فصل

۶ احتمال

درس اوّل — قانون احتمال کل

درس دوم — توزیع احتمال

درس اوّل

قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفاهیمی از احتمال آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱ــ **پدیده تصادفی** : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ **فضای نمونه‌ای** : مجموعهٔ تمام نتایج ممکنِ یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ **پیشامد تصادفی** : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ **پیشامدها و اعمال روی آنها** : فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد** :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B** :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۷ــ **پیشامدهای ناسازگار** : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ $A\cap B=\varnothing$ در این صورت داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۸ــ **تعمیم پیشامدهای ناسازگار** : پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

۹ــ **احتمال شرطی** : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن‌را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq 0)$$

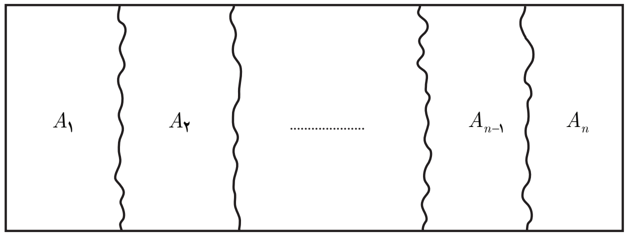
۱۰ــ دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

قانون احتمال کل

فرض کنیم A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم :

$$1)\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \quad (\bigcup_{i=1}^{n} Ai = S)$$

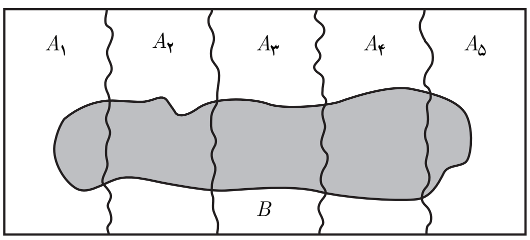
$$2)\ A_1 \cap A_2 = \varnothing\ ,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-1} \cap A_n = \varnothing\ (Ai \cap Aj = \varnothing\ ,\ \underset{i \neq j}{1 \leq i, j \leq n})$$



مثال : اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{1\}$ باشند، در این صورت A , B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال : اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n دو به دو ناسازگارند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ‌کدام از پیشامدهای A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1 , A_2 , A_3 , A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم :

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگارند. چرا؟

بنابراین داریم :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^{5} P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم :

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B \mid A_i)$$

و بنابراین رابطهٔ پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_۱$, $A_۲$, ... و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، داریم :

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

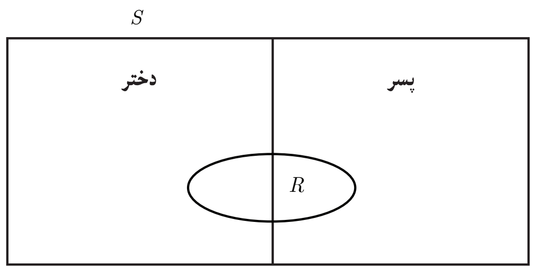
مثال : اگر احتمال به‌دنیا آمدن یک نوزاد پسرِ مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۸ و همین احتمال برای یک نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای که قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

قبل از اینکه مسئلهٔ فوق را حل کنیم فرض کنید که بدانید یکی از اعداد زیر جواب مسئلهٔ فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟ برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید غلط‌اند دلیل بیاورید.

۱   ۰/۰۹   ۰/۰۸   ۰/۰۵۵   ۰/۰۳   ۰/۰۱   ۰

حل :

از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{۸}{۱۰۰}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{۳}{۱۰۰}$ است و احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد نیز $\frac{۱}{۲}$ است.



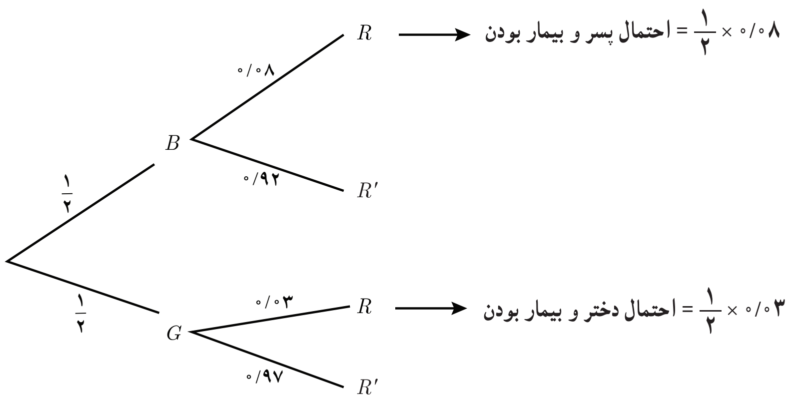
بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

P (بیمار بودن) = P (پسر بودن) P (بیمار بودن|پسر بودن) + P (دختر بودن) P (بیمار بودن|دختر بودن)

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R)=P(B)P(R\mid B)+P(G)P(R\mid G)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰۰}$$

برای حل مثال قبل می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر که حل مثال قبل را نشان می‌دهد دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه شده را با توجه به راه‌حل ارائه شده در مثال شرح دهید.



$\Longrightarrow$ احتمال بیمار بودن = $\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۸+\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۳$

مثال : ۴ ظرف داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد و ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ موردنظر قرمز باشد چقدر است؟

حل : پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به‌ترتیب با $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ و $A_۴$ و پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم :

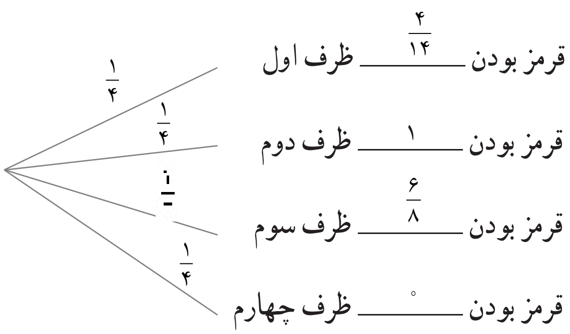
$$P(A_۱)=P(A_۲)=P(A_۳)=P(A_۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B|A_۱)=\frac{۴}{۱۴} \qquad P(B|A_۲)=۱ \qquad P(B|A_۳)=\frac{۶}{۸} \qquad P(B|A_۴)=۰$$

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)+P(A_۴)P(B|A_۴)=$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}+\frac{۱}{۴}\times۱+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times۰=\frac{۶۵}{۱۱۲}$$

با نمودار درختی به صورت زیر می‌توان مسئله را حل کرد :

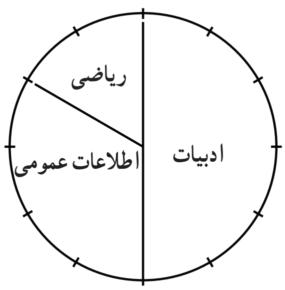


احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد $\frac{۱}{۴}\times۱$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد $\frac{۱}{۴}\times۰$



مثال : سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربهٔ چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل : اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به‌ترتیب با $A_۱$, $A_۲$ و $A_۳$ و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}=\frac{۵}{۶}$$

مثال : دو ظرف داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل : مهرهٔ انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به‌ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهرهٔ سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت : $P(B)=\frac{۴}{۱۰}$ و $P(G)=\frac{۶}{۱۰}$ و $P(A|G)=\frac{۶}{۱۳}$ (چرا؟) و $P(A|B)=\frac{۸}{۱۳}$ (چرا؟). در این صورت داریم :

$$P(A)=P(G)P(A|G)+P(B)P(A|B)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۳}=\frac{۶۸}{۱۳۰}$$

تمرین‌ها

۱ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد بزرگسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

۳ در یک جامعه ۵ درصد مردان و ۴ درصد زن‌ها به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. از طرفی مردان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۷ و زنان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۶ بهبود می‌یابند. اگر بخواهیم فردی از این جامعه انتخاب کنیم، با چه احتمالی فرد مورد نظر به بیماری مذکور مبتلا گشته و بهبود یافته است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟