درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود و با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز او مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است، آیا می‌توانید به‌طور قطع و یقین بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟ یا اینکه بعد از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می‌رسد. آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند، مانند میزان ترافیک رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... بنابراین، دو وضعیت وجود دارد، یکی این‌که نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم این‌که نرگس بعد از ملیکا به مدرسه برسد، شاید حالت سومی هم وجود داشته باشد و این‌که هر دو با هم به مدرسه برسند.

بسیاری از پدیده‌های روزمره وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست، اما از وقوع همهٔ حالت‌های ممکن اطلاع داریم. برای مثال وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به تصادف مهره‌ای خارج می‌کنیم؛ می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما به‌طور قطع و یقین قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن مشخص نیست. این‌گونه آزمایش‌ها را پدیده تصادفی یا آزمایش‌های تصادفی می‌گوییم.

پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از انجام آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم، اما از این‌که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک برآمد می‌گوییم.

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آنها قبل از انجام آزمایش به‌طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم.

برای مثال چنانچه سنگی را داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از انجام آزمایش می‌دانیم که سنگ داخل آب فرو می‌رود. یا در پرتاب یک سکه، قبل از انجام آزمایش می‌دانیم سکه روی زمین می‌نشیند، این‌گونه پدیده‌ها، آزمایش‌های قطعی هستند.

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟ چرا؟

الف) انتخاب دانش‌آموزانی در کلاس شما که قد آنها بیشتر از ۱۸۰ سانتی‌متر است.

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که یک طرف آن عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۲ حک شده باشد.

پ) در جعبه‌ای تعدادی مهره سفید قرار دارد، به تصادف، ۲ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم، آیا قبل از انجام آزمایش رنگ مهره‌های خارج شده را می‌دانید؟

ت) نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از انجام بازی.

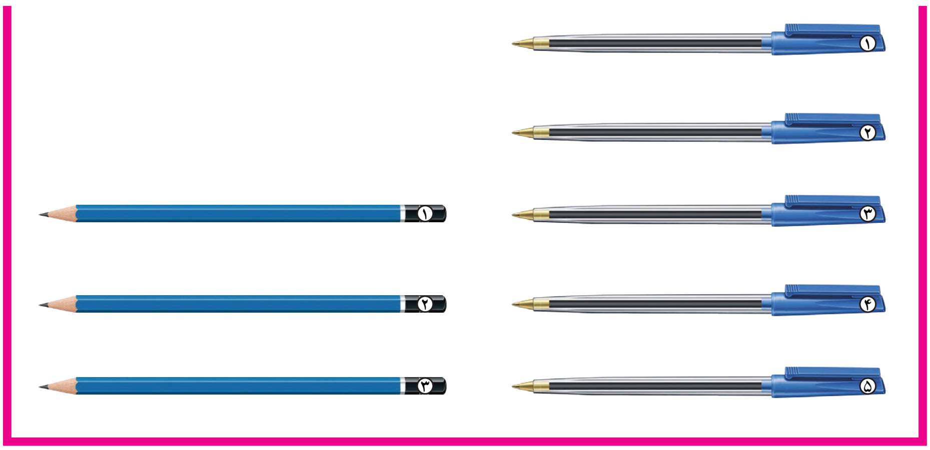
ث) در یک بازی بین دو نفر سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی ریخته شود، اگر شخصی سکه‌اش رو و تاس آن زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از انجام بازی نفر برنده مشخص است؟

۲. از جعبه‌ای که در آن ۳ مداد و ۵ خودکار قرار دارد، به تصادف یک شیء خارج می‌کنیم.

الف) آیا مجموعهٔ دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همهٔ برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

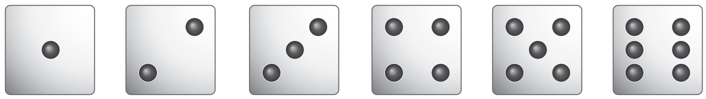
ب) به نظر شما چگونه می‌توان همهٔ برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری، متمایز می‌کنیم.



فضای نمونه

در پرتاب یک تاس بعد از آن‌که تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را خواهیم داشت، مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه گفته و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

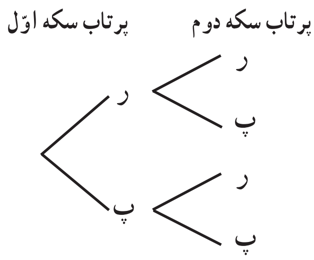


بنابراین در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با : $S=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را پس از به زمین نشستن تاس‌ها و سکه‌ها بنویسید.

۱. پرتاب دو سکه باهم.



$S=\{(ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)\}$

۲. پرتاب سه سکه با هم یا پرتاب یک سکه سه بار.

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید، سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ , ۱)	(۱ , ۲)				(۱ , ۶)
۲	(۲ , ۱)	(۲ , ۲)				
۳			(۳ , ۳)		(۳ , ۵)	
۴				(۴ , ۴)		
۵			(۵ , ۳)			
۶						(۶ , ۶)

۲. سه نفر دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد کنار هم می‌نشینند، فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید؟ چگونه می‌توان تعداد همهٔ برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن مشخص کرد؟

۳. داخل کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد، به تصادف سه مهره یک جا از کیسه خارج می‌کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم هرگاه هر عضو مجموعه A، عضوی از مجموعه B باشد، در این صورت می‌نویسیم $A \subseteq B$، برای مثال:

$$\{۱, ۲, ۳\} \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

از طرفی می‌دانیم $A \subseteq A$، یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همهٔ مجموعه‌ها است، یعنی $\varnothing \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ S را یک پیشامد می‌گویند. از آن‌جا که $\varnothing \subseteq S$ پس $\varnothing$ یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی) و $S \subseteq S$ را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم $S = \{\text{پ}, \text{ر}\}$، تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌های خود را روی هم گذاشتند و یک کتاب رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریداری کردند. آنها اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند، سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج کردند و قرار شد نام هرکسی که روی این کارت باشد، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونهٔ این پدیده تصادفی را بنویسید، سپس تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.
اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه‌ای از مطالب کتاب را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم، پس از نشستن تاس روی زمین عدد ۲ نمایان می‌شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام‌یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند.

الف) $A = \{۳, ۲, ۵\}$

ب) $B=\{۲\}$

پ) $C=\{\text{تاس عددی اول بیاید}\}$

برای این‌که یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم، مجموعه‌های پیشامد زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشند.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشند. $\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشند.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشند.

۵. در یک برنامهٔ کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم حضور دارند، قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب نماییم، تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

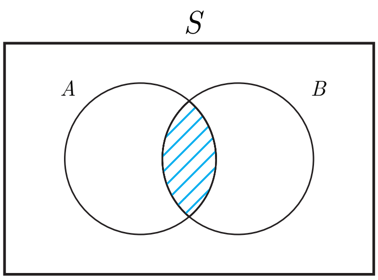
الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$n(A)=\overset{\text{دهم}}{\binom{۵}{۱}}\times\overset{\text{یازدهم}}{\binom{۶}{۱}}\times\overset{\text{دوازدهم}}{\binom{۴}{۱}}=۵\times۶\times۴=۱۲۰$$

ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان یازدهم باشند.

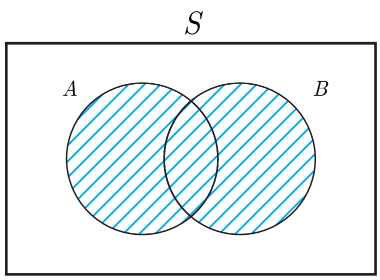
اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، اجتماع، اشتراک دو مجموعه A و B و تفاضل B از A را به‌صورت زیر یادآوری می‌کنیم.



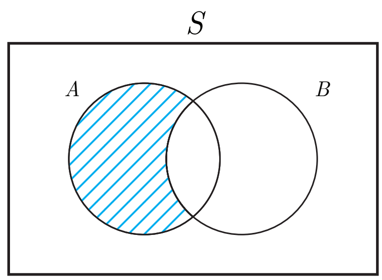
(شکل ۱)

$A\cap B=\{x\in S \mid x\in A \wedge x\in B\}$



(شکل ۲)

$A\cup B=\{x\in S \mid x\in A \vee x\in B\}$



(شکل ۳)

$A-B=\{x\in S \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند:

الف) پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

یکی از تاس‌ها ۵ باشد : $A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),$

$(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}$

مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد : $B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$

برای مشخص کردن پیشامدی که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A\cap B$ را محاسبه کنیم.

$A\cap B=\{(۱,۵),(۵,۱)\}$

ب) پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

دو تاس یکسان : $A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

مجموع ۴ باشد : $B=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$

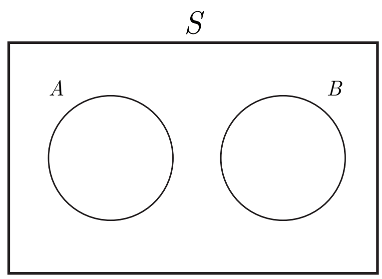
پیشامد مورد نظر برابر با $A\cup B$ است.

$A\cup B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۱,۳),(۳,۱)\}$

پ) پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B اتفاق نیفتد. (شکل ۳)

هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند به طوری که $A-B=A$ و $B-A=B$ در این صورت پیشامد $A\cap B$ را محاسبه کنید.

چون $A-B=A$ و $B-A=B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند و در این حالت $A\cap B=\varnothing$



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $A\cap B=\varnothing$ در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

کار در کلاس

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم، هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

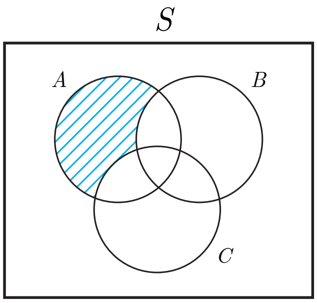
ـ پیشامد آن‌که عدد رو آمده زوج و اوّل باشد.

ـ پیشامد آن‌که عدد رو شده زوج یا اوّل باشد.

ـ پیشامد آن‌که عدد رو شده زوج باشد ولی اوّل نباشد.

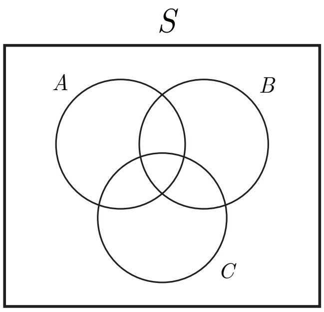
ـ پیشامد آن‌که عدد رو شده اوّل باشد ولی زوج نباشد.

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند، هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید، سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

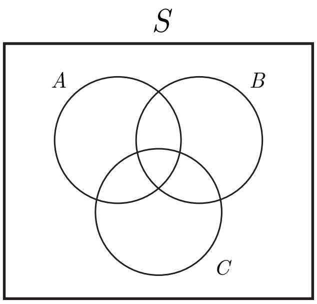


$\boldsymbol{A-(B\cup C)}$

ـ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهند.



ـ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C اتفاق نیفتد.



ـ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C اتفاق نیفتد.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S\neq\varnothing$ فضای نمونه متناهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر S، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان‌که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A=\varnothing$ در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A=S$ در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه $A\subseteq B$، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

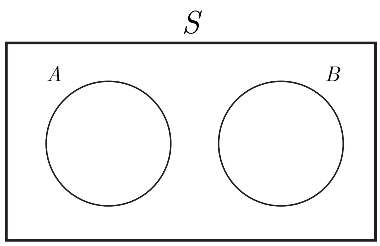
$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\le \dots \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)}\le \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow P(A)\le P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد در این صورت داریم :

$$۰\le P(A)\le ۱$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A\cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A\cup B)=n(A)+\dots \Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{\quad}{n(S)}+\frac{\quad}{\quad} \Rightarrow P(A\cup B)=\dots+\dots$$



کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه :

الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد، بنابراین $n(S)=۱۲$.

$$S=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),\dots,(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),\dots,(\text{پ},۶)\}$$

پیشامد آنکه تاس زوج بیاید، برابر است با :

$$A=\{(\text{ر},۲),(\text{ر},۴),(\text{ر},۶),(\text{پ},۲),(\text{پ},۴),(\text{پ},۶)\} \text{ ؛ } n(A)=۶$$

بنابراین داریم :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه :
الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

حل : هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند، بنابراین در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$\underset{\text{نفر اوّل}}{\boxed{۱۲}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\boxed{۱۲}}\times\underset{\text{نفر سوم}}{\boxed{۱۲}}\times\underset{\text{نفر چهارم}}{\boxed{۱۲}}\times\underset{\text{نفر پنجم}}{\boxed{۱۲}}\;;\; n(S)=۱۲^{۵}$$

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A به‌طوری که همهٔ آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

$$\underset{\text{فروردین}}{\overset{\text{نفر اوّل}}{\boxed{۱}}}\times\underset{\text{فروردین}}{\overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{۱}}}\times\underset{\text{فروردین}}{\overset{\text{نفر سوم}}{\boxed{۱}}}\times\underset{\text{فروردین}}{\overset{\text{نفر چهارم}}{\boxed{۱}}}\times\underset{\text{فروردین}}{\overset{\text{نفر پنجم}}{\boxed{۱}}}\;;\; n(S)=۱$$

در نتیجه داریم :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲^{۵}}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه خاص از سال متولد شده باشند.

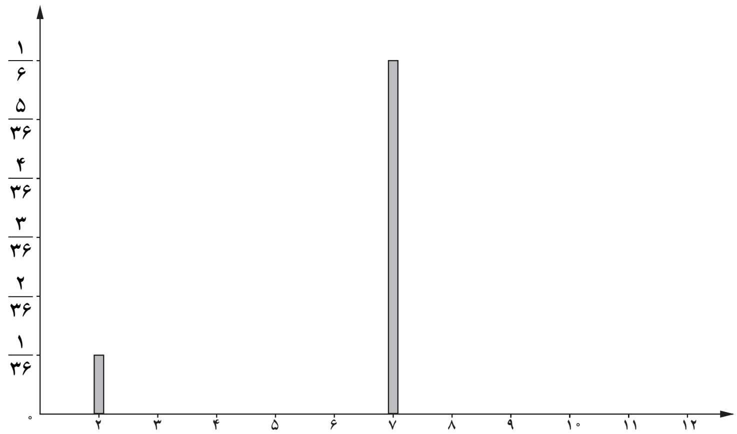
پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر یک از آنها یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... ، ۱۲ را نسبت می‌دهیم، سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.
الف) چه شماره‌ای شانس برنده شدن بیشتری نسبت به بقیه دارد.

ب) شانس برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است.

پ) آیا کسی که شانس کمتری دارد، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید، سپس نمودار میله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به تصادف یک شیء خارج می‌کنیم.

الف) احتمال آن را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ P(مداد باشد).

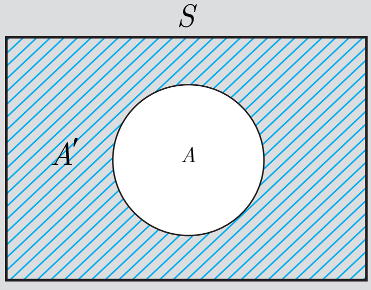
ب) احتمال آن را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ P(خودکار باشد).

پ) احتمال آن را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ P(مداد نباشد).

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل P(مداد نباشد)$+P$(مداد باشد) را پیدا کنید؟

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = ۱$ یا $P(A') = ۱ - P(A)$ در این حالت A و A' را دو پیشامد مکمل می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال آنکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه فردا بارانی نباشد؟

۲. احتمال آنکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با ۰/۰۱ است، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه فردا کیارش به مدرسه برود؟

۳. احتمال آنکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{۳۲}{۴۹}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند؟

مثال : در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی در یک رخت‌آویز قرار دارند به‌طوری که ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد هستند. شخصی به تصادف ۳ پیراهن از بین آنها انتخاب می کند.

الف) احتمال آن را محاسبه کنید که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند. **ب)** احتمال آن را محاسبه کنید که رنگ ۳ پیراهن متمایز باشند.

پ) احتمال آن را محاسبه کنید که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند. **ت)** احتمال آن را محاسبه کنید که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند.

ث) احتمال آن را محاسبه کنید که ۳ پیراهن آبی نباشند. **ج)** جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید چه نتیجه می‌گیرید.

حل : الف) چون ۳ پیراهن را از بین ۱۰ پیراهن انتخاب می کند، بنابراین داریم :

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}=۱۲۰$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند، بنابراین اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A\cup B)$ را محاسبه کنیم، از آنجا که A و B ناسازگارند، داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۳}}}{۱۲۰}+\frac{\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۳}}}{۱۲۰}=\frac{۸}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متمایز باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن آبی و یک پیراهن زرد هستند، بنابراین داریم :

$$n(C)=\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۱}}\times\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۱}}\times\overset{\text{زرد}}{\binom{۲}{۱}}=۴\times ۴\times ۲=۳۲ \quad ; \quad P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

پ) برای اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، آن‌گاه ۲ پیراهن قرمز یا ۳ پیراهن قرمز هستند، بنابراین مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت :

$$n(D)=\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۲}}\times\overset{\text{بقیه پیراهن‌ها}}{\binom{۶}{۱}}+\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۳}}=۶\times۶+۴=۴۰\qquad;\qquad P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۴۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو پیراهن آبی باشند، باید دو پیراهن آبی یا یک پیراهن آبی یا صفر پیراهن آبی داشته باشیم :

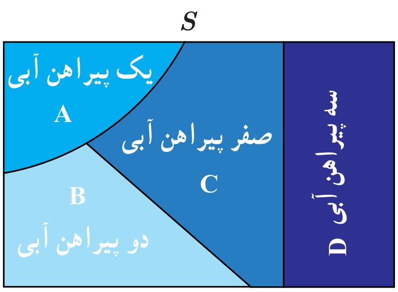
$$n(E)=\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۲}}\times\overset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۱}}+\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۱}}\times\overset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۲}}+\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۰}}\times\overset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۳}}=۶\times۶+۴\times۱۵+۱\times۲۰=۱۱۶$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۱۱۶}{۱۲۰}=\frac{۲۹}{۳۰}$$

ث) اگر P احتمال ۳ پیراهن آبی باشد، آن‌گاه $P'=(۱-P)$ احتمال آن است که ۳ پیراهن آبی نباشند، بنابراین :

$$P'=۱-P=۱-\frac{\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۳}}}{\binom{۱۰}{۳}}=۱-\frac{۴}{۱۲۰}=\frac{۱۱۶}{۱۲۰}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» هر دو یکسان هستند. یعنی می‌توان راه‌حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ پیراهن به دنبال تعداد پیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به‌صورت زیر است.



$$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=P(s)=۱$$

تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به تصادف یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا تبدیل به بخار شود.

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی به‌طوری که نیمی از سؤالات را شانسی پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی ساده دو نفره یکی از آنها مراحل زیر را انجام می‌دهد.

ــ عددی را انتخاب می‌کند.

ــ سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

ــ سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

ــ از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

ــ نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

ــ از حاصل به دست آمده، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

ــ در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده، پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای پرتاب می‌کنیم، اگر رو ظاهر شد آن‌گاه تاس را می‌ریزیم، در غیر این صورت یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

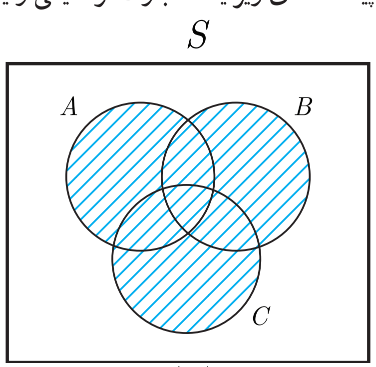
ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به تصادف یک کارت را برمی‌داریم، مطلوب است تعیین:

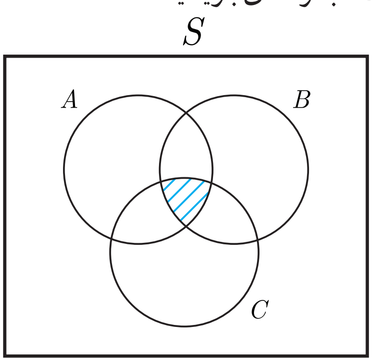
الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی **ب)** پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت مجذور کامل باشد. **ت)** پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(ب)



(الف)

۵. هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت را روی کارت‌هایی نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. **الف)** فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. **پ)** پیشامد B که در آن عدد روی کارت اوّل باشد.

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. **پ)** پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. **ث)** پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند هستند.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. **ت)** آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه :

الف) هر سه سیب سالم باشند. **ب)** دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

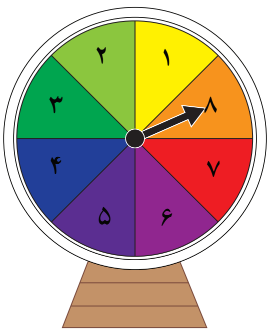
پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار، بیشتر باشد.

۹. عقربهٔ دستگاه چرخندهٔ زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد، چقدر احتمال دارد که :

الف) عقربه روی عددی اوّل بایستد.

ب) عقربه عددی اوّل یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.



۱۰. ۷ پرچم مختلف را به شش میله پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم، چنانچه این پرچم‌ها به تصادف کنار یکدیگر قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه میله پرچم‌ها با شماره‌های غیر اوّل در مکان‌های زوج باشند؟

۱۱. ۱۱ نفر بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به تصادف کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متمایز باشند، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان در عکس حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن رهایشان می‌کنند، بعد از مدتی محیط‌بانان به تصادف ۷ تا از آنها را گرفته و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه حداکثر ۲ قوچ نشانه‌دار باشند.

۱۳. اعضای انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. دربارهٔ یک برنامه خاص ۵ نفر موافق، ۳ نفر مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند، از بین آنها به تصادف ۳ نفر انتخاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه :

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

در یک مسابقه سه دریچه مطابق شکل زیر، مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان به تصادف در یک دریچه باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود، اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است در غیر این صورت بازنده می‌شود.

به نظر شما احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شمارهٔ دریچه غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟