درس دوم

توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

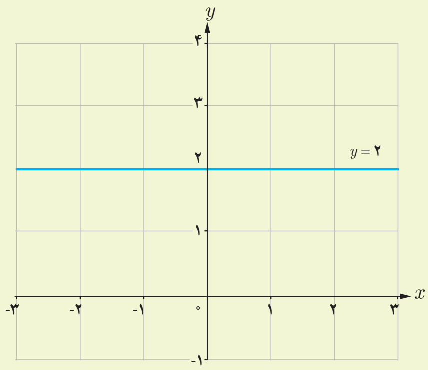
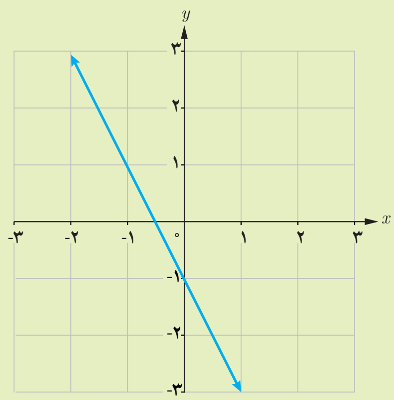
در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چند جمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چند جمله‌ای هستند.

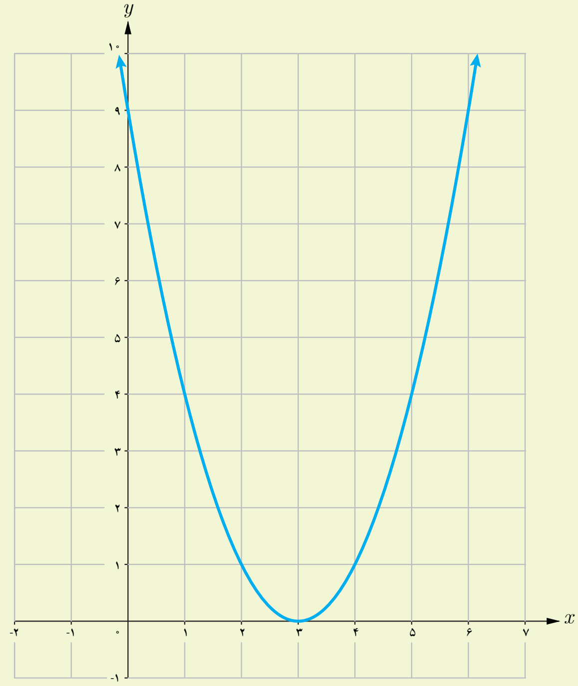
هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n و a_{n-1} و $\cdots$ و a_2 و a_1 و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال : توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای هستند که به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

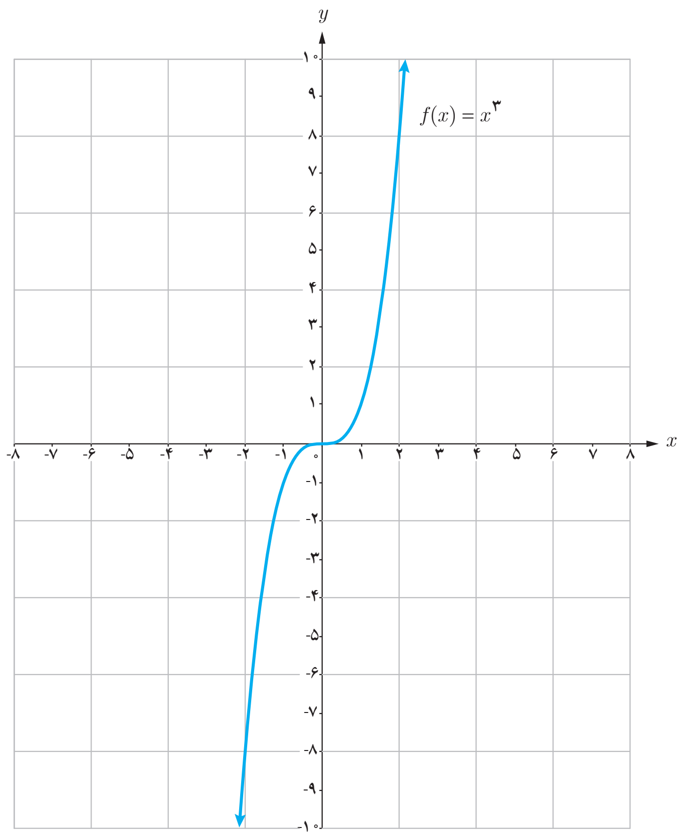
$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌اید به‌صورت زیر است :

مثال		ضابطهٔ کلی	نام تابع	درجهٔ تابع
	$f(x)=2$	$f(x)=a$	ثابت	۰
	$f(x)=-2x-1$	$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$	خطی	۱

	$f(x)=x^2-6x+9$	$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$	درجهٔ ۲	۲

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $(a\neq 0)$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :



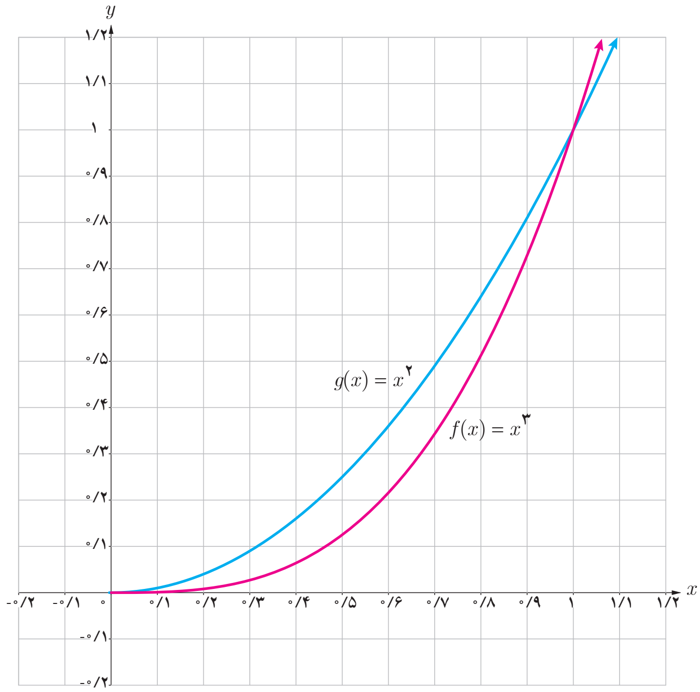
$f(x)=x^3$	x
-8	-2
-1	-1
$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	1
8	2

فعالیت

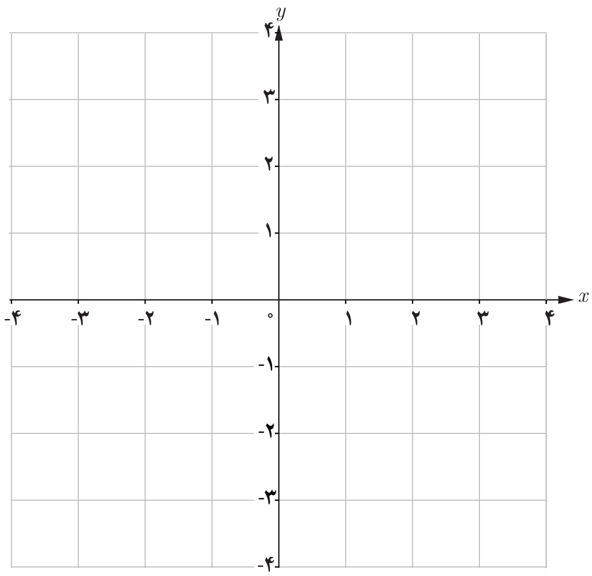
با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار x^3 بالای نمودار x^2 قرار دارد؟

ب) نمودار را برای xهای منفی رسم کنید.



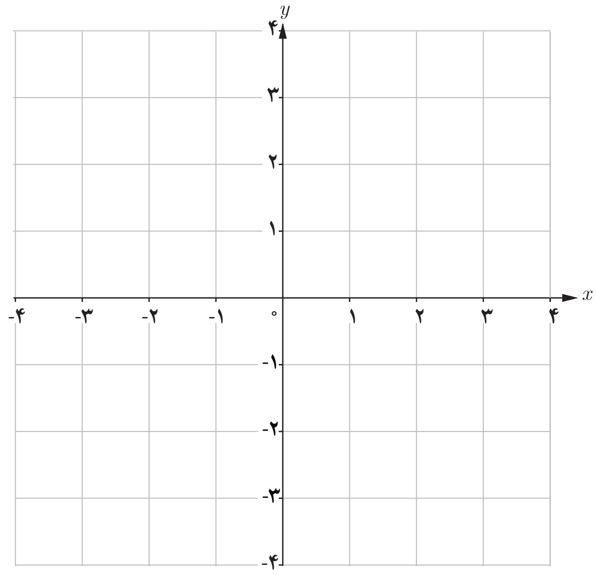
پ) آیا تابع $f(x)=x^3$ یک به یک است؟ اگر جواب مثبت است در دستگاه مختصات زیر $f(x)=x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



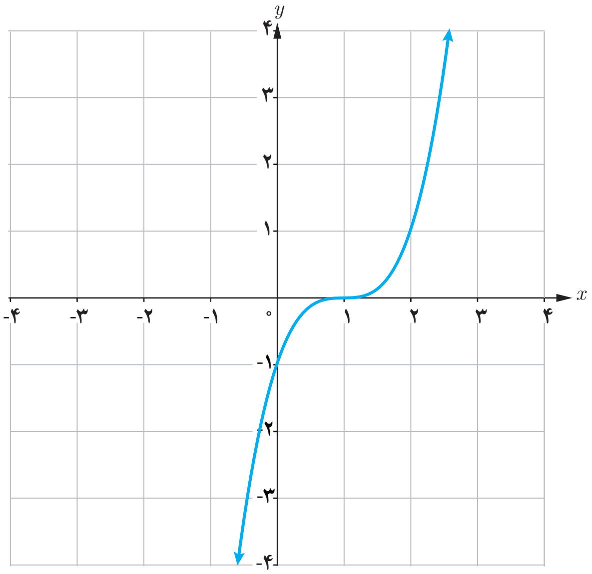
فعالیت

با استفاده از قوانین انتقال نمودار توابع و با کمک نمودار تابع $f(x)=x^3$، نمودار توابع ب و پ را رسم کنید. دامنه و برد توابع را مشخص کنید.

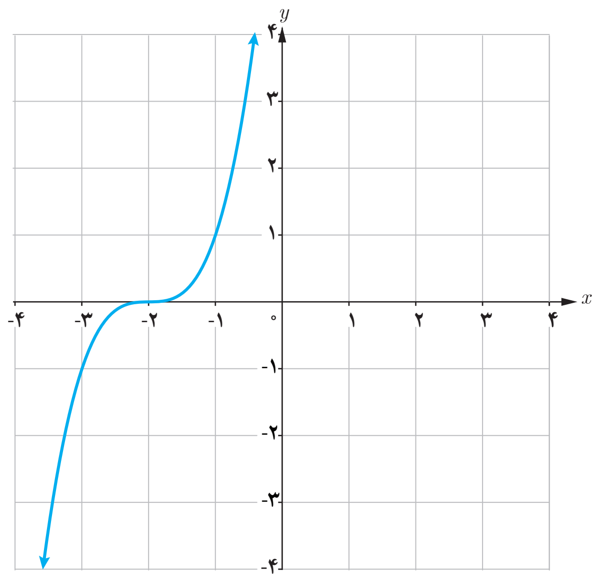
ب) $y=x^3-1$



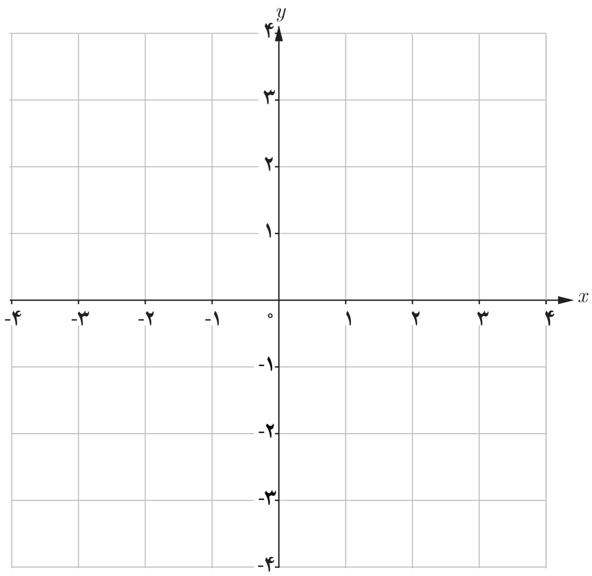
الف) $y=(x-1)^3$



ت) $y=(x+2)^3$



پ) $y=-x^3+2$



کار در کلاس

ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y=(x+1)^3$

ب) $y=x^3-2$

پ) $y=-x^3-1$

ت) $y=x^3+1$

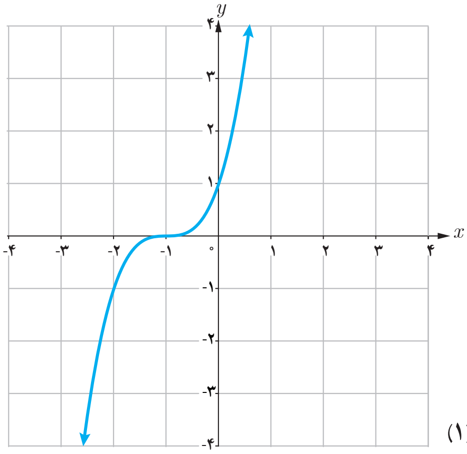
ث) $y=-x^3$

ج) $y=(x-1)^3+2$

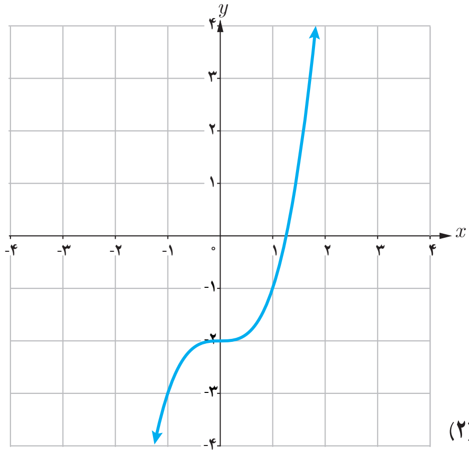
چ) $y=(x+1)^3-1$

ح) $y=-x^3+1$

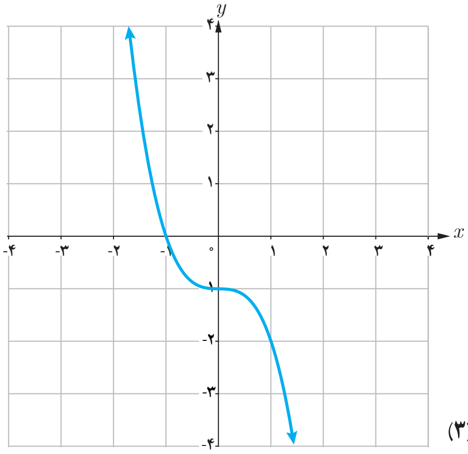
خ) $y=(x-2)^3$



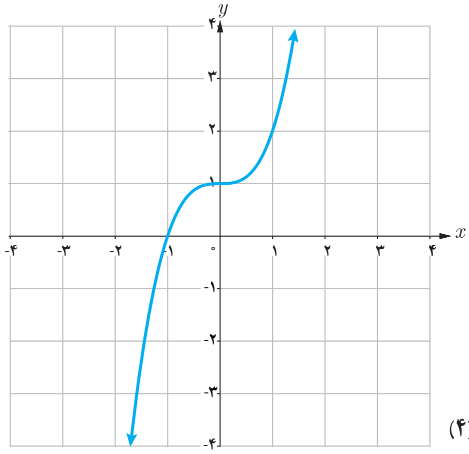
(۱)



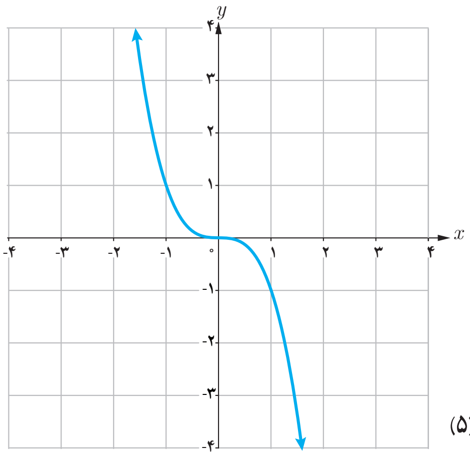
(۲)



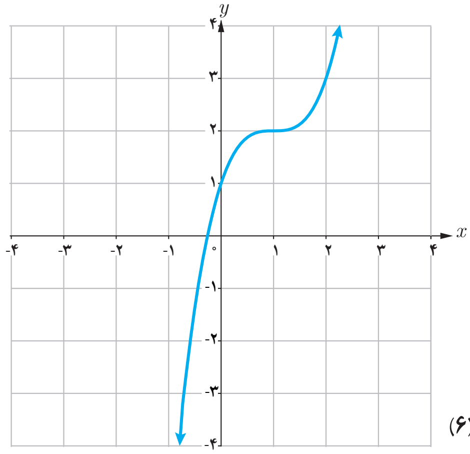
(۳)



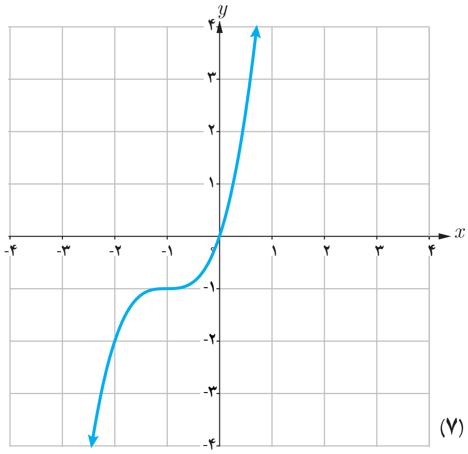
(۴)



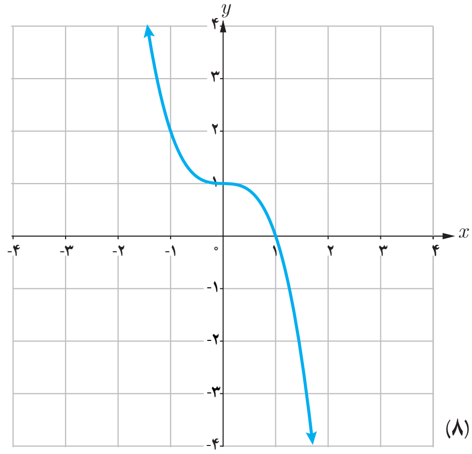
(۵)



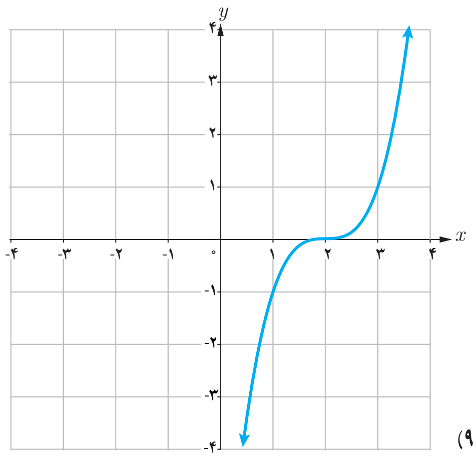
(۶)



(۷)



(۸)



(۹)

در سال‌های گذشته با اتحادهای جبری و تجزیهٔ آنها آشنا شدید. فرم کلی آنها چند جمله‌ای است :

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

فعالیت

آیا می‌توانید مشابه اتحادهای مثال قبل، عوامل چند جمله‌ای x^4-a^4 را نیز به‌دست آورید؟

$$x^4-a^4=(x-a)(\cdots+ax^2+\cdots+a^3)$$

برای پر کردن جاهای خالی می‌توانید از تقسیم چند جمله‌ای x^4-a^4 بر چند جمله‌ای $x-a$ استفاده کنید.

کار در کلاس

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n، چند جمله‌ای زیر را درنظر بگیرید :

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}$$

عبارت $as - s$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

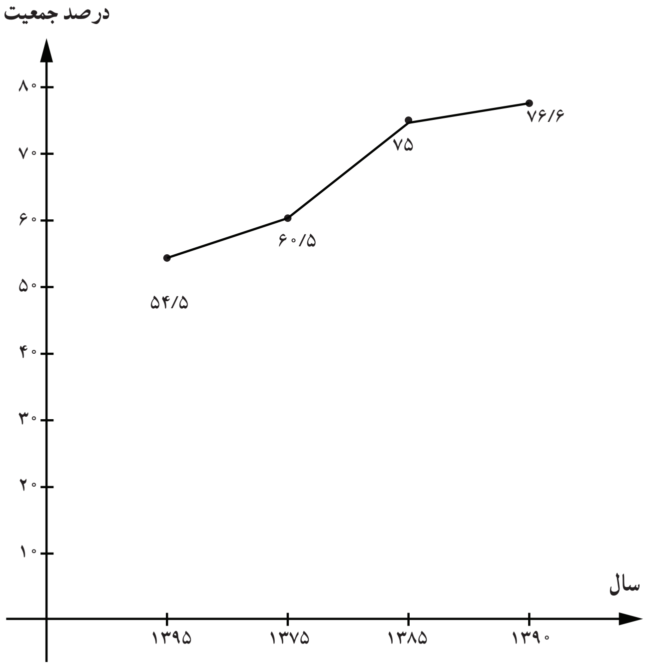
سپس به کمک اتحاد قبل، اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

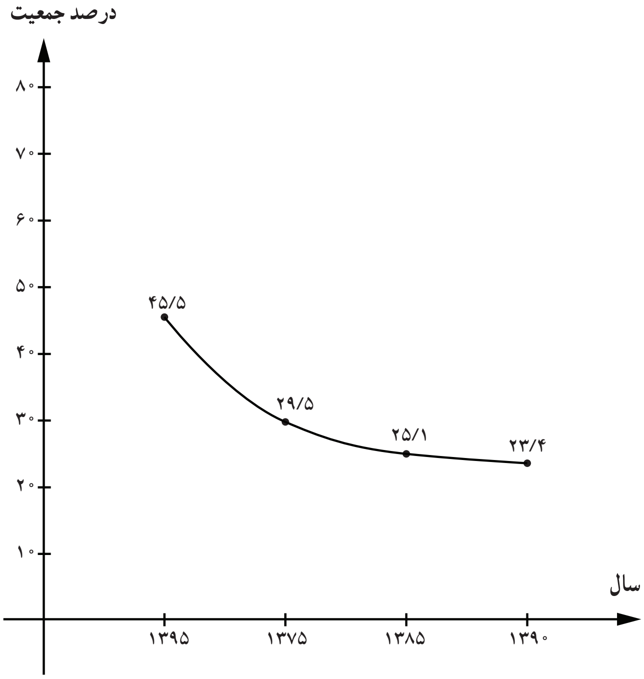
توابع صعودی و نزولی:

فعالیت

یکی از مسائلی که این روزها به‌عنوان یکی از دغدغه‌های مهم و اصلی مطرح می‌شود بحث کاهش قابل توجه رشد جمعیت کشور و پیری جمعیت جامعه ایران در آینده است. روند تغییرات دو گروه سنی در نمودارهای زیر نشان داده شده است.



نمودار جمعیت ۱۵ سال به بالا

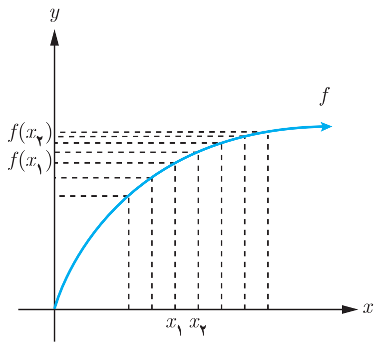


نمودار جمعیت ۱۴ــ۰ سال

همان‌طور که در نمودارهای بالا مشاهده می‌کنید جمعیت ۱۵ سال به بالای کشورمان از سال ۱۳۶۵ به بعد افزایش یافته است. می‌توان گفت جمعیت ۱۵ سال به بالای ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۹۰ روندی صعودی داشته است.

الف) جمعیت ۰ تا ۱۴ سال در ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۷۵ چه روندی داشته است؟
از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟

ب) جمعیت بالای ۱۵ سال کشورمان از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ چه روندی داشته است؟
از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟



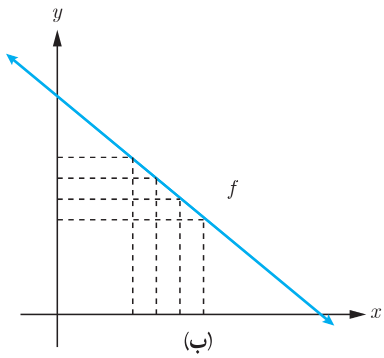
(الف)

به نمودار روبه‌رو دقت کنید :

در نمودار (الف) وقتی مقدار x در دامنهٔ تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد، به این توابع اکیداً صعودی می‌گوییم.

در این نمودار اگر x_1 از x_2 کوچک‌تر باشد، $f(x_1)$ نیز از $f(x_2)$ کوچک‌تر است.

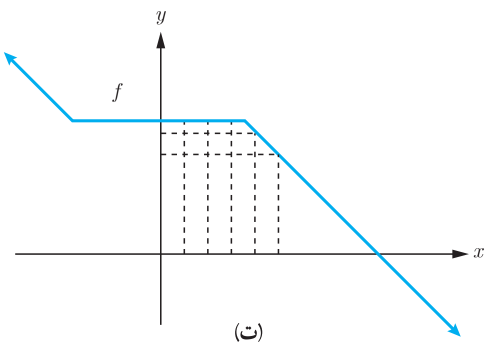
$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



(ب)

در نمودار (ب) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y کاهش می‌یابد. به این توابع اکیداً نزولی می‌گوییم. به بیان دیگر :

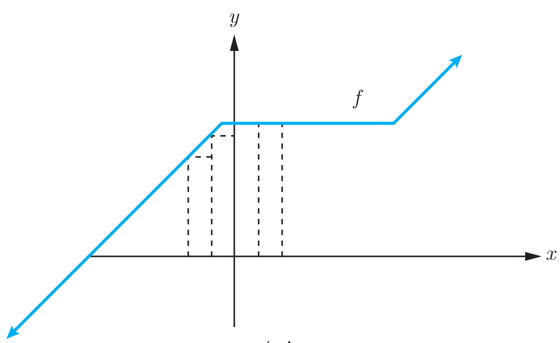
$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



(ت)

در نمودار (ت) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع نزولی می‌گوییم.

$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



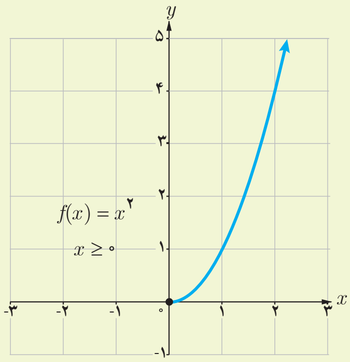
(پ)

در نمودار (پ) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع صعودی می‌گوییم.

$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

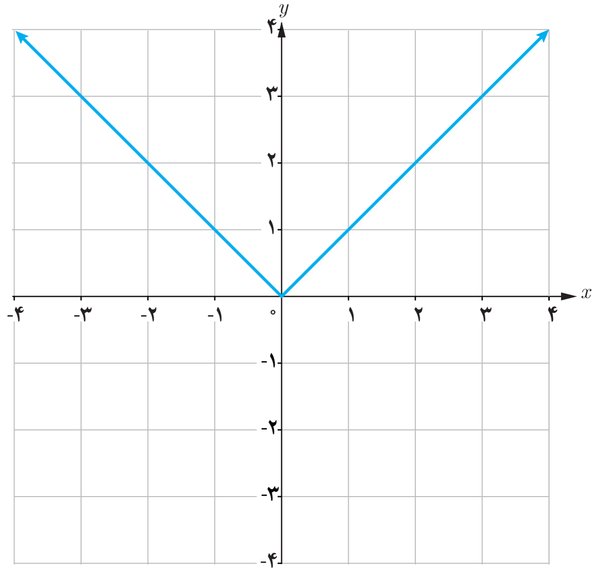
کار در کلاس

در حالت کلی جدول زیر را داریم، جاهای خالی را کامل کنید.

توابع اکیداً صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
توابع اکیداً نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	
توابع صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
توابع نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	

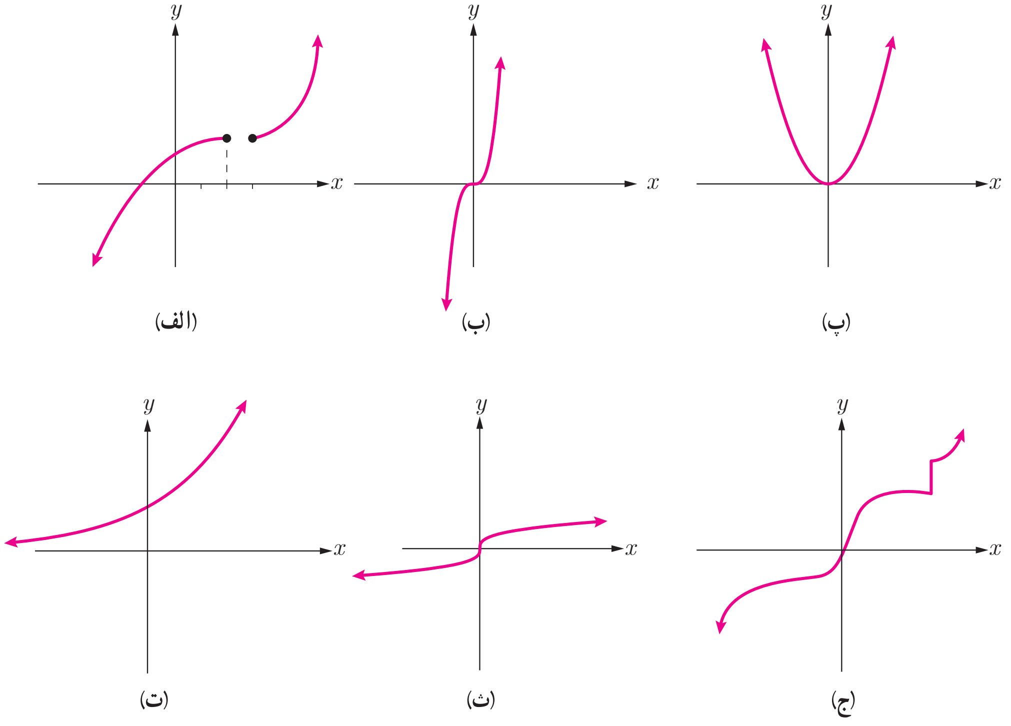
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً) باشد.

مثال : تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.



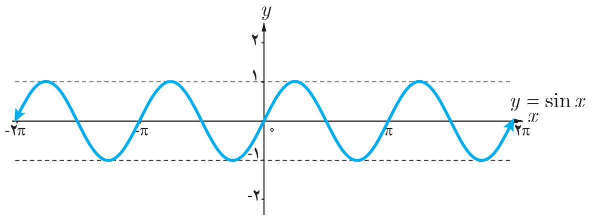
کار در کلاس

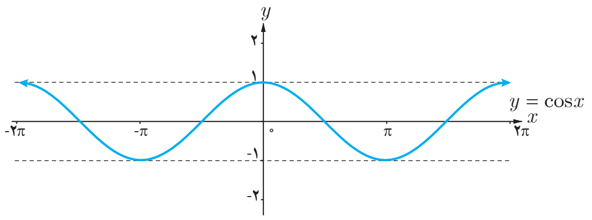
در هر کدام از توابع زیر مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی (اکیداً) و در چه بازه‌هایی نزولی (اکیداً) هستند؟



کار در کلاس

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های جدول‌ها مشخص نمایید.





x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y = \sin x$					صعودی			

x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y = \cos x$							صعودی	

کار در کلاس

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = x^۲$

ب) $g(x) = x + |x|$

پ) $h(x) = \sqrt{x}$

ت) $l(x) = \frac{۱}{x}$

ث) $k(x) = x^۳$

ج) $t(x) = -x^۳$

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

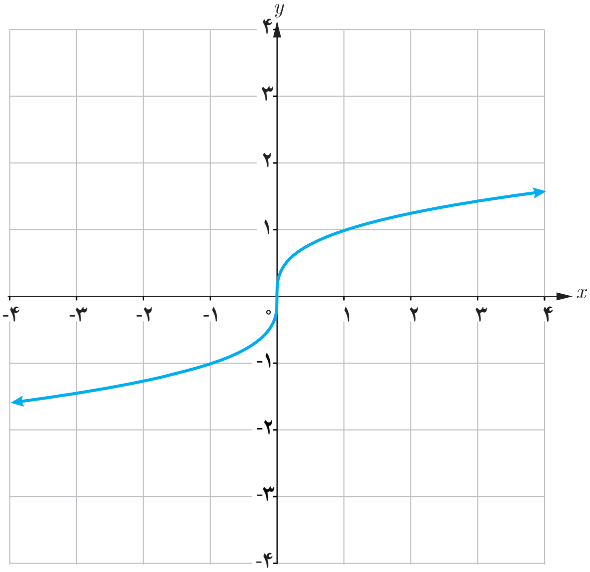
اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نه صعودی باشد نه نزولی، به آن تابع غیر یکنوا گوییم.

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) آیا این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) آیا این تابع یک به یک است؟

پ) آیا می‌توانید تابعی رسم کنید که اکیداً صعودی باشد ولی یک به یک نباشد؟

تمرین

۱ توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

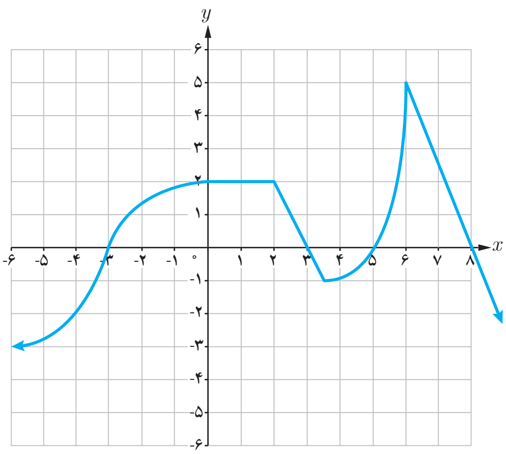
الف) $y=(x-۱)^{۳}-۱$ ب) $y=(x+۲)^{۳}-۲$

۲ عبارت $a^{۵}-b^{۵}$ را تجزیه کنید.

۳ تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

۴ با استفاده از نمودار تابع روبه‌رو مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۵ تابع نمایی $y=۲^{x}-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_{۲}^{x}+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی یا غیر یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۶ تابع $y=x\,|x|$ در چه بازه‌ای صعودی است؟ در چه بازه‌ای نزولی است؟

۷ دو تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی باشند و دو تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشند.

۸ ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیر یکنوا باشد.