۴.۴ را می توانستیم سریع حل کنیم ، اگر $\log_a$ بکار می بردیم.

مثال ۱۱.۴.۵
فرض کنید a مثبت باشد. معادله $a^y = x$ را برای y حل کنید.
پاسخ
از طرفین $\log_a$ می گیریم.

$$\log_a(a^y) = \log_a(x)$$
$$y = \log_a(x)$$

مثال های ۱۱.۴.۴ و ۱۱.۴.۵ می گویند ریشه $a^y = x$ می تواند یا $\frac{\log(x)}{\log(a)}$ و یا $\log_a(x)$ باشد.
اما، پاسخ اول ممکن است ترجیح داده شود ، زیرا ماشین حساب شما کلید $\boxed{\log_a}$ ، ندارد.
این دو راه حل ، موضوع مهمی را نشان می دهد ، و آن این است که
$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

اصل مسلم ۱۱.۴.۱
فرمول تغییر پایه

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

فرمول تغییر پایه می گوید $\log_a(x)$ را می توان بر حسب لگاریتم پایه ۱۰ نوشت ، بدون توجه به پایه a

مثال ۱۱.۴.۶

$$\log_2(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)} \approx \frac{1.698970}{0.301029}:$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

تمرینات ۱۱.۴

پاسخ لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۱) $\log_{۳}(۸۱) =$

۲) $\log_{۳}\left(\sqrt{۳}\right) =$

۳) $\log_{۳}(۱) =$

۴) $\log\left(\sqrt[۳]{۱۰}\right) =$

۵) $\log\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right) =$

۶) $\log_{۴}(۴) =$

۷) $\log_{۴}\left(\sqrt{۲}\right) =$

۸) $\log_{۴}(۸) =$

ساده کنید.

۹) $۱۰^{\log(۵x+۱)}$

۱۰) $\log(۲) + \log(۵)$

۱۱) $\log_{۲}(۲) - \log_{۲}(۵x) + \log_{۲}(۲۰x)$

به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱۲) $\log_{۲}(\sin(x)) + \frac{۱}{۲}\log_{۲}(۴x) - ۳\log_{۲}(۳)$

۱۳) $\log(۲x) + \log(۵x)$

۱۴) $\log_{۲}\left((x+۵)^{۴}x^{۷}\sqrt{x+۱}\right)$

۱۵) $\log_{۳}\left(\frac{۳}{۵\sqrt[۳]{x}}\right)$

با استفاده از تغییر پایه ، لگاریتم ها را بر حسب log بنویسید.

۱۶) $\log_{۳}(۵)$

۱۷) $\log_{۵}(۵)$

۱۸) $\log_{۹}(۱۰)$

۱۹) $\log_{۲}(۳۳)$

۲۰) $\log_{۳}(۹)$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۴

پاسخ لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۱) $\log_{۳}(۸۱) = ۴$

۲) $\log_{۳}\left(\sqrt{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$

۳) $\log_{۳}(۱) = 0$

۴) $\log\left(\sqrt[۳]{۱۰}\right) = \frac{۱}{۳}$

۵) $\log\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right) = -۲$

۶) $\log_{۴}(۴) = ۱$

۷) $\log_{۴}\left(\sqrt{۲}\right) = \log_{۴}\left(۲^{۱/۲}\right) = \frac{۱}{۲}\log_{۴}(۲) = \frac{۱}{۴}$

۸) $\log_{۴}(۸) = \log_{۴}\left(۲^{۳}\right) = ۳\log_{۴}(۲) = ۳ * \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$

ساده کنید.

۹) $۱۰^{\log(۵x+۱)} = ۵x + ۱$

۱۰) $\log(۲) + \log(۵) = \log(۲ * ۵) = \log(۱۰) = ۱$

۱۱) $\log_{۲}(۲) - \log_{۲}(۵x) + \log_{۲}(۲۰x) = \log_{۲}\left(\frac{۲}{۵x}\right) + \log_{۲}(۲۰x)$

$$= \log_{۲}\left(\frac{۴۰x}{۵x}\right) = \log_{۲}(۸) = ۳$$

به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱۲) $\log_{۲}(\sin(x)) + \frac{۱}{۲}\log_{۲}(۴x) - ۳\log_{۲}(۳)$

$$= \log_{۲}(\sin(x)) + \log_{۲}\left((۴x)^{۱/۲}\right) - \log_{۲}\left(۳^{۳}\right)$$

$$= \log_{۲}\left(\sin(x) + \log_{۲}(۲\sqrt{x})\right) - \log_{۲}(۲۷) = \log_{۲}\left(\frac{۲\sqrt{x}\sin(x)}{۲۷}\right)$$

۱۳) $\log(۲x) + \log(۵x) = \log(۲x * ۵x) = \log\left(۱۰x^{۲}\right)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$= \log(۱۰) + \log\left(x^{۲}\right) = ۱ + ۲\log(x)$$

۱۴) $\log_{۲}\left(\left(x+۵\right)^{۴}x^{۷}\sqrt{x+۱}\right) = \log_{۲}\left(x+۵\right)^{۴} + \log_{۲}\left(x^{۷}\right) + \log_{۲}\left(\sqrt{x+۱}\right)$

$$= ۴\log_{۲}(x+۵) + ۷\log_{۲}(x) + \log_{۲}\left(\left(x+۱\right)^{۱/۲}\right)$$

$$= ۴\log_{۲}(x+۵) + ۷\log_{۲}(x) + \frac{۱}{۲}\log_{۲}(x+۱)$$

۱۵) $\log_{۳}\left(\frac{۳}{۵\sqrt[۳]{x}}\right) = \log_{۳}(۳) - \log_{۳}\left(۵\sqrt[۳]{x}\right) = ۱ - \log_{۳}(۵) - \log_{۳}\left(x^{۱/۳}\right)$

$$= ۱ - \log_{۳}(۵) - \frac{۱}{۳}\log_{۳}(x)$$

با استفاده از تغییر پایه ، لگاریتم ها را بر حسب log بنویسید.

۱۶) $\log_{۳}(۵) = \frac{\log(۵)}{\log(3)} \approx 1.4649$

۱۷) $\log_{۵}(۵) = \frac{\log(۵)}{\log(۵)} = ۱$

۱۸) $\log_{۹}(۱۰) = \frac{\log(۱۰)}{\log(۹)} \approx 1.0479$

۱۹) $\log_{۲}(۳۳) = \frac{\log(۳۳)}{\log(۲)} \approx 5.04438$

۲۰) $\log_{۳}(۹) = \frac{\log(۹)}{\log(۳)} = ۲$

www.riazisara.ir   دانلود از سایت ریاضی سرا