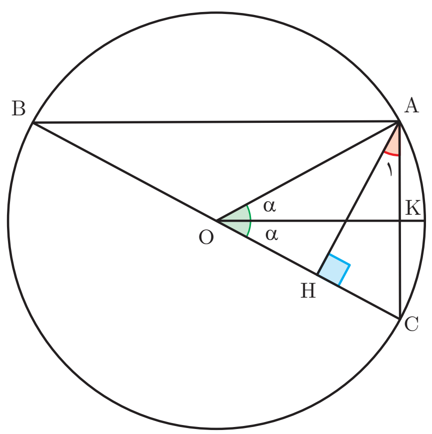
نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برای برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. مثلاً می‌دانیم که $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. حال اگر $\cos ۱۵^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos ۳۰^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح ۱۵ نصف ۳۰ است. آیا با نصف مقدار $\cos ۳۰^\circ$ می‌توان $\cos ۱۵^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی کماکان می‌شود مقدار $\cos ۱۵^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos ۳۰^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر ۲α داده شده که روبه‌رو به وتر AC می‌باشد. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = ۲AK = ۲\sin\alpha \qquad (۱)$$

همچنین $\overset{\frown}{AC} = ۲\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\overset{\frown}{AC}$ می‌باشد، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = ۹۰^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\hat{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$O\hat{A}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + \alpha + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\hat{H}C$ داریم:

$$A\hat{H}C : \hat{H} + \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + \hat{A}_۱ + ۹۰^\circ - \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\hat{A}C$ و $A\hat{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}C : AH = \sin ۲\alpha \\ A\hat{H}C : \cos\hat{A}_۱ = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(۱)} AH = ۲\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\hat{A}H$ داریم: $OH = \cos ۲\alpha$ و در $A\hat{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_۱ = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(۲\sin\alpha) = ۲\sin^۲\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = ۱$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = ۱ \Rightarrow OH = ۱ - HC \Rightarrow \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$$

مثال. مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

حل. می‌دانیم که $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

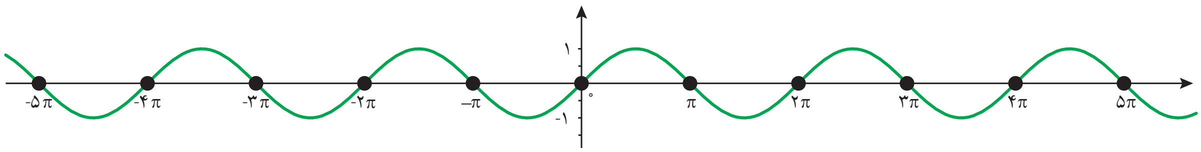
$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

از طرفی داریم :

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} = 2\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})}$$

معادلات مثلثاتی

تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است را در نظر بگیرید.

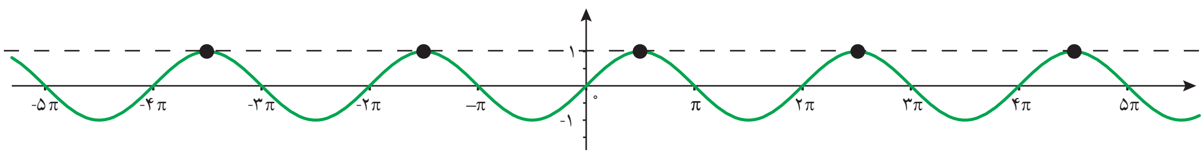


همان‌طور که در نمودار پیداست، ریشه‌های این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت :

$$x=\ldots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots$$

می‌باشند محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محورxها) و تابع $y=\sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که سینوس آنها برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله فوق به‌صورت

$$x=\cdots,\frac{\pi}{2}-4\pi,\frac{\pi}{2}-2\pi,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\ldots$$

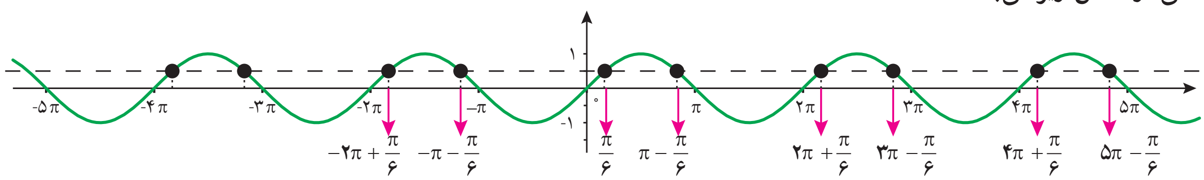
می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ که k یک عدد صحیح است قابل نمایش هستند.

اکنون معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید. انجام مراحل زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

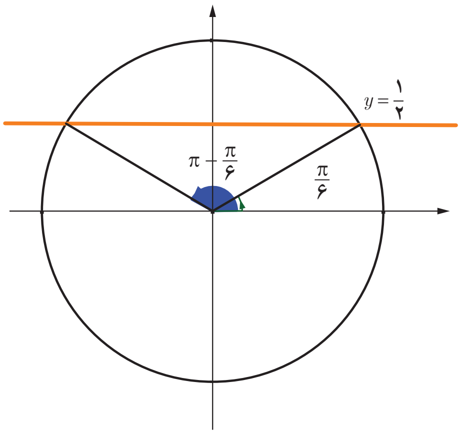
۱) با آزمون و خطا و یادآوری نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که قبلاً فراگرفته‌اید چند زاویه که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است را حدس بزنید و با جایگذاری در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ درستی حدس خود را بررسی کنید.

۲) خط $y = \frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری که حدس زده‌اید را روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟



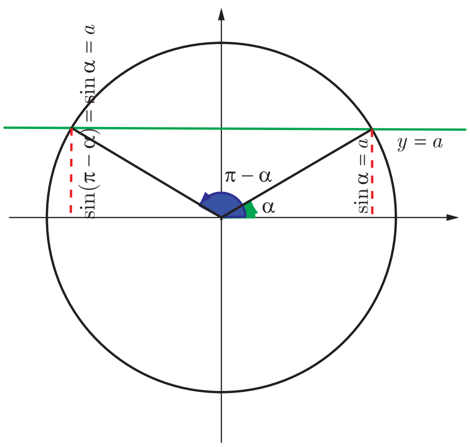
۳) طول نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴) در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط $y = \frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi - \frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: ...... , ... , $-۲\pi + \frac{\pi}{۶}$, $\frac{\pi}{۶}$, ... , $۲\pi + \frac{\pi}{۶}$, ...

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{۶}$: ...... , ... , $-\pi - \frac{\pi}{۶}$, ... , $۳\pi - \frac{\pi}{۶}$, ...



همواره برای عدد حقیقی $-۱ \leq a \leq ۱$ که $\sin x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است :

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \qquad x = (۲k+۱)\pi - \alpha$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

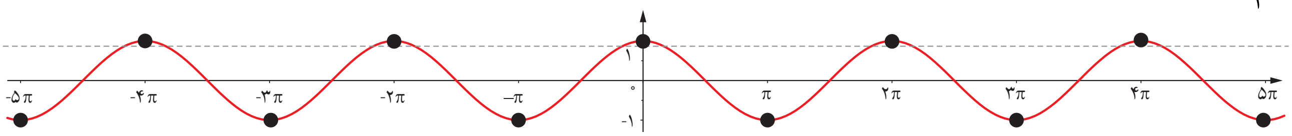
کار در کلاس

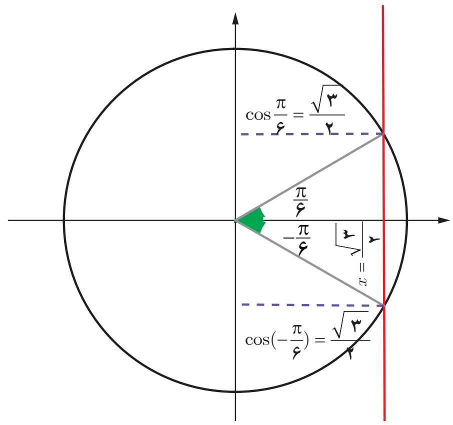
۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-۱=۰$

ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

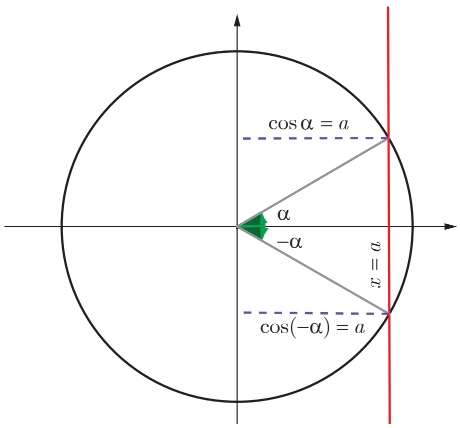
۲ نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.





الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.



برای هر عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ معادله $\cos x=a$ برقرار است زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$. بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین کمان‌های x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad , \quad x=۲k\pi-\alpha$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال۱ـــ جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳}=-۱$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند.

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق داریم :

k	x	عضویت در بازه
$k=۰$	$x=۲\times۰\times\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۰\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۱$	$x=۲\times۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۱$	$x=۲\times-۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۲$	$x=۲\times۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۲\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۲$	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$

می‌توان نشان داد که جواب‌هایی از معادله فوق که به ازای مقادیر دیگری از k تولید می‌شوند خارج بازه داده شده می‌باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-۲\pi-\frac{\pi}{۳},-۲\pi+\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال ۲ـــ معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k \\ 2x = (2k\pi + 1)\pi - 3x \Rightarrow x = \dfrac{2k+1}{5}\pi \end{cases}$$

مثال ۳ـــ معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

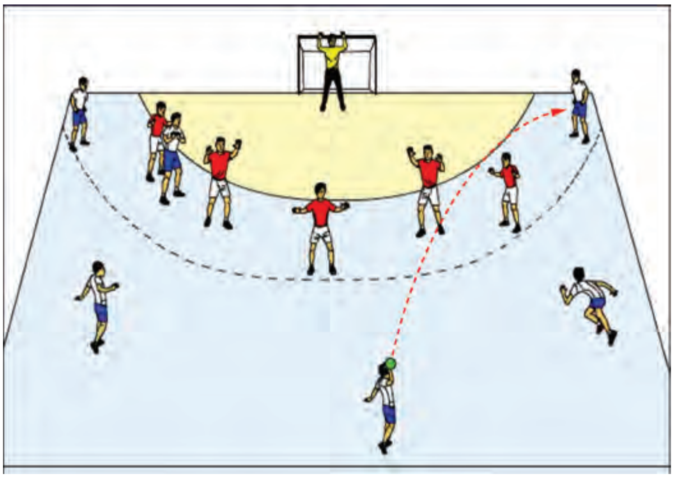
$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 3x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} \\ 3x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)}{3}\pi - \dfrac{\pi}{12} \end{cases}$$

مثال ۴ـــ یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $12\ km/h$ برای هم‌تیمی خود که در ۲۰ متری او قرار گرفته پرتاب می‌کند (به‌شکل نگاه کنید). اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2}{32}\sin 2\theta$$



مثال ۵ـــ جواب‌های معادله $\sin x\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ را به‌دست آورید.

$$2\sin x\cos x = 2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)}{2} - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۶ــ معادله $\cos(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t=\cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^۲-۹t-۵=۰$ نوشت. جواب‌های این معادله به‌صورت $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ به‌دست می‌آیند. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=۵$ و $\cos x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x - ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$ ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

پ) $\cos x = \cos ۲x$ ت) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

ث) $۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$ ج) $\sin x - \cos ۲x = ۰$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟