فصل ۴

مشتق

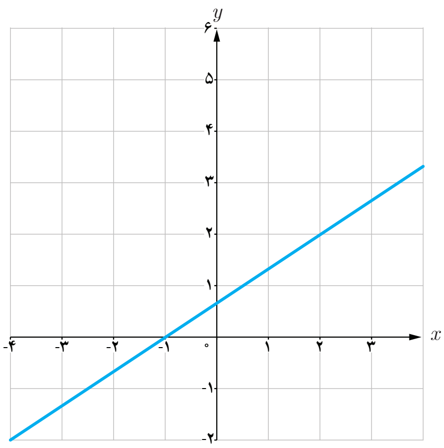
درس ۱

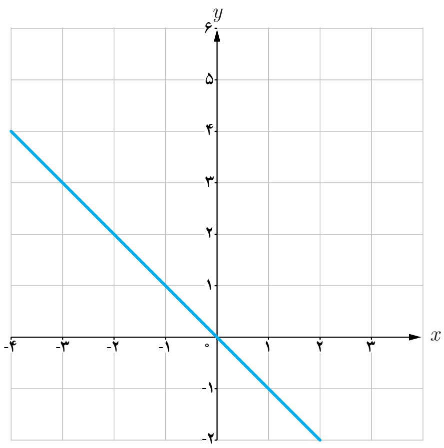
آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده‌های اولیه در مورد مفهوم مشتق به شیب یک خط مربوط می‌شود. با شروع از این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

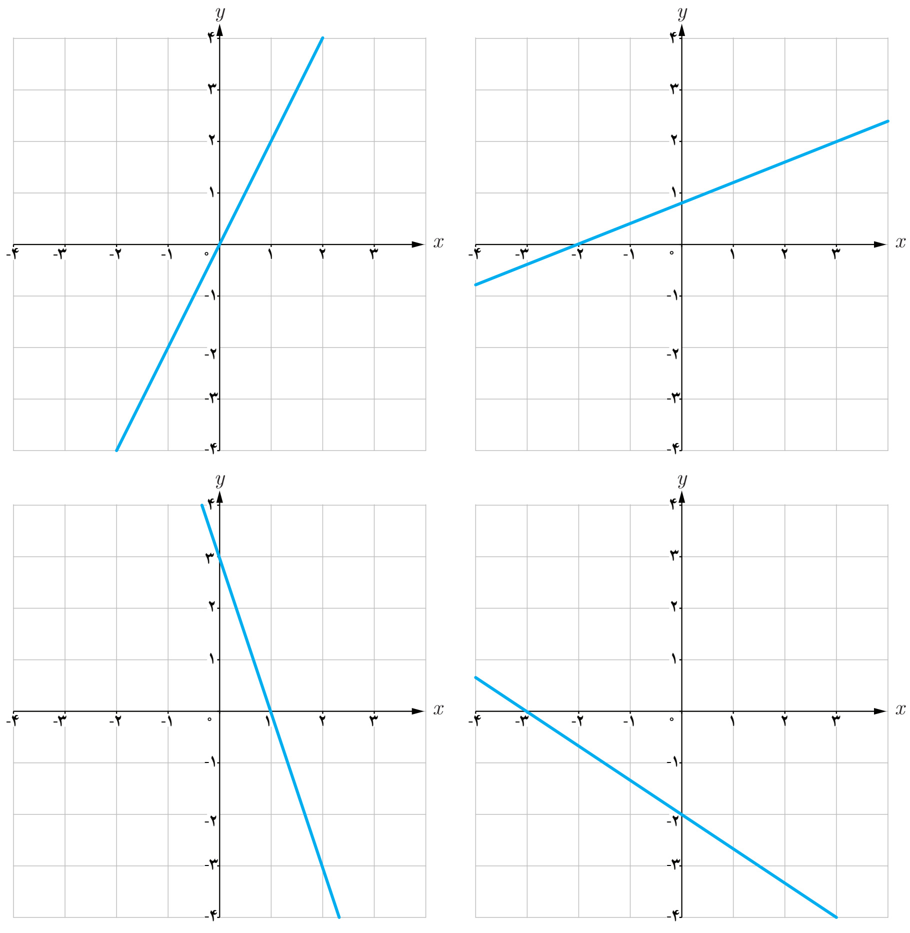
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟





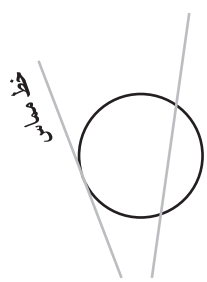
۲ با توجه به جدول خط‌های d_1 , d_2 , d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$

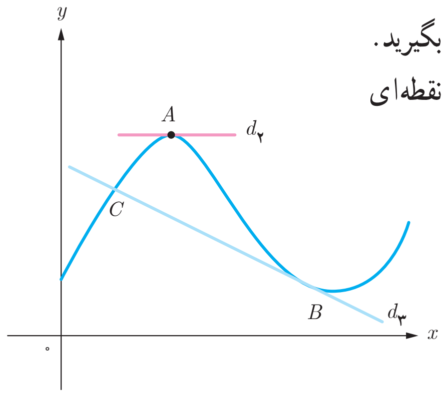


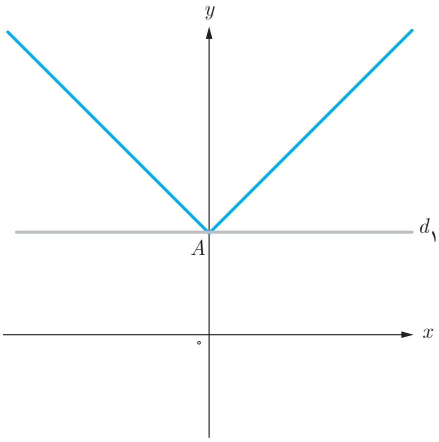
خط مماس بر یک منحنی

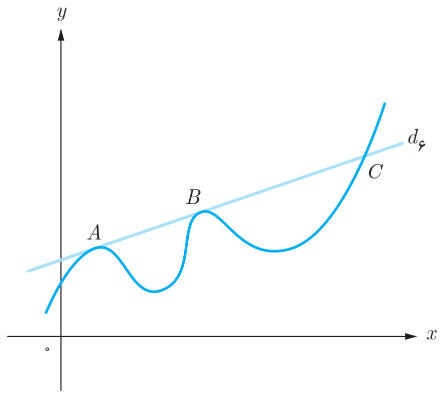
یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که یکی از نقاطش بر دایره و کلیه نقاط دیگرش خارج آن هستند، به عبارت دیگر خط در یک نقطه با دایره تماس دارد. مسئله مهم این است که آیا این تعریف را می‌توان به منحنی‌های دیگر تعمیم داد؟

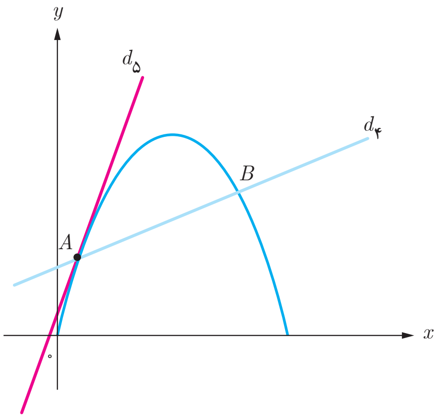


خط‌های d_1 تا d_6 را در نظر بگیرید. مشخص کنید که هر کدام در چه نقطه‌ای بر منحنی داده شده مماس است.









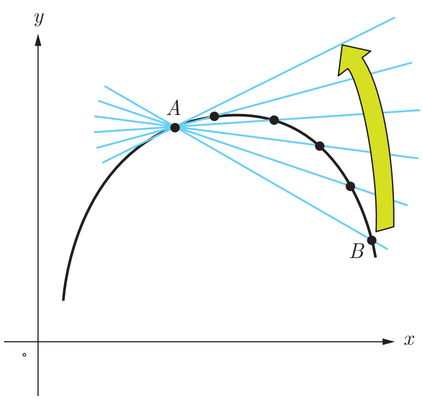
فعالیت

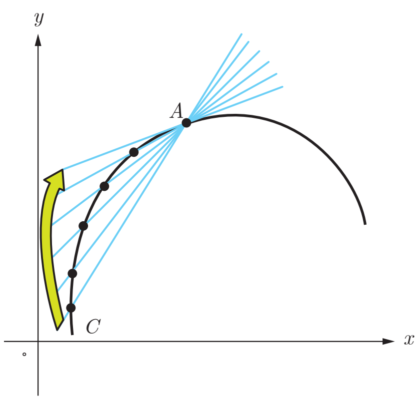
اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی مقابل در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه C را قبل از نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

خط مماس بر منحنی در نقطه A حد خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.

در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.



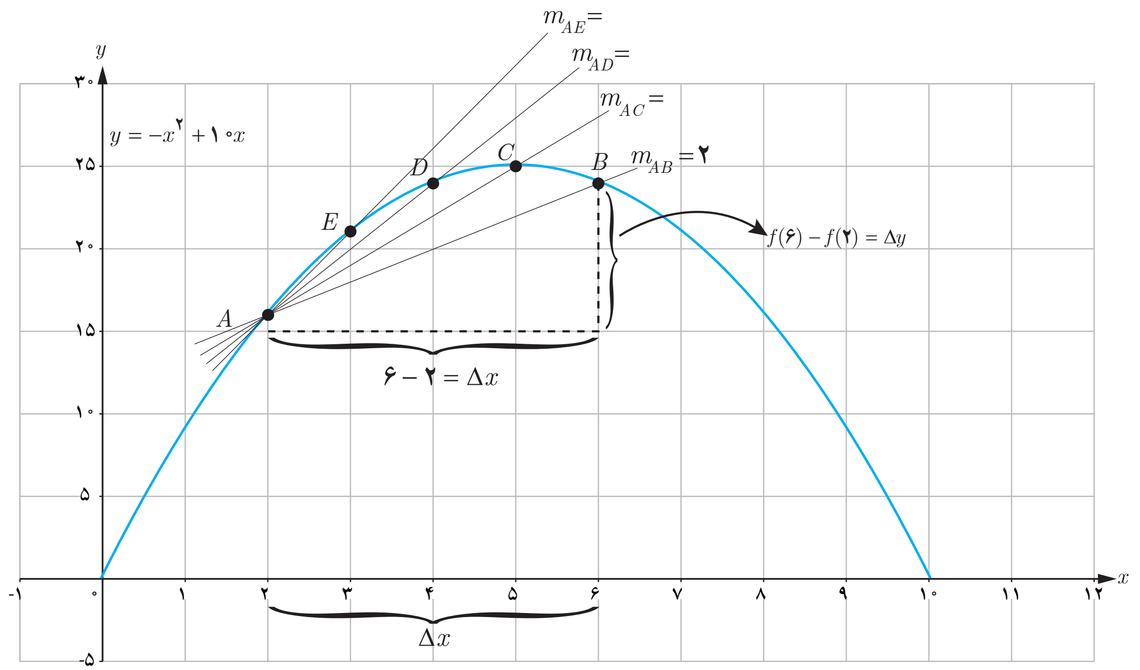


فعالیت

الف) تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ داده شده است، اگر $۰ \le x \le ۱۰$ نقاط $A(۲,f(۲))$ و $B(۶,f(۶))$ و $C(۵,f(۵))$ و $D(۴,f(۴))$ و $E(۳,f(۳))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{۲۴-۱۶}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت جابه‌جایی (تغییر) عمودی را به جابه‌جایی (تغییر) افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این جابه‌جایی‌ها را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

[۲,۶] ۲ ـــــــــــــــــــــــــ ۶ $\Delta x=۶-۲=۴$

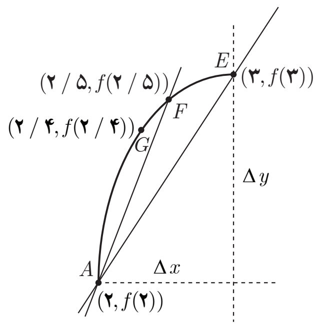
[۲,۵] ۲ ـــــــــــــــــــ ۵ $\Delta x=۵-۲=۳$

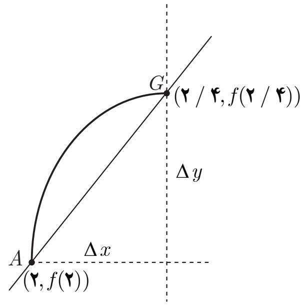
[۲,۴] ۲ ــــــــــــــ ۴ $\Delta x=۴-۲=۲$

[۲,۳] ۲ ـــــــــ ۳ $\Delta x=۳-۲=۱$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب

خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ در فاصله [۳و۲] رسم شده است. در ادامه نمودار منحنی در بازه [۲/۴و۲] رسم شده است.





$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}$$
$$=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}$$
$$=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}$$
$$=\_\_\_\_\_\_$$
$$=$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، با تکمیل جدول برای هر بازه داده شده، شیب خط‌های قاطع جدید را به‌دست آورید و شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$[۲,۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\_\_\_\_=\_\_\_\_=۵/۶$
$[۲,۲/۳]$	$\_\_\_\_=\_\_\_\_=\_\_\_\_=$
$[۲,۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
$[۲,۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
$[۲,۲/۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
$[۲,۲/۰۰۱]$ ⋮	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱\quad ۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵\quad ۹۹۹$ ⋮ ⋮
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک نزدیک به صفر)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\longrightarrow ?$

حدس می‌زنید که با ادامه این روند شیب خط‌های قاطع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که : $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲}=۶$ کافی است مقدار حد بالا را حساب کنیم :

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۲+h)^۲+۱۰(۲+h)-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(h^۲+۴h+۴)+۲۰+۱۰h-۱۶}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲-۴h-\cancel{۴}+\cancel{۴}+۱۰h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲+۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(-h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۶)=۶$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۲و۱/۵] و [۲و۱/۶] و [۲و۱/۷] و [۲و۱/۸] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ و ۶/۳ و ۶/۲ و... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به عدد ۶ به هر میزان که بخواهیم نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از چپ به صفر نزدیک شود.

یعنی :
$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$$

بنابراین به طور کلی داریم :
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$$

اگر f یک تابع باشد، شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود باشد. اگر حد بالا موجود نباشد، مماس بر منحنی در نقطه A تعریف نمی‌شود. همچنین حد بالا را گاهی شیب منحنی در a نیز می‌نامیم.

حد بالا را (درصورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند. یعنی : $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

بنابراین $f'(۲)=۶$. در ادامه $f'(۳)$ محاسبه شده است :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۳+h)^۲+۱۰(۳+h)-۲۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹-۶h-h^۲+۳۰+۱۰h-۲۱}{h}=\lim\ -h\ \ +۴h\ =\lim($$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲+۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۴)=۴$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ بنویسید.

حل :

$f'(۲)=۶$ = شیب خط مماس در نقطه A

$A(۲,f(۲))=(۲,۱۶)$

$y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=-x^۲+۱۰x$ را در نقطه‌ای به طول ۳ بنویسید.

دستورهایی دیگر برای محاسبه مشتق

با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مثال : اگر $f(x)=-x^۲+۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

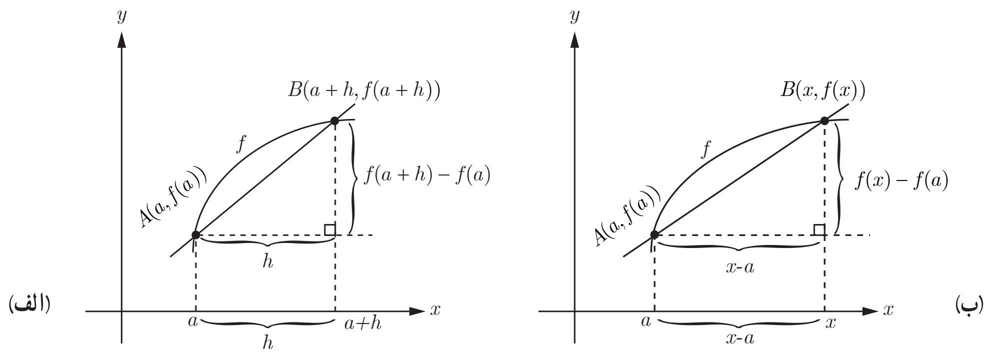
$$f'(۲)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^۲+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^۲-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^۲+۶\Delta x}{\Delta x}=۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه a به‌صورت زیر تعریف شد : $f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه a می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



در درس گذشته با نمودارهایی مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a کار کرده‌اید. می‌دانیم :

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

راه (معادل) دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت در شکل ب داریم :

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه حد کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به a به قدر کافی نزدیک شود)

مثال : اگر $f(x)=x^۲$، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^۲-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۶)=۶$$

روش دوم :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس ادامه به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

✤ **راهنمایی :** تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.

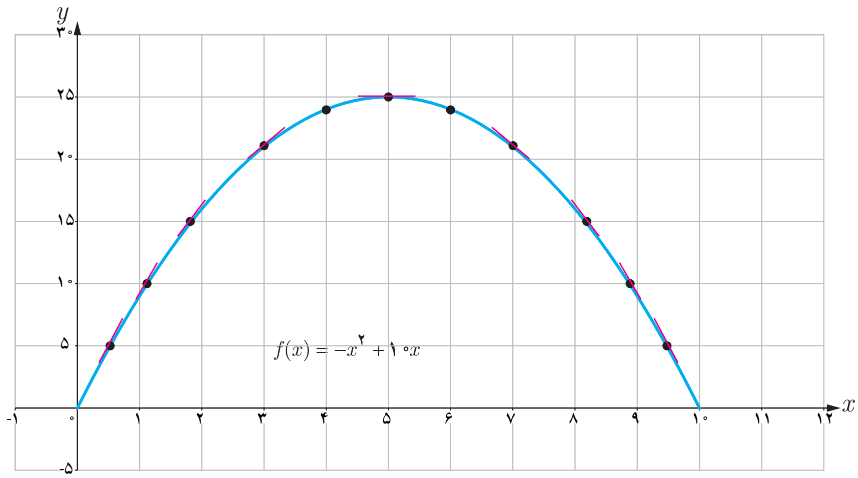
توجه داریم که وقتی $h\to 0$ ، $x\to a$

کار در کلاس

الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.



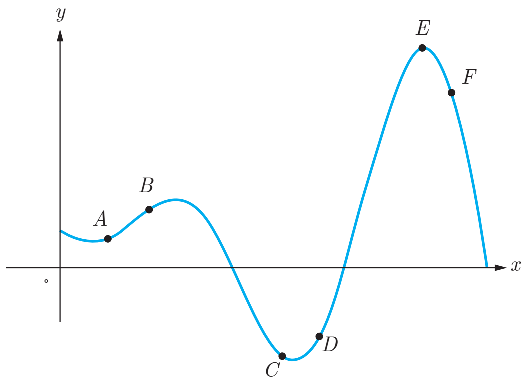
ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. دلیل شما چیست؟

ث) با محاسبه مشتق تابع در نقاط ۳ و ۴ ($f'(3)$ و $f'(4)$) صحت حدس خود را بررسی نمایید.

تمرین

۱ اگر $f(x)=x^{2}$ ، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	-3
	-1
	0
	$\frac{1}{2}$
	1
	2

۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر اعداد داده شده را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

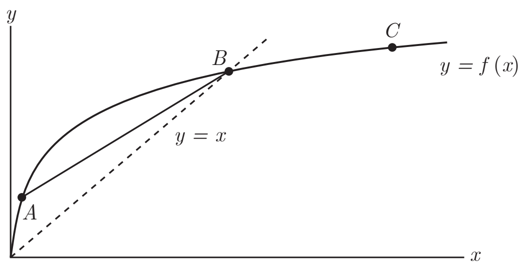
پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

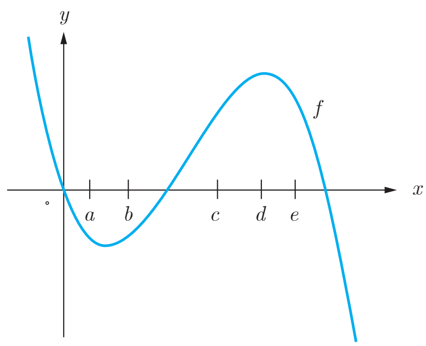
ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، ... و m_6 در نظر بگیرید.



۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط a,b,c,d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



$f'(x)$	x
0	
$0/5$	
2	
$-0/5$	
-2	

۵ نقاطی مانند A,B,C,D,E,F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب آن منفی است.

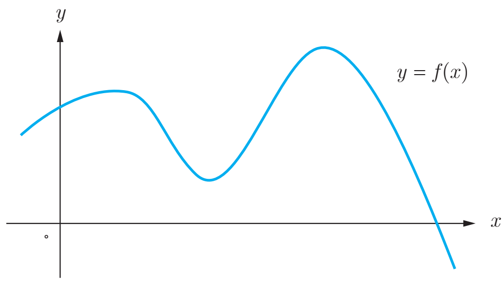
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار منحنی است که مشتق بزرگ‌ترین مقدار را (در بین بقیه این نقاط) دارد.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

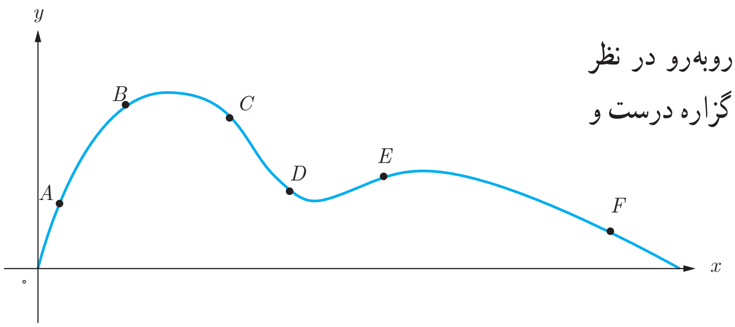
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=-x^۲+۱۰x$ ، $f'(۰)$ را به‌دست آورید.

۷ نقاط $A,B,C,D,E,$وF را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A<m_B$

پ) $m_E<m_B<m_A$

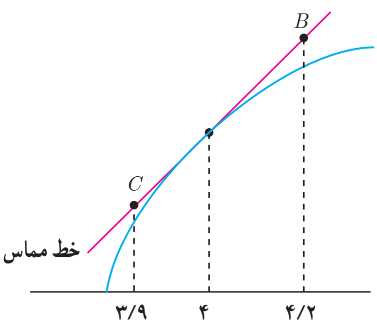
ت) شیب منحنی در نقاط F ،D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$

۸ برای تابع F در شکل زیر داریم : $f(۴)=۲۵, f'(۴)=۱/۵$

باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B وC را بیابید.



۹ اگر برای تابع f داشته باشیم : $f'(۵)=۴$

الف) کدام یک از مقادیر زیر به $f'(۵)$ نزدیک‌تر است؟

$$\frac{f(۷)-f(۵)}{۷-۵}$$

$$\frac{f(۵/۲)-f(۵)}{۵/۲-۵}$$

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}$$

ب) اگر بدانیم که علاوه بر این : $f(۵)=۷$ مقدار $f(۶)$ به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۵ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۸

درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای مانند x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

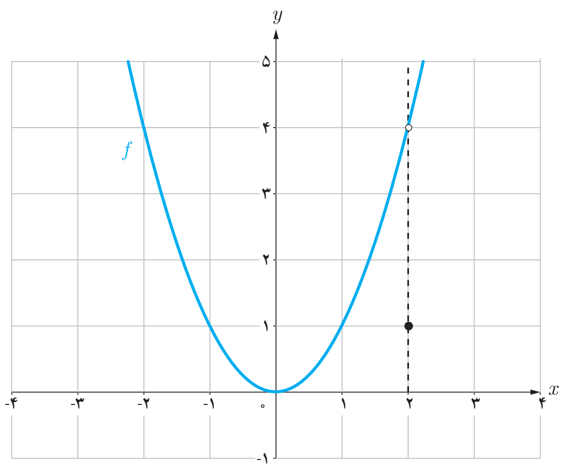
در صورت وجود حد گفته می‌شود که f در x_0 مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست هم دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از موقعیت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ (شکل زیر) را درنظر می‌گیریم :



برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به‌کار می‌گیریم.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. اما وقتی $x \to ۲$، مخرج کسر با مقادیر متفاوتی به صفر نزدیک می‌شود، داریم :

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = -\infty$$

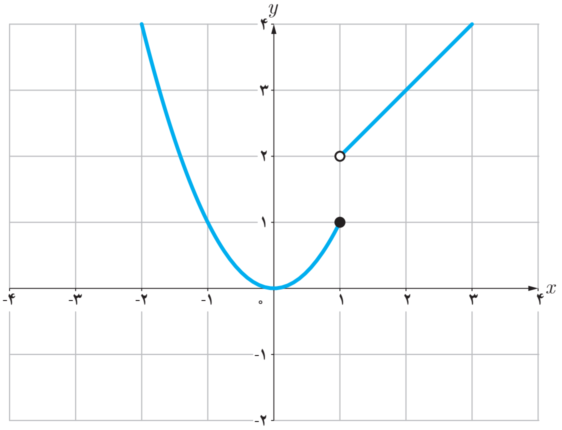
الف) چرا $f'(۲)$ موجود نیست؟

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x=۲$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^۲ & x \le ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟

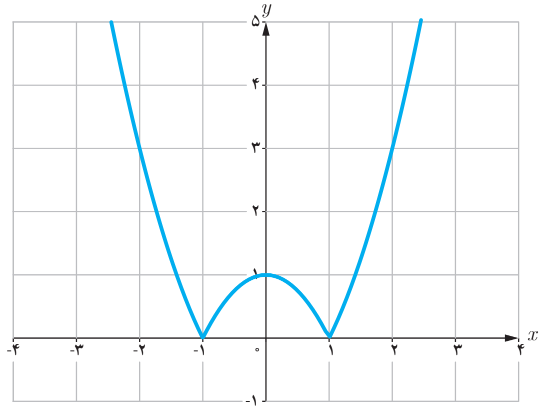


توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=۲$ و $x=۱$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(۲)$ و $g'(۱)$ موجود نبودند. در ادامه خواهید دید که ناپیوستگی تابع در یک نقطه، یکی از حالت‌هایی است که موجب می‌شود تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. در اینجا یک سؤال مهم مطرح می‌شود : اگر تابعی در یک نقطه پیوسته باشد، آیا در آن نقطه مشتق‌پذیر است؟

مثال بعد نشان می‌دهد که حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

✤ **مثال :** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^{۲} - ۱|$ را در $x = ۱$ بررسی کنید.

$$f'(۱) = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{|x^{۲} - ۱| - ۰}{x - ۱}$$

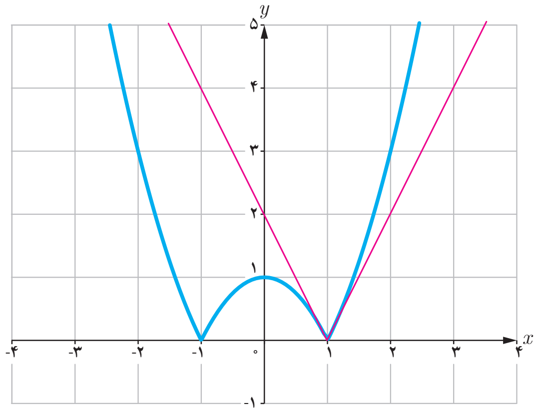


برای محاسبه $f'(۱)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to ۱^{+}} \frac{|x^{۲} - ۱|}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^{+}} \frac{x^{۲} - ۱}{x - ۱} = ۲$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۱^{-}} \frac{|x^{۲} - ۱|}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^{-}} \frac{-(x^{۲} - ۱)}{x - ۱} = -۲$$

بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = ۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x = ۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = ۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = ۱$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲− است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x = ۱$ می‌نامیم و با $f'_{+}(۱)$ و $f'_{-}(۱)$ نمایش می‌دهیم.



در مثال فوق f در $x=۱$ پیوسته است ولی f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت: شیب نیم مماس راست $= f'_+(۱)$ شیب نیم‌مماس چپ $= f'_-(۱)$

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب

$y-۰=۲(x-۱)$ یا $y=۲x-۲$ نیم مماس راست

$y-۰=-۲(x-۱)$ یا $y=-۲x+۲$ نیم مماس چپ

می‌باشند.

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق f در $x=-۱$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با آنکه پیوستگی یک تابع لزوماً مشتق‌پذیری آن را نتیجه نمی‌دهد، امّا عکس آن همواره درست است، به‌عبارت دیگر:

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)=$$

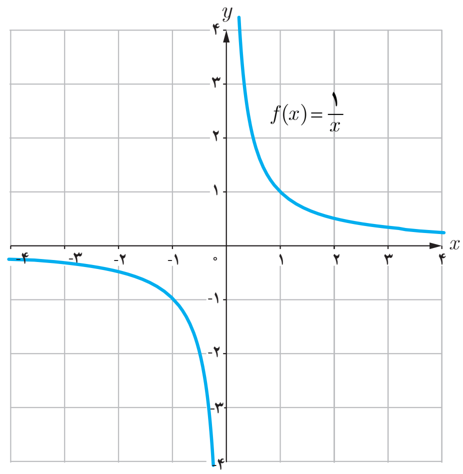
$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=۰.f'(a)=۰$$

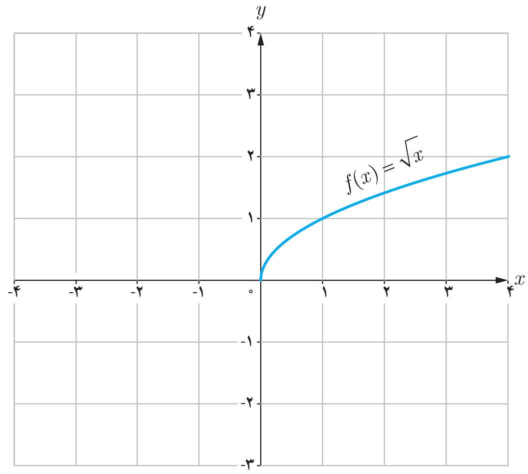
بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=۰$ و از آنجا $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

> اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

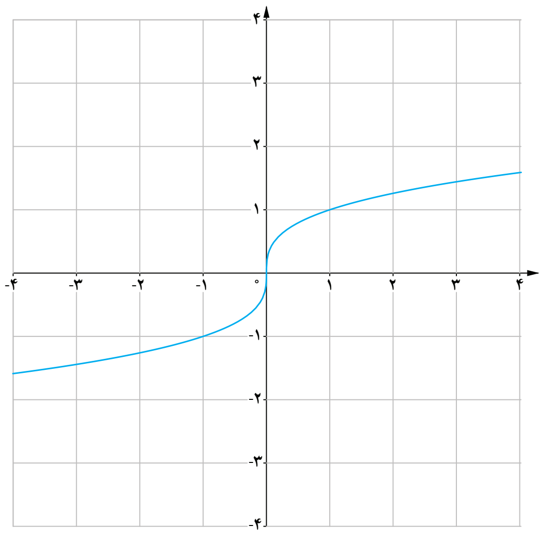
✤ **مثال**: توابع $f(a)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(۰)$ و $g'(۰)$ موجود نیست.





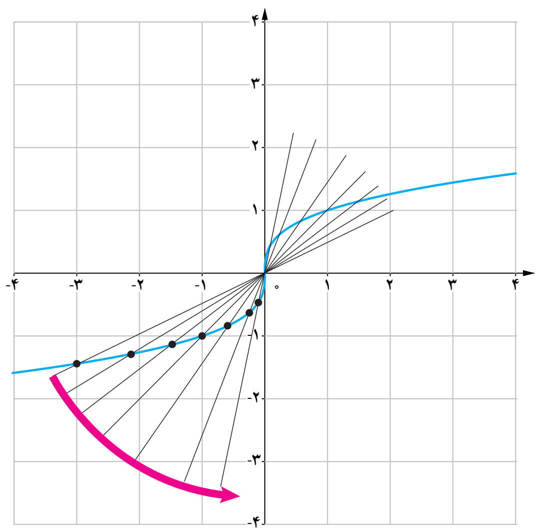
اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

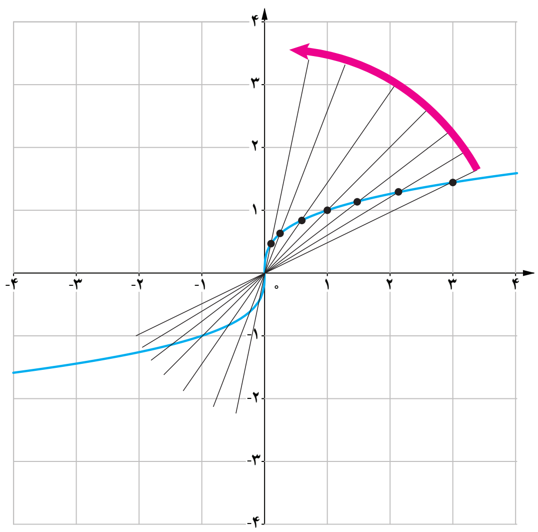
تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۰$ بررسی کنید.



$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{\frac{۱}{۳}}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{\frac{۲}{۳}}}=\infty$$

شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=۰$ نزدیک می‌شوند.





تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و خط $x=۰$ را مماس قائم منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را مماس قائم بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$.

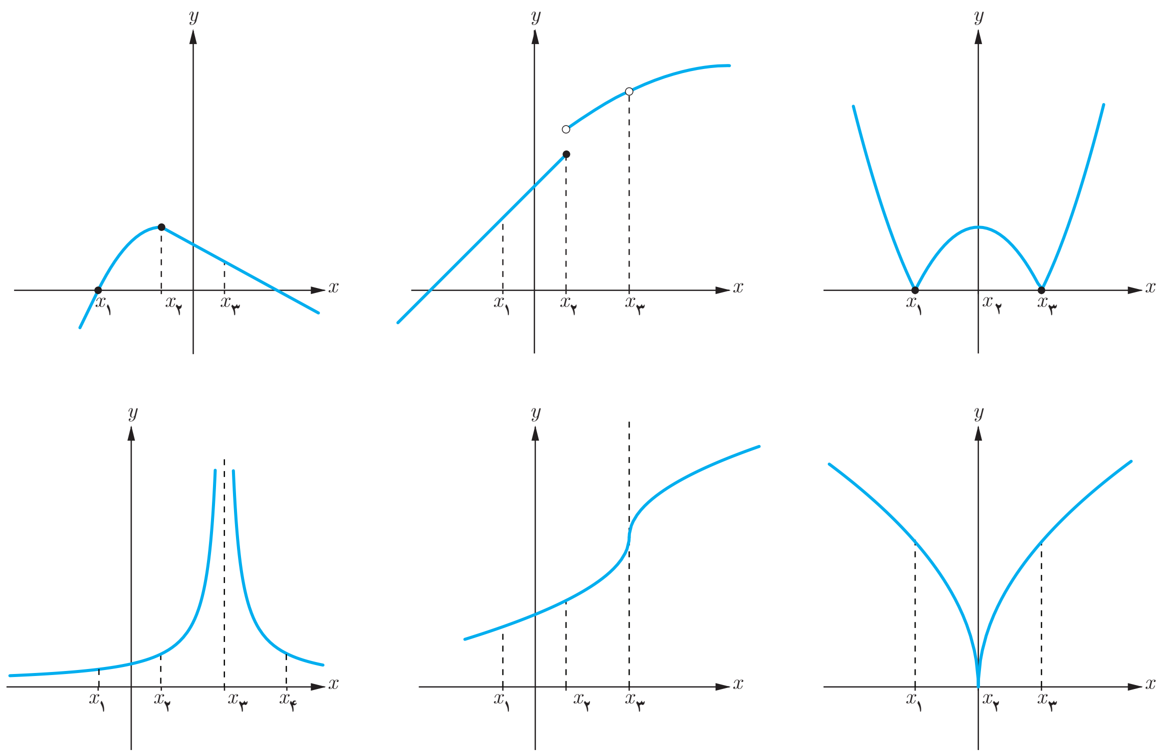
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد.

پ) هر دو نامتناهی باشند (مماس قائم).

کار در کلاس

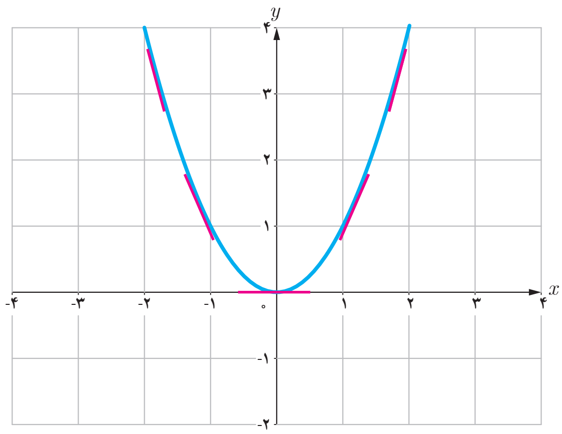
در هر شکل از بین نقاط $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ کدام‌ها مشتق‌پذیر نیستند؟



تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه معین آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین نقاط متعلق به یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x) = x^۲$ را درنظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید. (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند.)

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲) = \lim_{x \to -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{x - (-۲)} = \lim_{x \to -۲} \frac{x^۲ - ۴}{x + ۲} = \lim_{x \to -۲} (x - ۲) = -۴$$

$$f'(\sqrt{۳}) = \lim_{x \to \sqrt{۳}} \frac{f(x) - f(\sqrt{۳})}{x - \sqrt{۳}} = \lim_{x \to \sqrt{۳}} \frac{x^۲ - ۳}{x - \sqrt{۳}} = \lim_{x \to \sqrt{۳}} \frac{(x + \sqrt{۳})(x - \sqrt{۳})}{x - \sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{x^۲}{x} = ۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^۲$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.
به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^۲$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۲-x^۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x^۲+۲hx+h^۲-x^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

بنابراین $f'(x)=۲x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

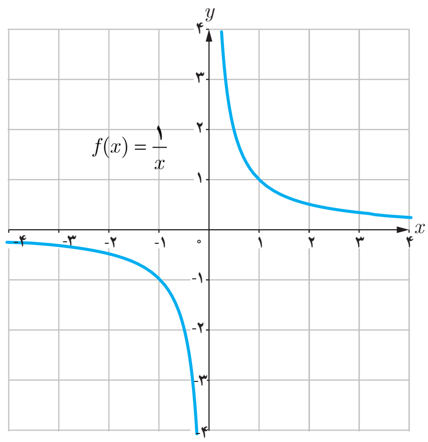
$$f'(-\frac{۱}{۵})=-\frac{۲}{۵}\ ,\ f'(\sqrt{۷})=۲\sqrt{۷}\ ,f'(۵۰)=۱۰۰$$

✤ **مثال :** اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(۳)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس به‌صورت مستقیم.

✤ **حل :** f در صفر ناپیوسته است، بنابراین $f'(۰)$ وجود ندارد و دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. اگر $x\neq ۰$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^۲}$$



با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(۳)=\frac{-۱}{۹}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x\neq ۰$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{۵})=\frac{-۱}{۵}$ و $f'(-۲)=-\frac{۱}{۴}$ ، $f'(۳)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳-x}{۳x}}{\frac{x-۳}{۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{۳x\,\cancel{(x-۳)}}=-\frac{۱}{۹}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

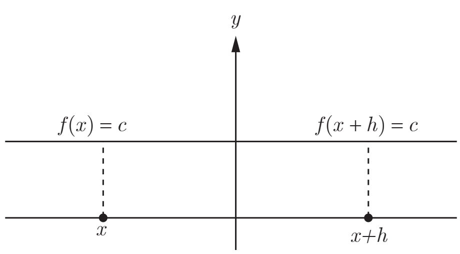
کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید.

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت برابر صفر است.



$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

به‌طورمثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.

۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$، آن‌گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$، به‌کمک این دستور داریم:

$$f'(x) = 3x^2$$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h\to 0}((x+h)^2 + x(x+h) + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1}$$

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$

آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

✤ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

اکنون با استفاده از دستور فوق داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

*۴ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $y = \sqrt{ax+b}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ موردنظر است، این موضوع باید در ارزشیابی رعایت شود.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(A)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\,(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}\,(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال : مشتق هر یک از توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4\Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1\Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2)\Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1}\Rightarrow t'(x)=\dfrac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(3x^2+5)$ پ) $h(x)=\frac{x}{2x^2+x-1}$

۲ اگر $f(2)=3$ و $f'(2)=5$ و $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$

مطلوب است $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم:

$f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

✤ **اثبات:** با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(\sin x\frac{\cos h-1}{h})+\lim_{h\to 0}(\cos x\frac{\sin h}{h})$$

در حسابان (۱) دیدیم که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0\ ,\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

بنابراین: $f'(x)=(\sin x)(0)+(\cos x)(1)\Rightarrow f'(x)=\cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x)=\cos x$ داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=(\cos x)(0)-(\sin x)(1)=-\sin x\Rightarrow g'(x)=-\sin x$$

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به‌دست آورد.

مثال : مشتق $f(x)=\text{tg}x$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=\text{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^{۲} x}=\frac{۱}{۱+\cos^{۲} x}=۱+\text{tg}^{۲}x$$

کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin x\ \text{tg}x$

ب) $g(x)=\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب f با g را با fog نمایش می‌دهیم، در این صورت مشتق تابع مرکب fog در نقطه x از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

مثال : اگر $h(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x)=x^{۷}$ و $g(x)=x^{۲}+۳x+۱$. آن‌گاه : $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))=(۲x+۳)=f'(g(x))$$

اگر $g(x)=u$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)=u^{۷}\Rightarrow f'(u)=۷u^{۶}=۷(g(x))^{۶}=۷(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$$

بنابراین :

$$h'(x)=(۲x+۳)(۷)(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد :

اگر u تابعی از x و f تابعی از u باشد :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y=\sin^{۲}x$ را به‌دست آورید.

حل : با فرض $\sin x=u$ داریم : $y=u^{۲}$ و از آنجا :

$$y'=u'\ .\ ۲u=(\cos x)(۲)(\sin x)=۲\sin x\cos x$$

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ب) $g(x) = \cos^{۳} x$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

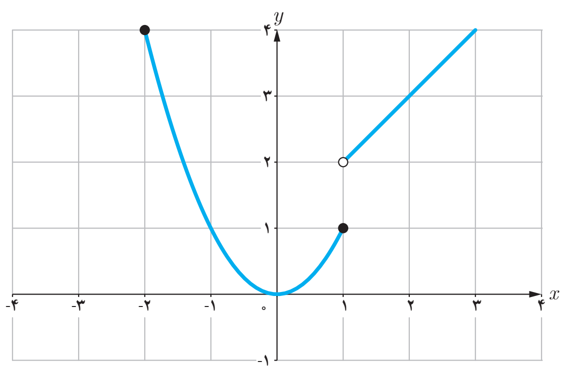
تابع f روی بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a\,,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a\,,b)$ و $(a\,,b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.
تابع f روی بازه $[a\,,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه …
تابع f روی بازه $(a\,,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه …

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

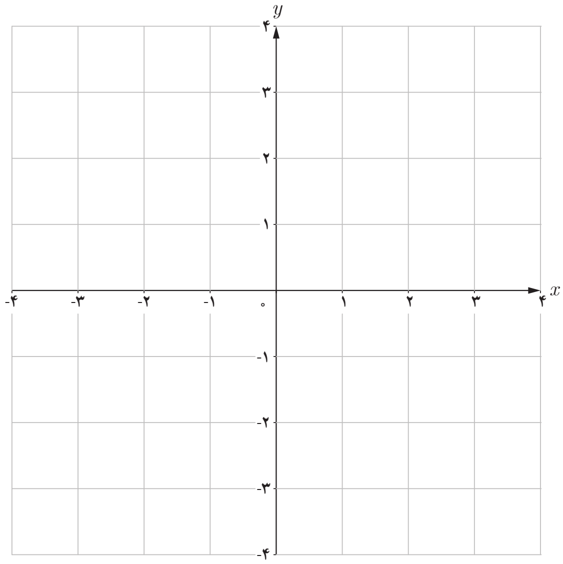
مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & -۲ \le x \le ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.



f روی بازه‌های $[-۲\,,۱]$ و $(۱\,,\infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[۱\,,۲]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$ ، مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1\,,\,1]$، $(2\,,\,5)$ و $[-2\,,\,0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم و سوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم. مشتق مرتبه سوم $y'''=f'''(x)$ نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شود.

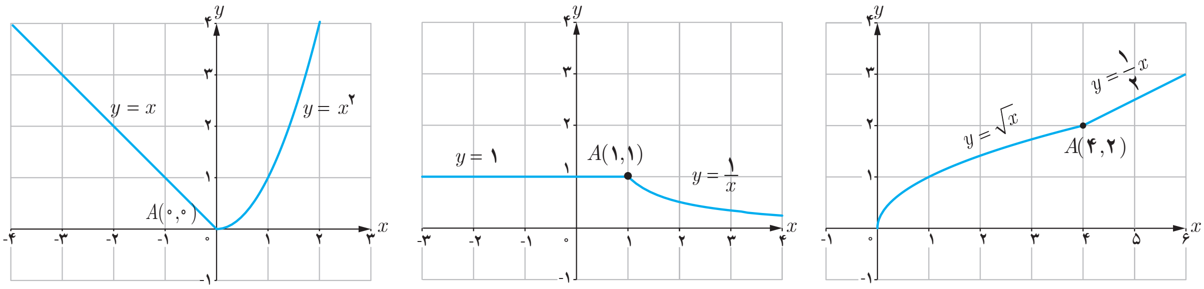
مثال : اگر $y=3x^4+2x^2-1$ آن‌گاه :

$$y'=12x^3+4x\,,\ y''=36x^2+4\,,\ y'''=72x$$

تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



۳ اگر

$$f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\leq x\leq ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴

الف) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط یکسان باشد.

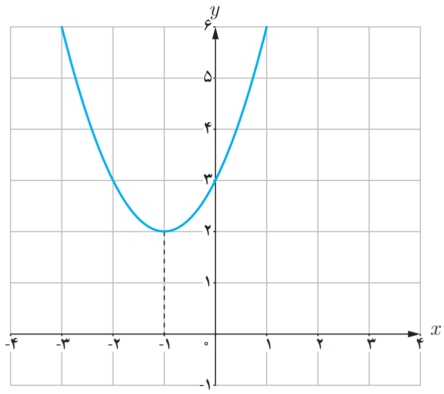
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

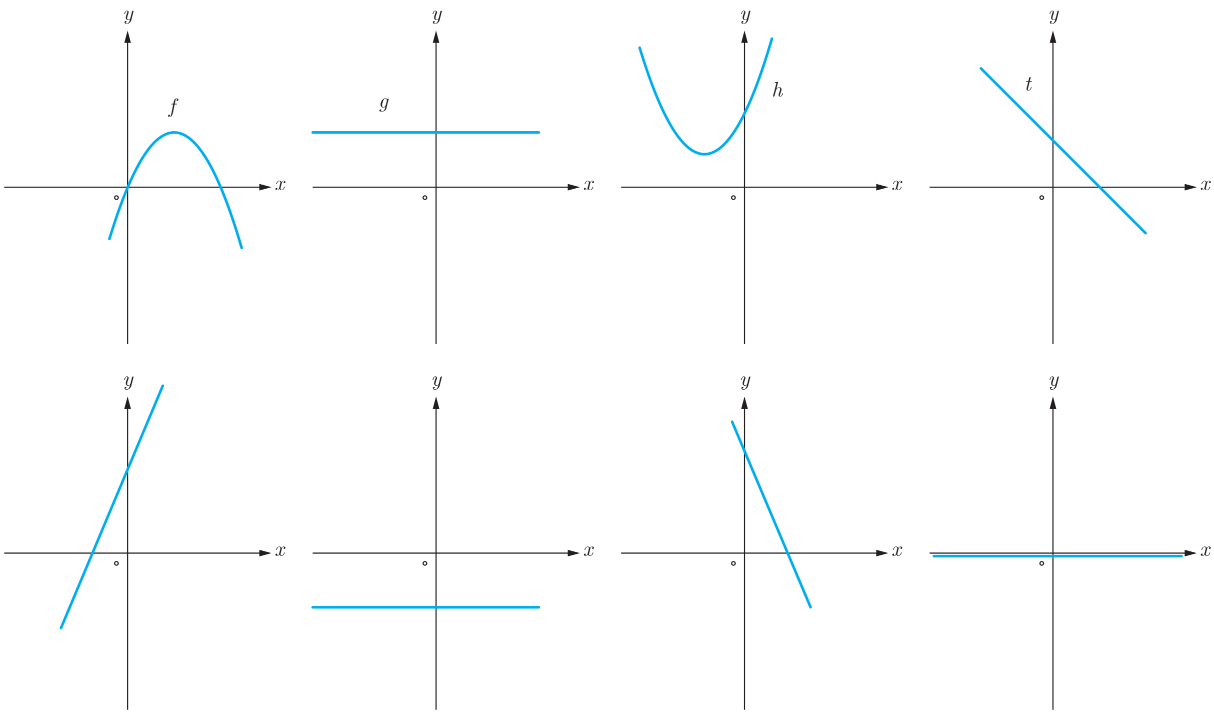


۶ ثابت کنید که مشتق تابع $y = mx + h$ شیب خط $y = mx + h$ است.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط ۲ و ۲− بررسی و نمودار f' را رسم کنید.

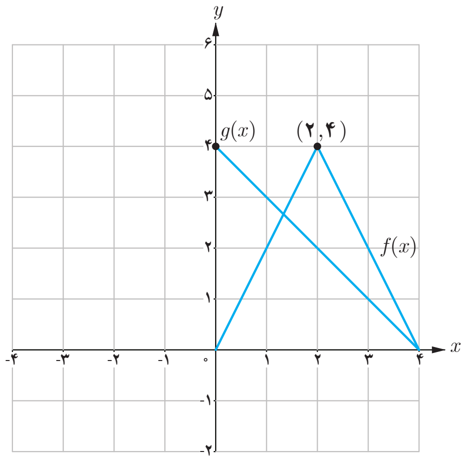
۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

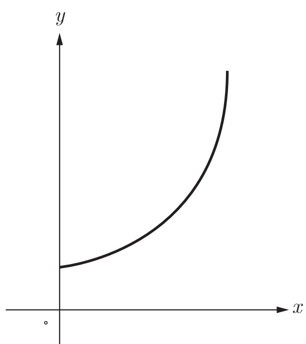
الف) مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$

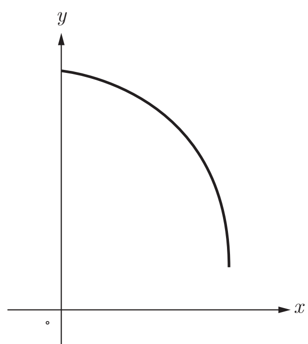


۱۱ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۲ با استفاده از جدول زیر مشخص کنید که کدام‌یک از دو نمودار داده شده، می‌تواند f' را نمایش دهد.



الف



ب

x	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
$f(x)$	۱۰	۵۵	۹۸	۱۳۹	۱۷۷	۲۱۰	۲۳۷	۲۵۷	۲۶۸

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

پ) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ت) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$

ب) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

پ) $f(x)=\mathrm{tg}^2 x-2\cos x$

ت) $f(x)=\sin x\cos 2x$