درس اوّل

ترکیب توابع

فعالیت

یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون می‌آوریم. تعداد باکتری‌هایی را که در آن با افزایش دما رشد می‌کنند با $N(d)$ نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$N(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰, \quad ۲\leq d\leq ۱۴$$

که در این رابطه، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه است.

الف) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$N(۱۰)=۲۰(۱۰)^۲-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک غذای یخچالی با دمای ۱۰ درجه، ۱۷۰۰ تا است.

$N(۲)=$ ....

....

$N(۳)=$ ....

....

همچنین هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذر زمان افزایش می‌یابد و از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$d(t)=۴t+۲ \quad ; \quad ۰\leq t\leq ۳$$

ب) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(۲)=۱۰$$

دمای غذایی که ۲ ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۰ درجه است.

$d(۱)=$ ....

$d(۳)=$ ....

به‌طور کلی می‌توان گفت در تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا را به‌دست آورد و در تابع N، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد.

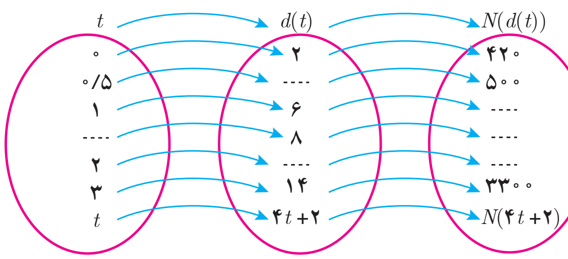
$$\text{زمان} \xrightarrow{d} \text{دما} \xrightarrow{N} \text{تعداد باکتری‌ها}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که دو ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۷۰۰ است.

پ) جدول زیر را کامل کنید :

t	$d(t)=4t+2$	$N(d(t))=N(4t+2)$
0	$d(0)=2$	$N(d(0))=N(2)=420$
$0/5$	$d(0/5)=\cdots$	$N(d(0/5))=N(\cdots)=500$
1	$d(1)=6$	$N(d(1))=N(6)=\cdots$
$\cdots$	$d(\cdots)=8$	$N(d(\cdots))=N(8)=\cdots$
2	$d(2)=\cdots$	$N(d(2))=N(\cdots)=\cdots$
3	$d(3)=14$	$N(d(3))=N(14)=3300$

ت) به کمک جدول قسمت «پ»، جاهای خالی را تکمیل کنید.



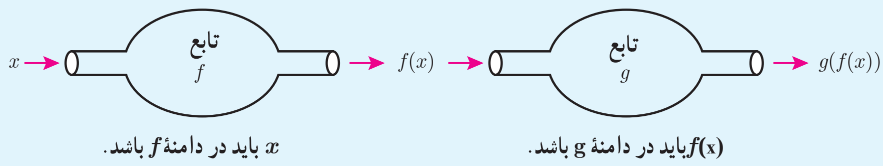
همان‌طور که دیدیم می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را می‌توان مشخص کرد.
آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟
به بیان دیگر تابعی ساخت که N را برحسب t مشخص کند.
برای به‌دست آوردن این تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$N(d(t))=N(4t+2)=20(4t+2)^2-80(4t+2)+500=$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=320t^2+420 \qquad 0\leq t\leq 3$$

$N(d(t))$ تعداد باکتری‌هایی در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

«مراحل ساخت تابع gof»



مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است. مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

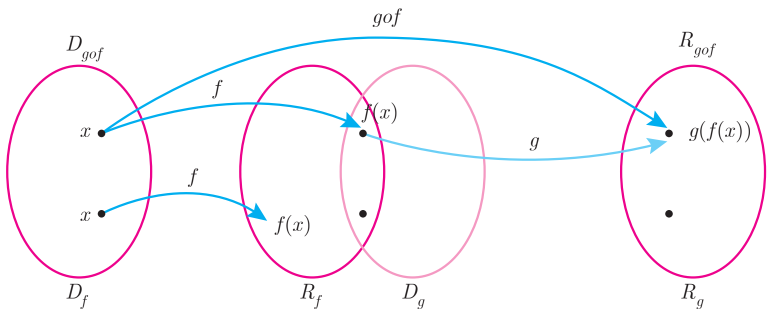
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که اشتراک برد f و دامنهٔ g غیر تهی باشد، تابع $g(f(x))$ را به‌صورت $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم.

دامنهٔ تابع مرکب:

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

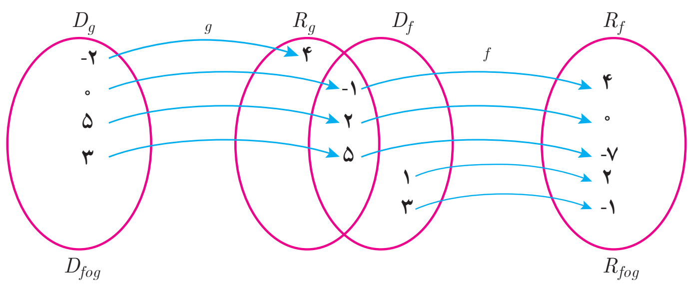


بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in Dg\}$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $g=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵)(-۲,۴)\}$ ، تابع fog را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(۰)=g(f(۰))=f(-۱)=۴\\(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۲)=۰\\(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۵)=-۷\\(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۴)\ \text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\to fog=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	f(x)
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	g(x)
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(۱)=\cdots$

ب) $(fog)(-۱)=\cdots$

پ) $(gof)(۰)=\cdots$

ج) $(gog)(-۲)=\cdots$

ت) $(gof)(۲)=\cdots$

ث) $(fof)(۱)=\cdots$

مثال : اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)-۱=(x-۲)^۲-۱$$

$$D_f=\mathbb{R}\,,D_g=\mathbb{R}\,,D_{gof}=\left\{x\in D_f\,\middle|\,f(x)\in D_g\right\}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x-۲)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ ، $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲f^۲(x)-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

$$D_f=[۱,+\infty),D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f\,\middle|\,f(x)\in D_g,\right\}=\left\{x\in[۱,+\infty)\,\middle|\,\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\right\}=[۱,+\infty)$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\,\middle|\,g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\right\}=$$

$$\left\{\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\geq ۱\right\}=\left\{\mathbb{R}\,\middle|\,x^۲\geq ۱\right\}=(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$$

کار در کلاس

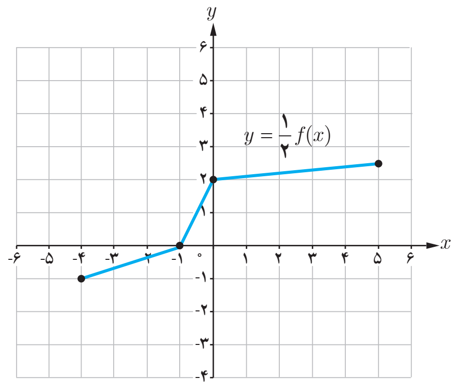
اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱},g(x)=\frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ fog را به‌دست آورید.

«انتقال توابع»

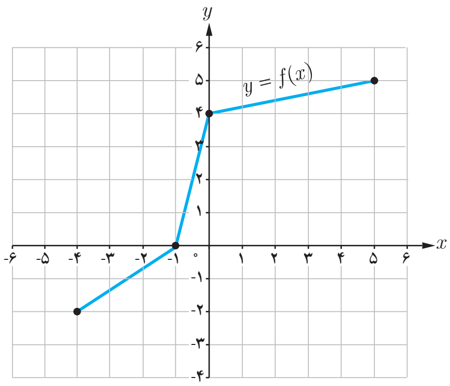
رسم نمودار $kf(x)$:

یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدید اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

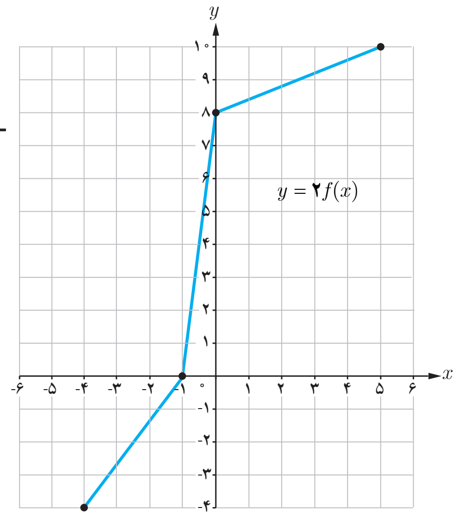
مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر داده شده است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ و $y=-f(x)$ و $y=۲f(x)$را رسم کنید.



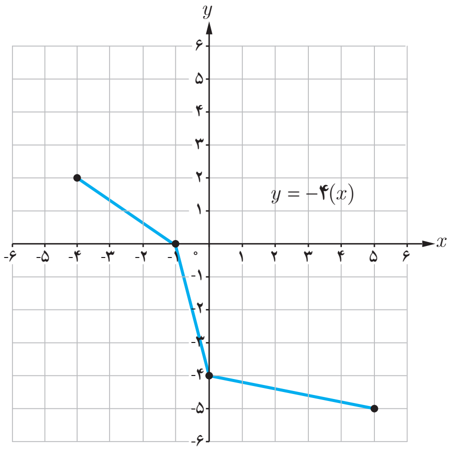
x	$\frac{۱}{۲}f(x)$
۴-	۱-
۱-	۰
۰	۲
۵	$\frac{۵}{۲}$



x	f(x)
۴-	۲-
۱-	۰
۰	۴
۵	۵



x	۲f(x)
۴-	۴-
۱-	۰
۰	۸
۵	۱۰



x	-f(x)
۴-	۲
۱-	۰
۰	۴-
۵	۵-

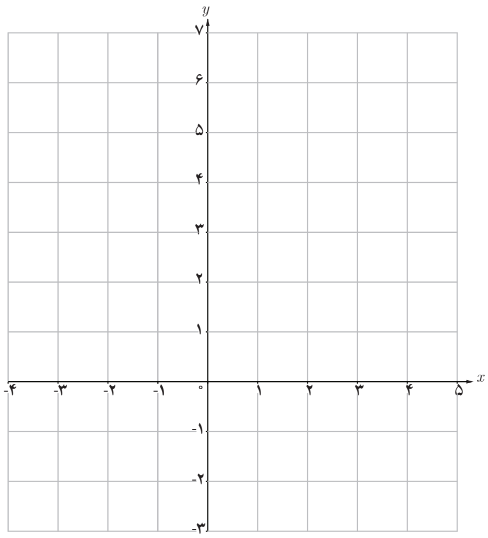
با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xهاست.

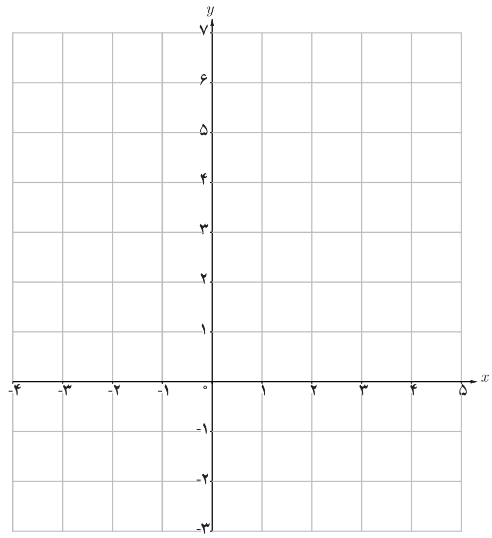
همان‌طور که در این مثال دیدید برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه را در ۱- و برای رسم نمودار $y=۲f(x)$ عرض هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنه تغییر نمی‌کند و دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکی نیست.

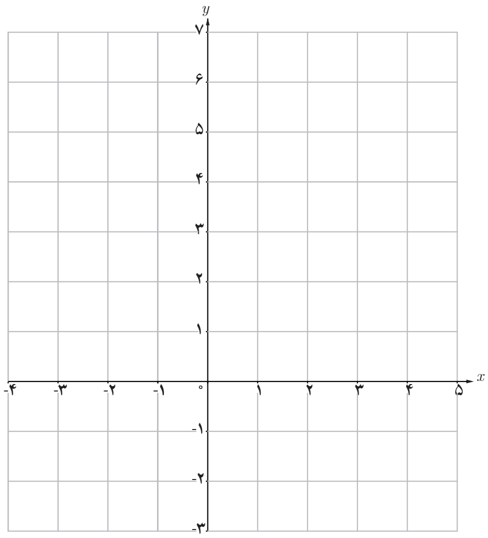
همچنین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکی هستند. یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکی است.

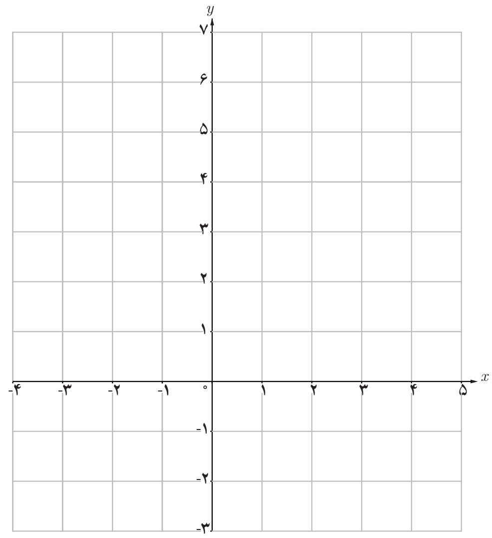
کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$ را در بازهٔ $[-۳,۴]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۳|$ و $h(x)=۳|x-۳|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۴}|x-۳|$ را رسم کنید.


f

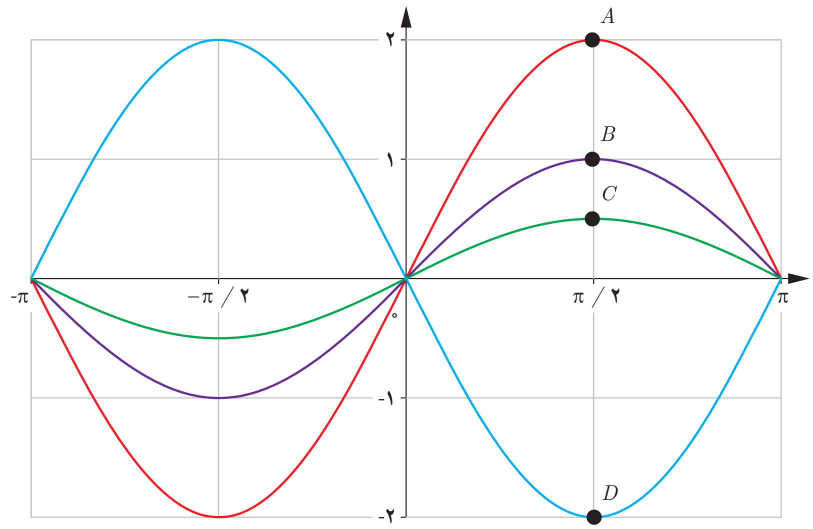

g


h

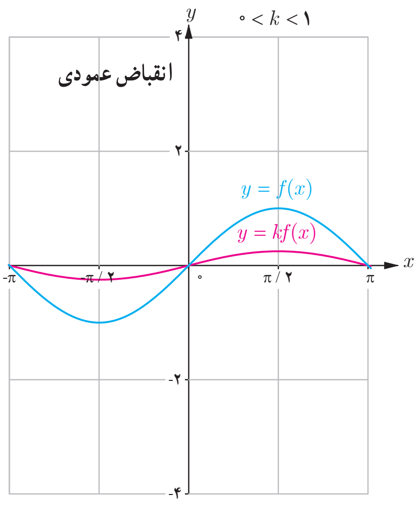

k

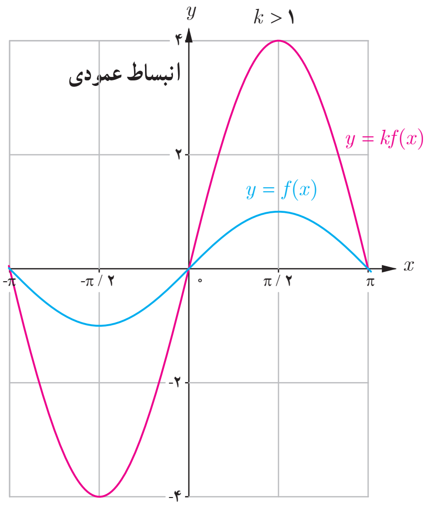
کار در کلاس

در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=۲\sin x$ و $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.



نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $۰<k<۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.





رسم نمودار $f(kx)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $f=(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $f=(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-۴\leq ۲x\leq ۰$$

$$-۲\leq x\leq ۰ \quad \rightarrow \quad f(۲x) \text{ دامنهٔ } : D=[-۲,۰]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود.

$$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰$$

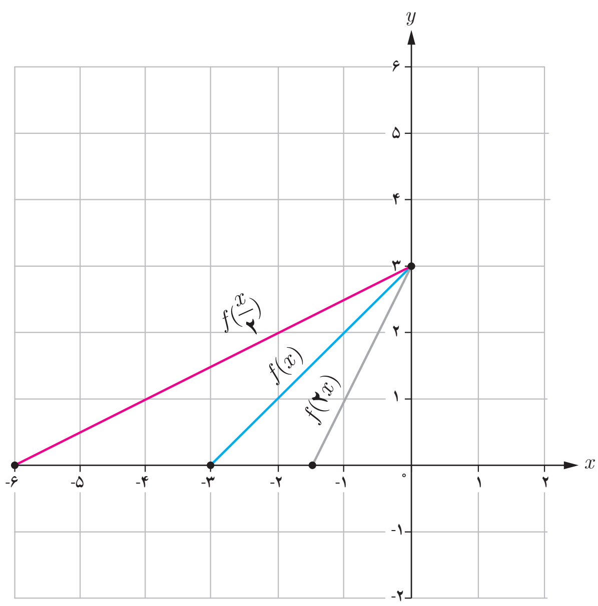
$$-۸\leq x\leq ۰ \quad \rightarrow \quad f(\frac{x}{۲}) \text{ دامنهٔ } : D=[-۸,۰]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

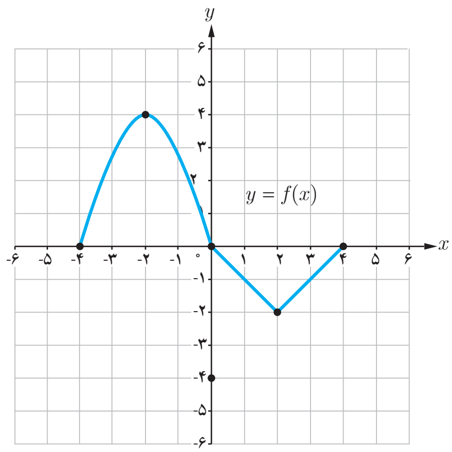
x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳



فعالیت

نمودار $f(x)$ به صورت زیر داده شده است :

دامنهٔ این تابع $[-۴,۴]$ است. می‌خواهیم با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



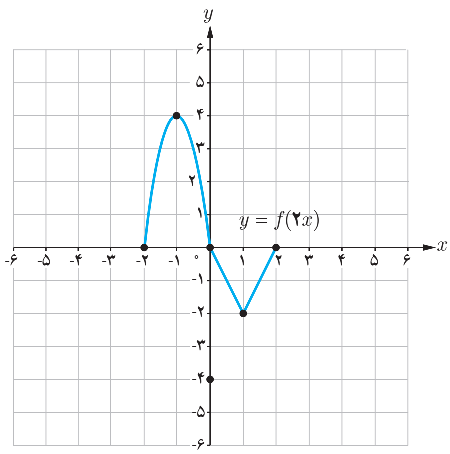
x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

الف) برای تشخیص دامنهٔ $y=f(۲x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.



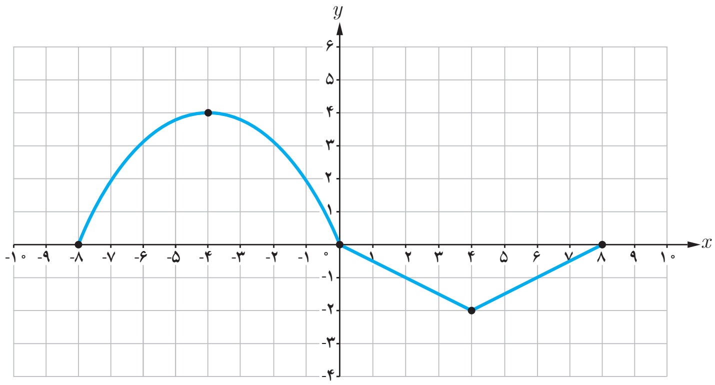
x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
...	-۲	۴	$(...,۴)$
...	۰	۰	$(...,۰)$
...	۲	-۲	$(...,-۲)$
...	۴	۰	$(...,۰)$

ب) برای تشخیص دامنهٔ $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ بازهٔ $[-۸,۸]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

x	$f(\frac{۱}{۲}x)$
-۸	۰
-۴	۴
۰	۰
۴	-۲
۸	۰



همان‌طور که ملاحظه کردید برای رسم نمودار $y=f(۲x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکی نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

کار در کلاس

با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ هر تابع را به نمودارش نظیر کنید. در هر مورد دامنه و برد را مشخص کنید.

الف) $y=-\sqrt{x}-۱$

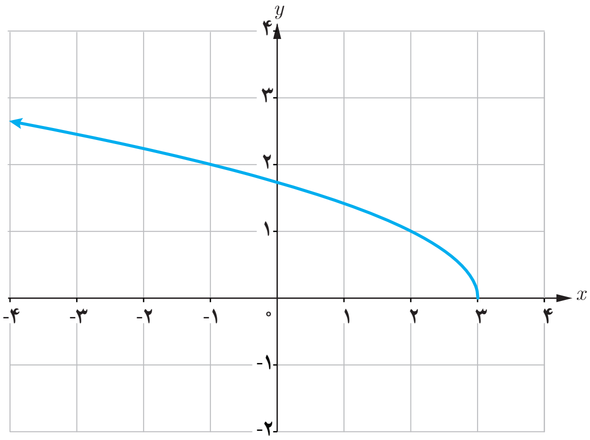
ب) $y=\sqrt{x}+۲$

پ) $y=\sqrt{x-۲}$

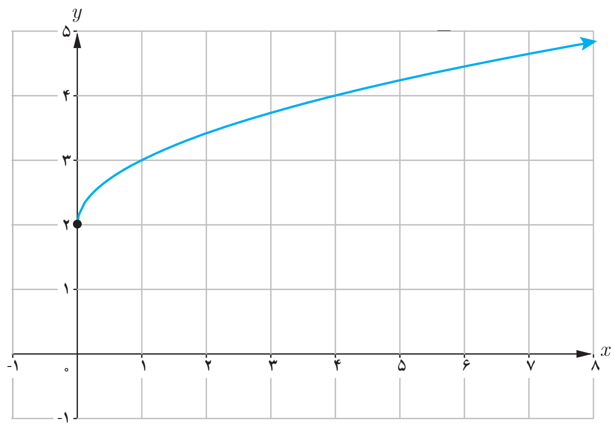
ت) $y=\sqrt{x+۴}$

ث) $y=\sqrt{۲x}$

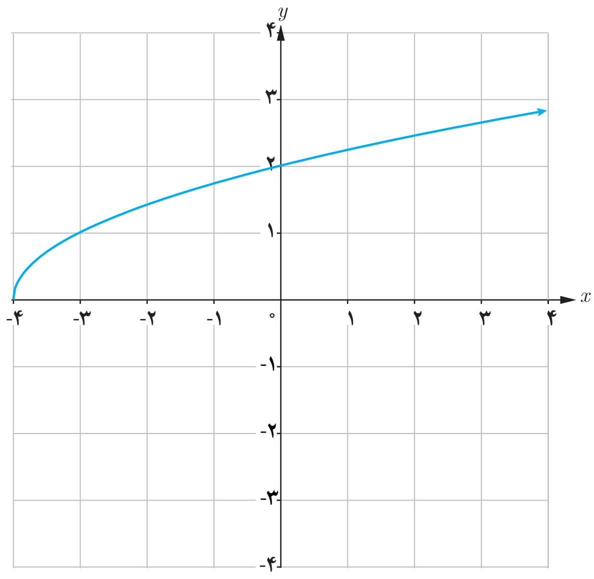
ج) $y=\sqrt{-x+۳}$



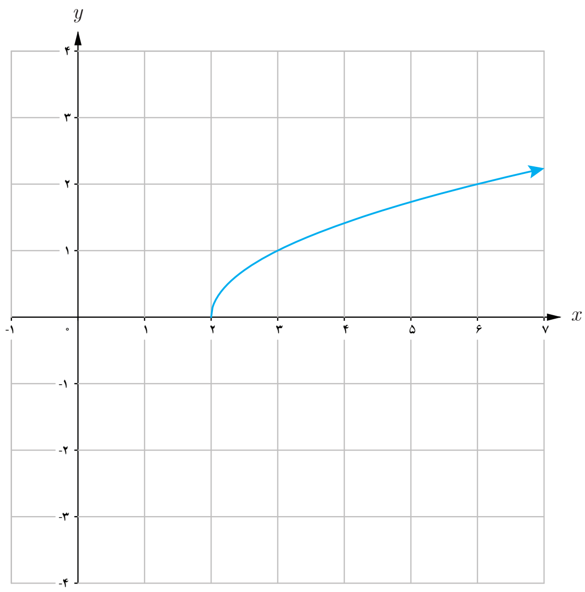
(۱)



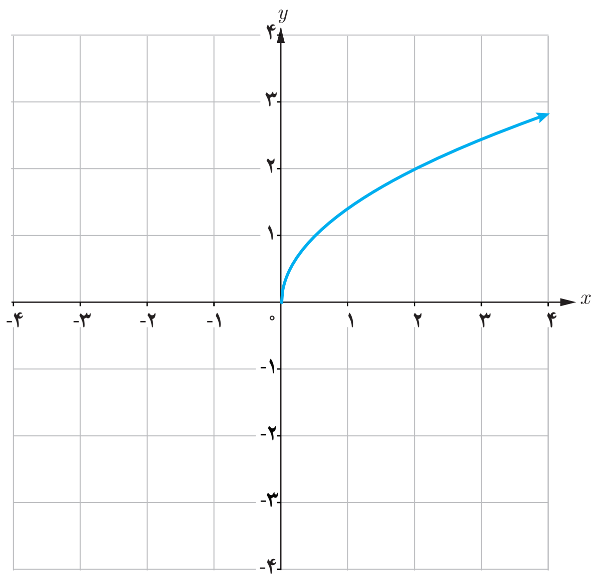
(۲)



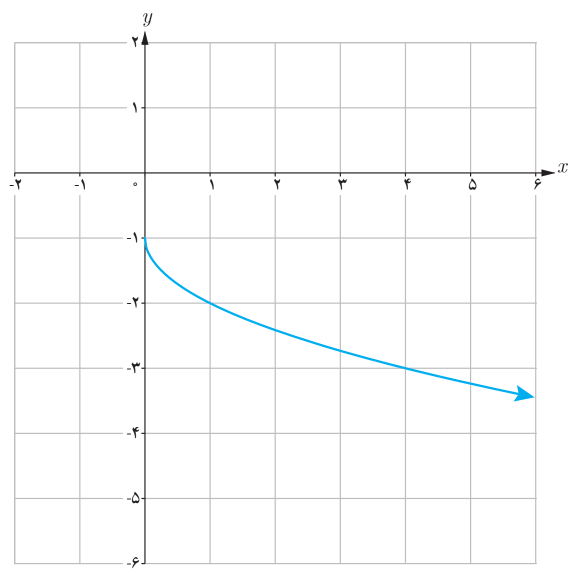
(۳)



(۴)

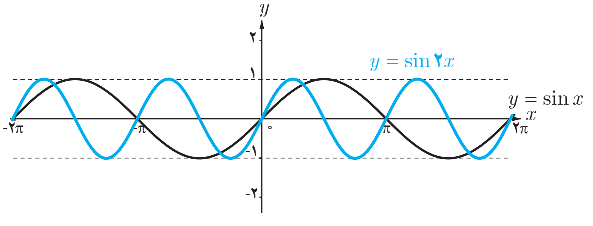


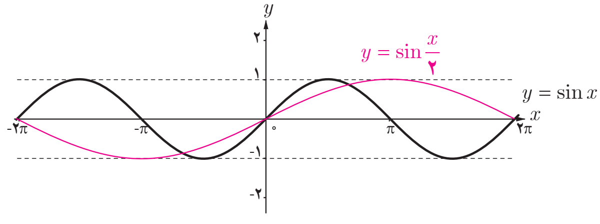
(۵)



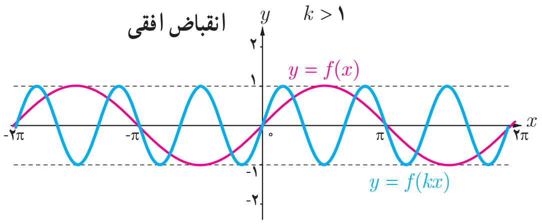
(۶)

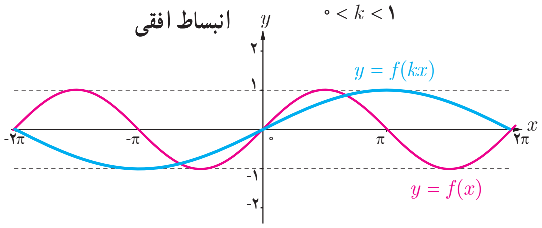
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ و $y=\sin\frac{x}{۲}$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y=\sin ۲x$ با انقباض در امتداد محورxها و نمودار $y=\sin\frac{x}{۲}$ با انبساط در امتداد محورxها به‌دست آمده است.





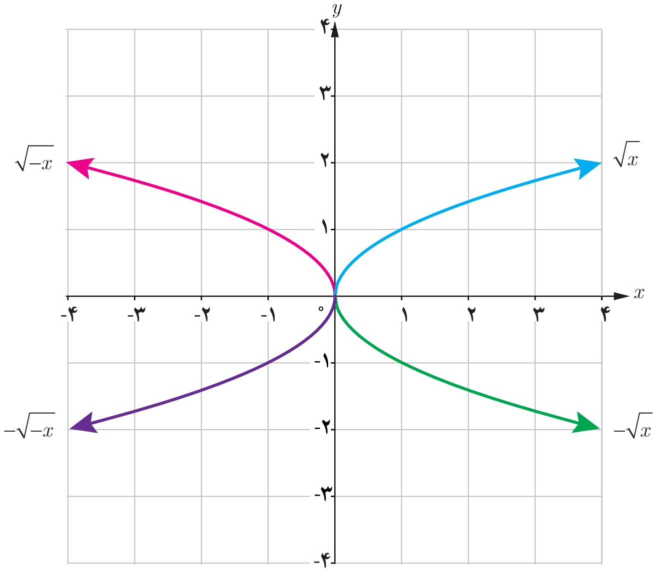
نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.





با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yهاست.

مثال : نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.



دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

کار در کلاس

اگر $k<0$، نمودار تابع $f(kx)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه رسم می‌شود؟

تمرین

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ و در صورت امکان $(fog)(۰)$ را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x+۴}\ ;\ g(x)=x^{۲}$

ب) $f(x)=x^{۲}-۵\ ;\ g(x)=\sqrt{x+۶}$

پ) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\ ;\ g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$

ث) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}$

ج) $f(x)=x\quad+\quad;\ g(x)=\cos x$

۳ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^{۲}$.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت بر قرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ ، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

۴ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام راه به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۵ تابع $h(x)=(۳x^{۲}-۴x+۱)^{۵}$ ترکیب کدام دو تابع است؟ حاصل $(fog)(x)$ است یا $(gof)(x)$ ؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

ب) $f(x)=x^{۵}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

۶ توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$

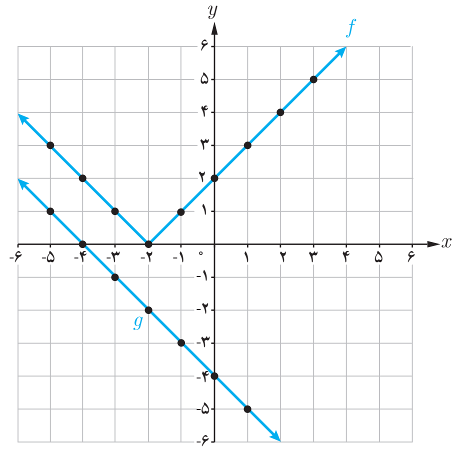
۷ با توجه به نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$



۸ با توجه به ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵ \ , \ g(x)=x^۲-۳x+۸ \quad : (fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱ \ , \ g(x)=۱-۲x \quad : (gof)(x)=-۵$

۹ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=\cos ۲x$

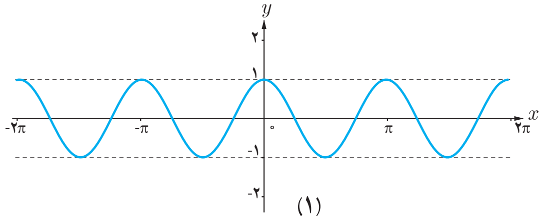
ب) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$

پ) $y=۲\cos ۲x$

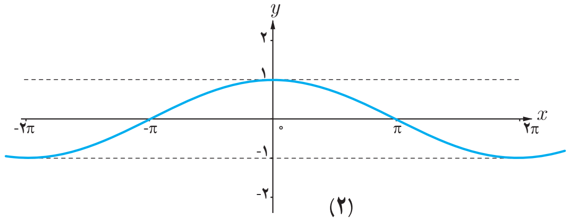
ت) $y=\cos(\frac{۱}{۳}x)$

ث) $y=-\cos ۲x$

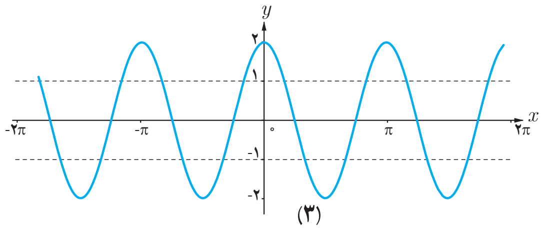
ج) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)$



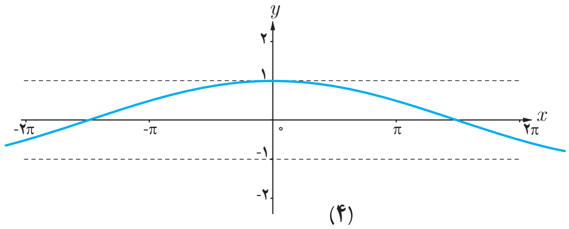
(۱)



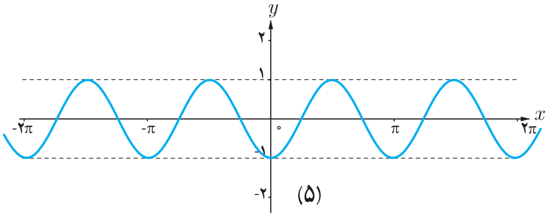
(۲)



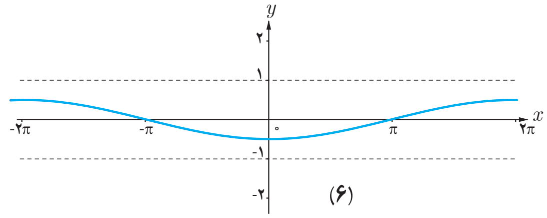
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)