درس سوم

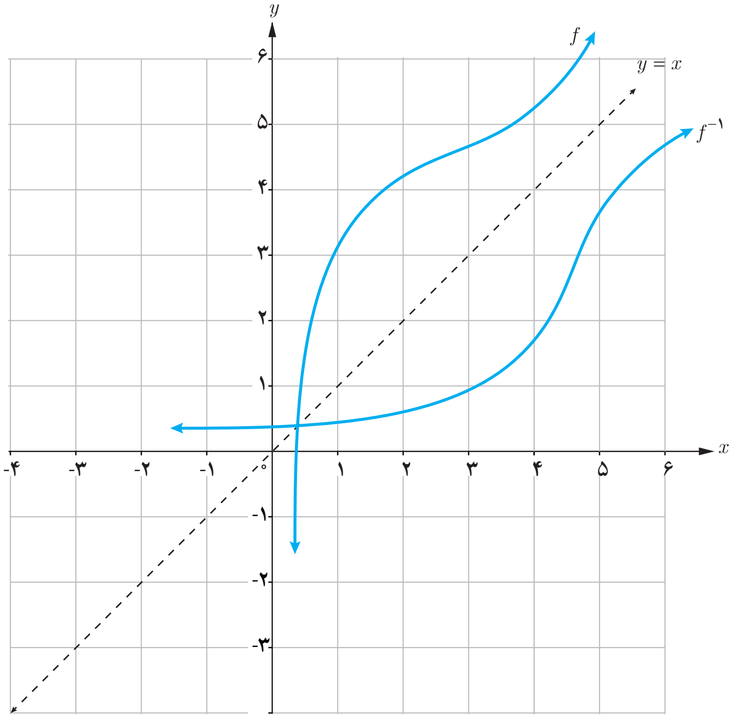
# وارون تابع

## یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ ملاحظه کردید با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک $f$، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع $f$ است که آن را با $f^{-1}$ نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a , b)$ روی نمودار تابع $f$ قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b , a)$ روی نمودار تابع $f^{-1}$ قرار دارد:

$$(a , b) \in f \Rightarrow (b , a) \in f^{-1}$$

بنابراین نمودار تابع $f$ و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.




**مثال:**

اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1} = \{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(۴) = f\left(f^{-1}(۴)\right) = f(۱) = ۴ \\ (fof^{-1})(۳) = f\left(f^{-1}(۳)\right) = f(۲) = ۳ \\ (fof^{-1})(۵) = f\left(f^{-1}(۵)\right) = f(۳) = ۵ \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f^{-1}$ داریم:

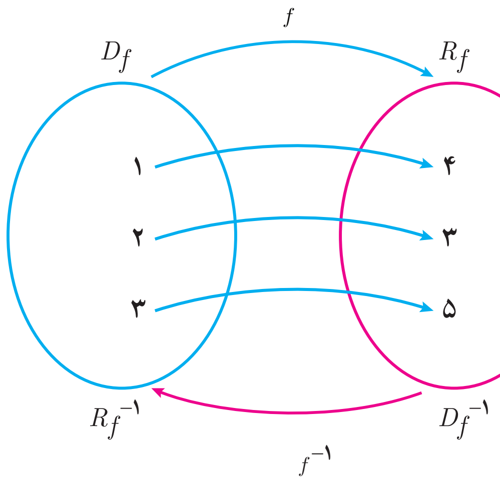
$$(fof^{-1})(x) = x$$

**همچنین :**

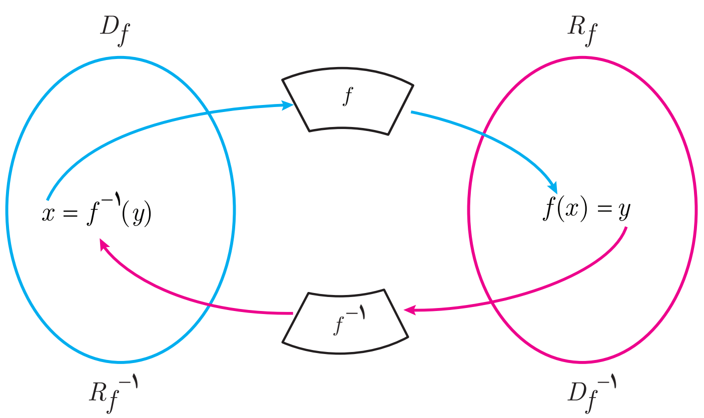
$$\begin{cases}(f^{-1}of)(1)=f^{-1}\big(f(1)\big)=f^{-1}(4)=1\\(f^{-1}of)(2)=f^{-1}\big(f(2)\big)=f^{-1}(3)=2\\(f^{-1}of)(3)=f^{-1}\big(f(3)\big)=f^{-1}(5)=3\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f$ داریم :

$$(f^{-1}of)(x)=x$$




به‌طور کلی اگر $f$ تابعی یک‌به‌یک باشد و $f^{-1}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط $f$ و $f^{-1}$ را نشان می‌دهد.




اگر $f$ تابعی وارون‌پذیر و $f^{-1}$ وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f\big(f^{-1}(x)\big)=x:x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=x:x\in D_f$$

برعکس اگر دو تابع در دو تساوی فوق صدق کنند، آنگاه یک‌به‌یک هستند و وارون یکدیگرند.

**مثال :** نشان دهید توابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

$$f(x)=۳x-۴$$

$$g(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع $f$ و $g$ برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=۳g(x)-۴=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=x$$

**همچنین :**

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)+۴}{۳}=\frac{۳x-۴+۴}{۳}=x$$

بنابراین دو تابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند $f$، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان $x$ را برحسب $y$ محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل $y$ به $x$، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

**مثال :** اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع $f$ و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.

تابع $f$ یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

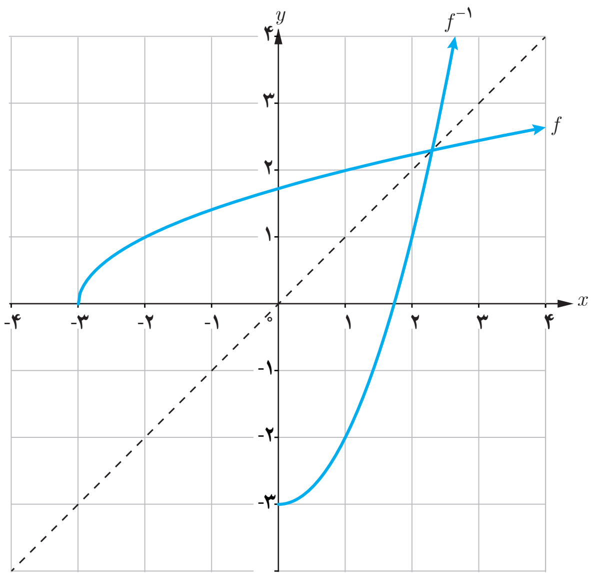
$$\begin{cases} R_f=[۰,+\infty) \\ D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_f=[-۳,+\infty) \\ R_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty) \end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+۳}$$

$$y^۲=x+۳$$

$$x=y^۲-۳$$

$$f^{-۱}(x)=x^۲-۳$$




۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ ۲، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$، $\sqrt[۳]{x}$ است.

**کار در کلاس**

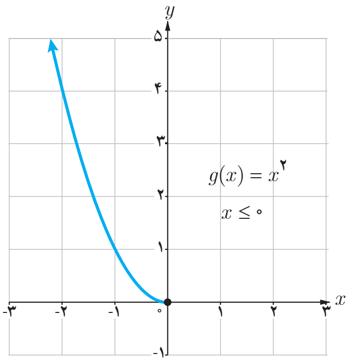
ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

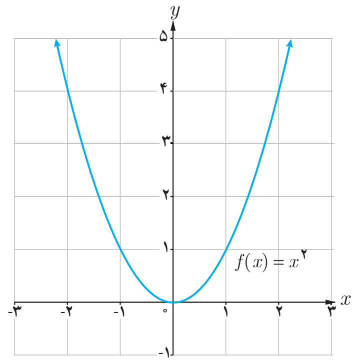
الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

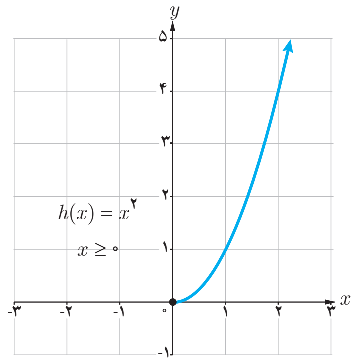
ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

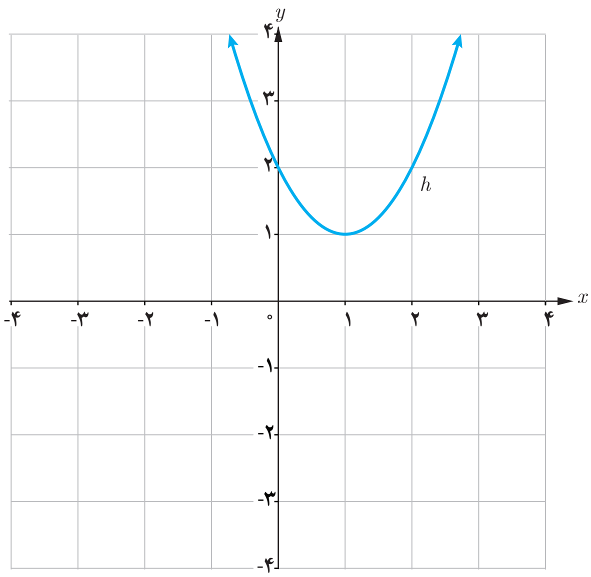
از سال قبل می‌دانید که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.




**مثال:** نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.




$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنهٔ تابع $f$ را به بازهٔ $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع $h$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع $k$ بازهٔ $[1, +\infty)$ است.

در تابع $k$، $x$ را برحسب $y$ به‌دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

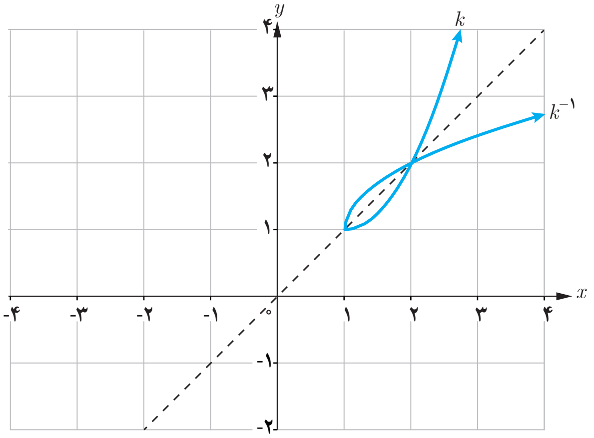
$$(x-1)^2 = y - 1$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{y-1}$$ جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

$$x = \sqrt{y-1} + 1$$

$$k(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

نمودار $k$ و $k^{-1}$ به‌صورت زیر است :




**مثال :** اگر $f=\left\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\right\}$ و $g=\left\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\right\}$ توابع زیر را به‌دست آورید :

الف) $f^{-۱}=\left\{(-۱,۰),(\frac{۱}{۲},۲),(\sqrt{۲},-۳),(۵,۱)\right\}$

ب) $g^{-۱}=\left\{(-۳,-۱),(۲,۵),(۰,\frac{۱}{۲}),(۶,۴)\right\}$

پ) $(fog)^{-۱}$

$$fog:\begin{cases}(fog)(-۱)=f\left(g(-۱)\right)=f(-۳)=\sqrt{۲}\\(fog)(۵)=f\left(g(۵)\right)=f(۲)=\frac{۱}{۲}\\(fog)(\frac{۱}{۲})=f\left(g(\frac{۱}{۲})\right)=f(۰)=-۱\\(fog)(۴)=f\left(g(۴)\right)=f(۶)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$fog=\left\{\left(-۱,\sqrt{۲}\right),\left(۵,\frac{۱}{۲}\right),\left(\frac{۱}{۲},-۱\right)\right\}$$

$$(fog)^{-۱}=\left\{\left(\sqrt{۲},-۱\right),\left(\frac{۱}{۲},۵\right),\left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$$

ت) $$g^{-۱}of^{-۱}:\begin{cases}(g^{-۱}of^{-۱})(-۱)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(-۱)\right)=g^{-۱}(۰)=\frac{۱}{۲}\\(g^{-۱}of^{-۱})(\frac{۱}{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\frac{۱}{۲})\right)=g^{-۱}(۲)=۵\\(g^{-۱}of^{-۱})(\sqrt{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\sqrt{۲})\right)=g^{-۱}(-۳)=-۱\\(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right)=g^{-۱}(۱)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\left\{(-۱,\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},۵),(\sqrt{۲},-۱)\right\}$$

همان‌طور که می‌بینید دو تابع $(fog)^{-۱}$ و $g^{-۱}of^{-۱}$ مساوی‌اند.

**کار در کلاس**

اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۲x-۵$، ضابطه توابع زیر را به‌دست آورید.

ب) $f^{-۱}og^{-۱}$

الف) $g^{-۱}of^{-۱}$

ت) $(gof)^{-۱}$

پ) $(fog)^{-۱}$

**کار در کلاس**

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $f$ یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ نیز یک‌به‌یک است.

ب) اگر $f$ تابعی یک‌به‌یک و صعودی باشد، آنگاه $f^{-۱}$ نیز صعودی است.

پ) اگر $g$ تابعی یک‌به‌یک و نزولی باشد، آنگاه $g^{-۱}$ نیز نزولی است.

**تمرین**

۱) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

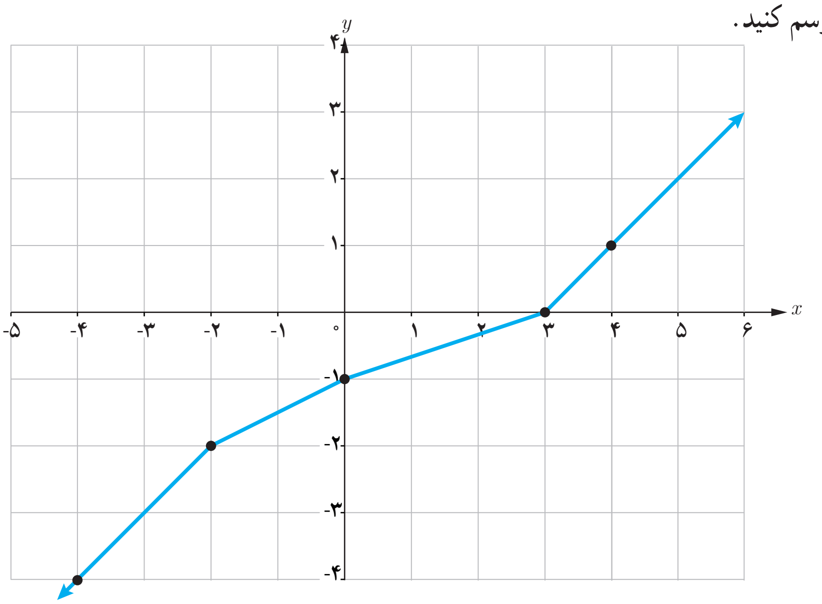
ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۲) در مورد هر کدام از قسمت‌های زیر نشان دهید که $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳$ , $g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$ , $g(x)=۸+x^{۲}\ x\leq ۰$

۳) وارون تابع زیر را رسم کنید.



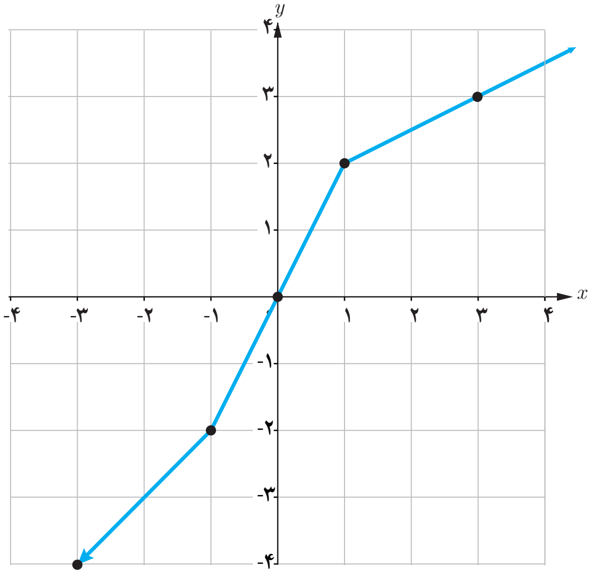
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. حداقل به دو صورت از آنها تابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^۲$

پ) $h(x) = x^۲ + ۴x + ۳$

۵ از نمودار روبه‌رو برای تکمیل جدول استفاده کنید.




| $x$ | $-۴$ | $-۲$ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| $f^{-۱}(x)$ | ... | ... | ... | ... |

آیا با توجه به این جدول می‌توانید نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید؟

۶ اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(f^{-۱} o g^{-۱})(۱)$

ب) $(f^{-۱} o f^{-۱})(۶)$

پ) $(f o g)^{-۱}(۵)$

ت) $(g^{-۱} o f^{-۱})(۵)$