حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

فصل ۳

۱ حدهای نامتناهی

۲ حد در بی‌نهایت

درس ۱

حدهای نامتناهی

فعالیت

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله تابعی با ضابطه $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است مثلاً هزینه پاک‌سازی ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه $f(۲۰)=۶۳/۷۵$ است و این بدین معنی است که ۶۳/۷۵ میلیون تومان برای این کار لازم است.

الف) جدول زیر را با توجه به تابع f، کامل کنید. اعداد سطر دوم جدول چه چیزی را نشان می‌دهد؟

x	۲۰	۴۰	۵۰	۸۰	۹۰
$f(x)$	۶۳/۷۵				

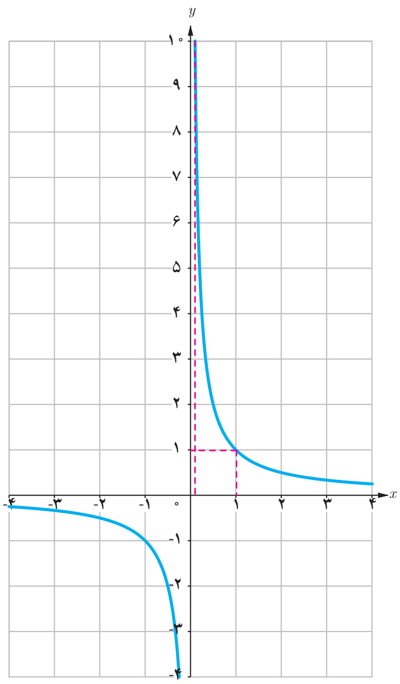
ب) اگر بخواهیم ۹۵ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی شود چقدر باید هزینه کنیم؟

پ) چرا هیچ‌گاه صددرصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

همان‌طور که ملاحظه شد با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد و هرگاه x به قدر کافی به عدد ۱۰۰ نزدیک شود مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد.

فعالیت

در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ آشنا شدید. می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی نقطه $x=۰$ بررسی کنیم.



۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x)$	تعریف نشده	...	۱۰۰۰	...	۱۰	...

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟

۳ در حالتی که $x \to 0^+$ آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود (از سمت راست)، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت مفروضی بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کنیم در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

این نمادگذاری بدین معنی نیست که ∞ را عدد به حساب آورده‌ایم. همچنین بدین معنی نیست که حد مورد نظر وجود دارد.

کار در کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

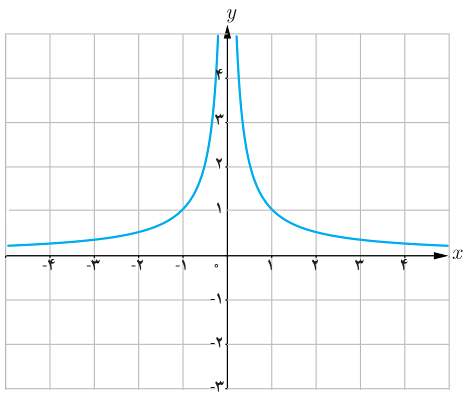
الف) جدول روبه‌رو را کامل کنید :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-0/1$	$-0/001$	$-0/0001$	$-0/00001$
$f(x)$	-1				-1000		

ب) اگر بخواهیم $f(x)$ از -10^6 کوچک‌تر شود مقدار x باید به چه عددی نزدیک شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

ت) در مورد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟



مثال : نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع را در نقطه $x = 0$ بررسی کنیم به جدول زیر توجه کنید :

x	± 1	$\pm 0/5$	$\pm 0/1$	$\pm 0/01$	$\pm 0/001$	$\pm 0/0001$
$f(x)$	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کند و در نتیجه $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$ وجود ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در هر دو طرف a (به جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر بخواهیم) از هر عدد مثبت بزرگ کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

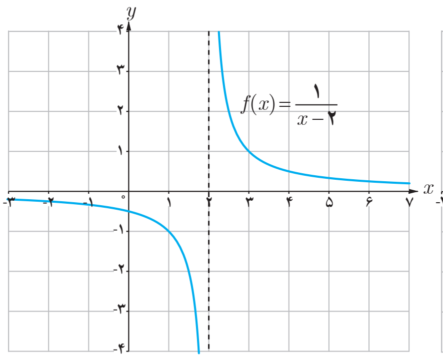
تعریف مشابهی از حدّ در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و خیلی کوچک منفی می‌شود در زیر وجود دارد.

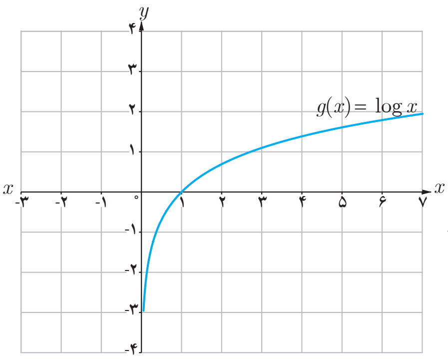
تعریف :

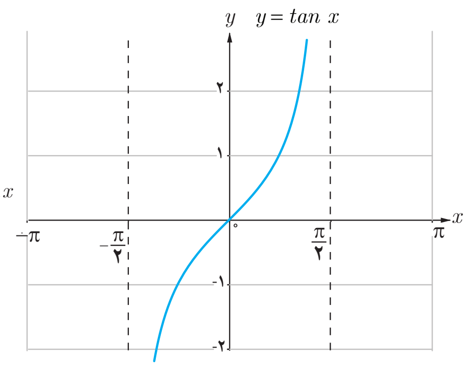
فرض کنید تابع f در هر دو طرف به جز احتمالاً در خود a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

کار در کلاس

با توجه به نمودار توابع زیر حدهای نامتناهی را مشخص کنید.







$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}^+} t(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} t(x)=\cdots$

قضایای حدهای بی‌نهایت

قضایای زیر در مورد حدهای بی‌نهایت برقرارند که در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

قضیه ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

قضیه ۲ : الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و بالعکس.

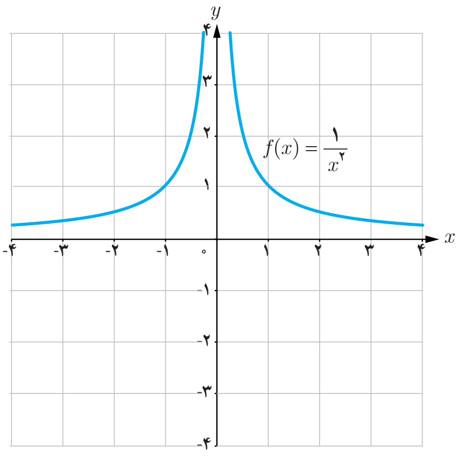
ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و بالعکس.

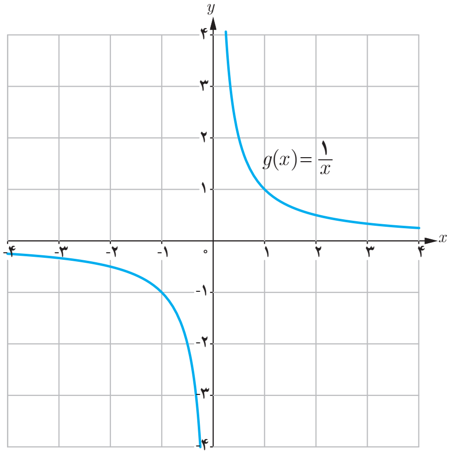
کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} =$





قضیه ۳ : اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{۴-x^۲}$ را محاسبه کنید.

حل : وقتی $x \to ۲^-$ مخرج کسر یعنی $۴ - x^۲$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند زیرا

$x<۲ \Rightarrow x^۲<۴ \Rightarrow ۴-x^۲>۰$

از طرفی $\lim_{x\to ۲^-} x+۱ = ۳$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{۴-x^۲} = +\infty$

مثال : $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x-۱}{\sin x}$ را محاسبه کنید.

حل : وقتی $x \to ۰^+$ حد صورت کسر برابر -۱ و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که x در ربع اوّل دایره مثلثاتی است مقدار $\sin x$ عددی مثبت است در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x-۱}{\sin x} = -\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱ $\lim_{x\to -۲^+} \frac{۱-x}{x+۲}$

۲ $\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x-۲}$

قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\circ$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\tan x}$ را محاسبه کنید.

روش اوّل : (استفاده از قضیه ۴) داریم $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=-\infty$ از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} x+۱=\dfrac{\pi}{۲}+۱$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\tan x}=\circ$

روش دوم : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{(x+۱)\cos x}{\sin x}=\dfrac{(\frac{\pi}{۲}+۱)\times\circ}{۱}=\circ$

اعمال روی حدود نامتناهی

فعالیت

۱ توابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲}$ و $g(x)=x+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\circ} g(x)$ را به‌دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim\limits_{x\to\circ}\big((f+g)(x)\big)$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\circ} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)=+\infty$

ب) اگر $L>\circ$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)=+\infty$

اگر $L<\circ$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)=-\infty$

تذکر : قضیه برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

کار در کلاس

۱

قضیه ۵، در حالتی که $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ به طریق مشابه برقرار است آن را بیان کنید.

۲ در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا از قضیه ۵ می‌توان برای محاسبه تابع‌های $f+g$ و یا $f\times g$ استفاده کرد. سپس حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

الف)
$$f(x) = \frac{۱}{x^{۲}} \ , \ g(x) = \frac{۱}{x}$$
$$\lim_{x\to ۰^-}(f+g)(x) =$$

ب)
$$f(x) = \frac{-۱}{x} \ , \ g(x) = \frac{۱}{x}$$
$$\lim_{x\to ۰^-}(f+g)(x) =$$

پ)
$$f(x) = x^{۳} \text{ و } g(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\lim_{x\to ۰}(f\times g)(x) =$$

تذکر : قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین $+\infty$ و $-\infty$ قرینه هم نیستند بنابراین در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به‌گونه‌ای می‌نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

مثال : به حدود زیر توجه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x})$ ب) $\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x})$ پ) $\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}$

در محاسبه حدود هر سه قسمت به $\infty-\infty$ می‌رسیم از آنجا که ∞ یک عدد نیست نمی‌توان گفت حاصل حدود مذکور برابر صفر است. برای محاسبه حدود فوق می‌توان نوشت :

الف) $\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x}) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-۱}{x} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۰}{x} = ۰$

ب) $\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x}) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۲-۱}{x} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x} = +\infty$

پ) $\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{x^{۲}} = -\infty$

مثال : $\lim\limits_{x\to -۴^-}\left(\frac{۲}{x^۲+۳x-۴}-\frac{۳}{x+۴}\right)$ را محاسبه کنید.

حل : اگرچه به‌صورت مستقیم عمل کنیم به حالت $+\infty-\infty$ می‌رسیم که نمی‌توان از قضایا استفاده نمود.
امّا اگر عبارت جلوی حد را ساده کنیم و به‌صورت یک کسر بنویسیم. سپس حدگیری را انجام دهیم داریم :

$$\lim_{x\to -۴^-}\frac{۲(x-۱)-۳}{x^۲+۳x-۴}=\lim_{x\to -۴^-}\frac{۲x-۵}{x^۲+۳x-۴}\quad (*)$$

حد صورت برابر ۱۳− است با توجه به جدول تعیین علامت برای مخرج کسر داریم :

x		-۴		۱	
$x^۲+۳x-۴$	+	۰	−	۰	+

وقتی $x\to -۴^-$ حد مخرج کسر فوق با مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود و بنا به قضیه ۳ حد $(*)$ برابر $-\infty$ خواهد بود.

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

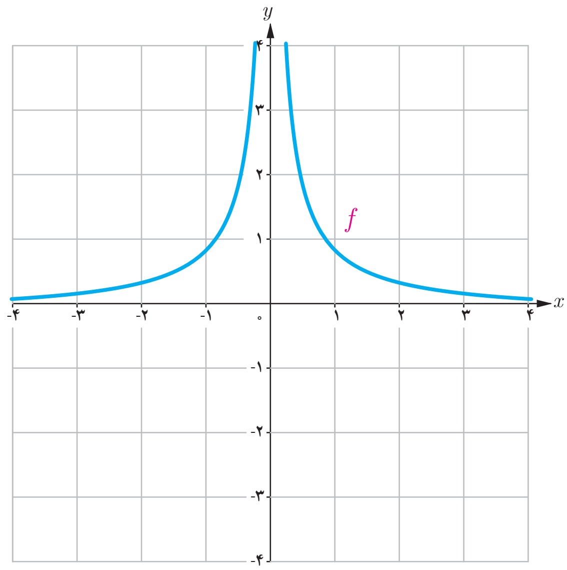
۱ $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}$

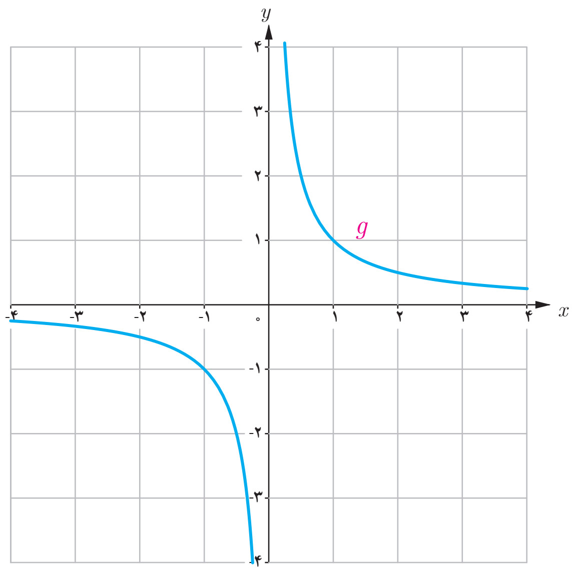
۲ $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x}$

۳ $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x-۱}{x+۱}-\frac{x+۱}{x-۱}$

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.





این دو تابع در بازه‌های $(۰\,,+\infty)$ و $(-\infty\,,۰)$ پیوسته‌اند ولی در نقطه $x=۰$ تعریف نشده‌اند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} g(x)=-\infty$

خط $x=۰$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$$

مثال : مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}$ را به‌دست آورید.

حل : از $x^{۲}-۲x-۳=۰$ نتیجه می‌شود $x=-۱$ یا $x=۳$ شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim\frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}=-\infty$$

علاوه بر آن $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=+\infty$ در نتیجه خط $x=-۱$ مجانب قائم منحنی f است. از طرفی

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}$$

خط $x=۳$ شرایط لازم برای مجانب قائم را نداشت لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم $x=-۱$ دارد.

کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲-x-۶}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدود نامتناهی ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(\dfrac{۱}{x}-\dfrac{۱}{x^۲})=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

۲ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{۲}{x-۳}-\dfrac{۳}{x^۲-۹}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x+۱}{x^۲-۹}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱\ ,\ ۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲\ ,\ ۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}$

درس ۲

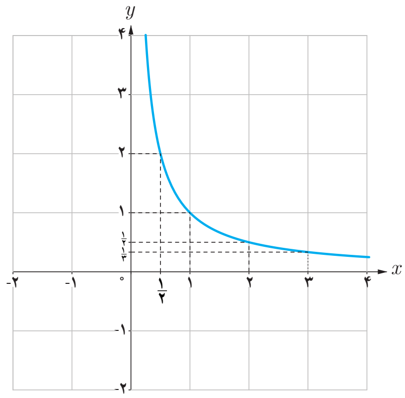
حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا x را به سمت عددی میل می‌دادیم و نتیجه این می‌شد که مقدارهای y به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) می‌شدند.

در این درس x را به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) در نظر می‌گیریم و تغییرات y را بررسی می‌کنیم که در رسم نمودارها برای بررسی رفتار انتهایی نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(۰ , +\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۶}$
$f(x)$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۵}$	...	...	...	...	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۳}$ کمتر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

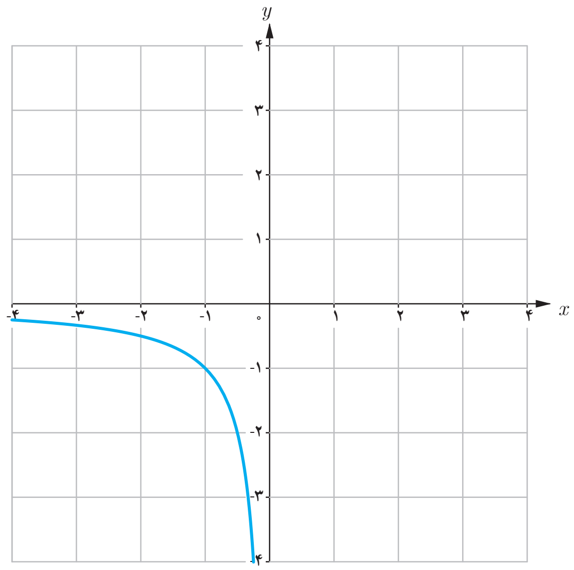
۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{۱}{۱۰}$ کمتر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچک‌تر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا به هر میزان دلخواه فاصله $f(x)$ از محور xها را می‌توان کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد که مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه مناسب بزرگ انتخاب کنیم در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(-\infty\,,۰)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$-۱۰^۴$	$-۱۰^۳$	-۱۰۰	-۱۰	-۵	-۲	-۱
$f(x)$							

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{۱}{۱۰^۵}$ شود، x از چه عددی کوچک‌تر در نظر گرفته شود؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{۱}{۱۰^۶}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد اگر x از طریق اعداد منفی از هر عدد منفی کوچک‌تر شود می‌توان مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$

تذکر : منظور از $x\to\pm\infty$ آن است که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ لذا با توجه به فعالیت‌های بالا به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

به‌طور کلی می‌توان گفت :

برای هر تابع $f(x)$ که روی بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آنکه x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشد در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$$

همچنین برای هر تابع $f(x)$ که در بازه $(-\infty\,,a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند. به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرطی که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد. در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $-\infty$، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$$

کار در کلاس

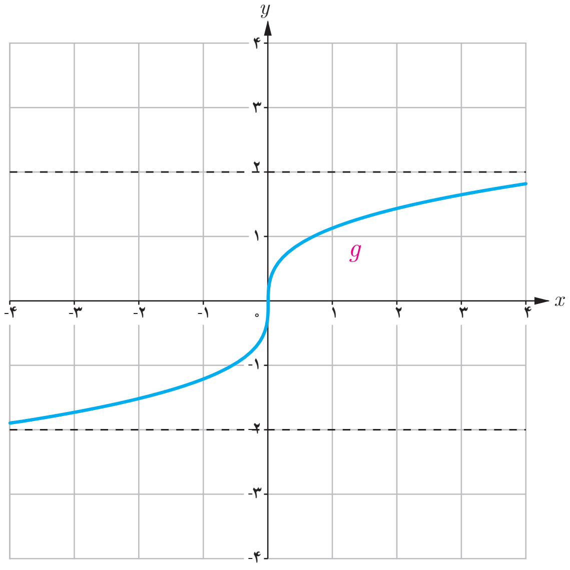
با استفاده از نمودارهای داده شده، حدود نامتناهی زیر را به‌دست آورید.

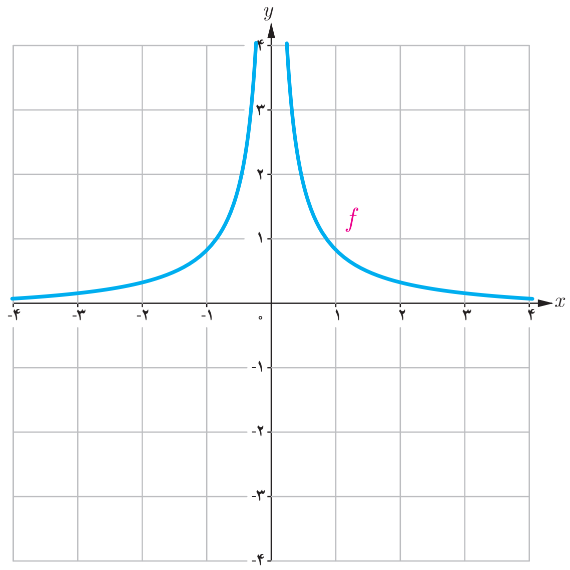
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =$





قضیه ۶ : اگر a عددی ثابت و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$

قضیه ۷ : اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_2$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = L_1 L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (با فرض $g(x) \neq 0$ و $L_2 \neq 0$)

تذکر : قضیه فوق برای حالت $x \to -\infty$ نیز برقرار است.

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}$

حل :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

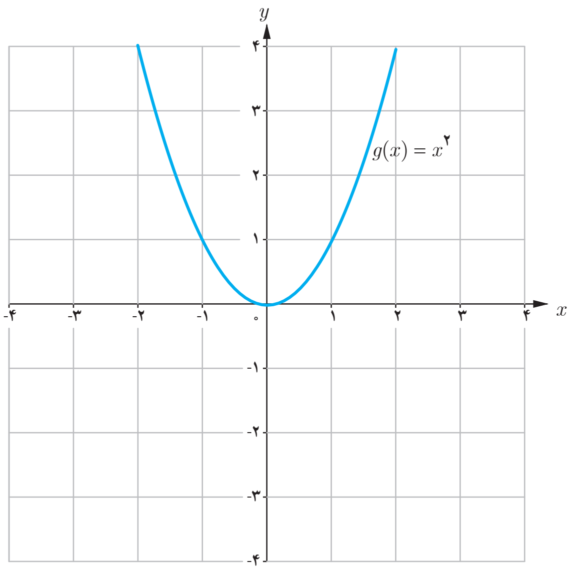
$$\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})=\lim\limits_{x\to+\infty}۳+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵}{x^۳}=۳+۰=۳$$

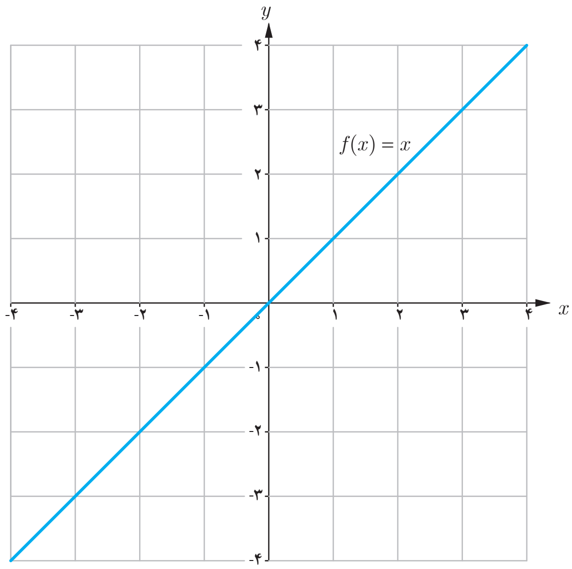
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}۲+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}۴}=\frac{۲+۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

حدود نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع در $+\infty$ یا $-\infty$ ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ‌تر شوند و از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲$ در





شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر می‌شوند.

همچنین ممکن است با کوچک شدن مقادیر x (منفی) مقدار $f(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای کوچک‌تر شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد تعیین شده‌ای کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}=+\infty$

همچنین اگر با رفتن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ برود می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^{2}=-\infty$

کار در کلاس

۱ به طریق مشابه مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع $y=x$ و $y=x^{2}$ حدود زیر را مشخص کنید.

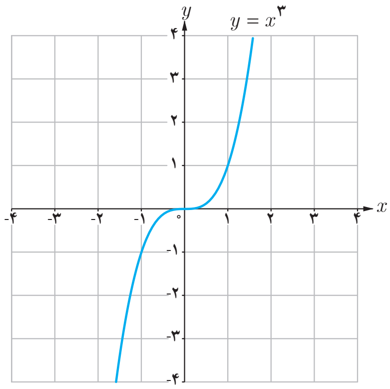
$$\lim_{x\to-\infty} x=$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2}=$$

✤ **تذکر**: حدودی مانند $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ را حدود نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم.

فعالیت

تابع $f(x) = x^۳$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$-۱۰^۶$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$۱۰^۶$
$f(x)$	...	...	$-۱۰^۶$	...	۱	۱۰۰	...	...	...

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۳$ چه می‌توان گفت؟

قضیه ۸ : اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد آن‌گاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج :} \\ -\infty & n \text{ فرد :} \end{cases}$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-۲x^۳ + x - ۱)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (۳ - ۲x - ۵x^۴)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-۲x^۳ + x - ۱) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^۳(-۲ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -۲x^۳ = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (۳ - ۲x - ۵x^۴) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴} - \frac{۲}{x^۳} - ۵) = \lim\limits_{x\to+\infty} -۵x^۴ = -\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + ... + l$ (n عدد طبیعی) در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + l = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$$

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+\ldots+l$ و $g(x)=a'x^{m}+b'x^{m-۱}+\ldots+l'$ دو چند جمله‌ای $(m,n\in\mathbb{N})$ باشند نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{a}{a'}x^{n-m}$$

ب) در هر یک از حالت‌های $m>n$ و $m<n$ و $m=n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

پ) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۲}-۷x+۱۰}{۲x^{۴}-x+۳}$$

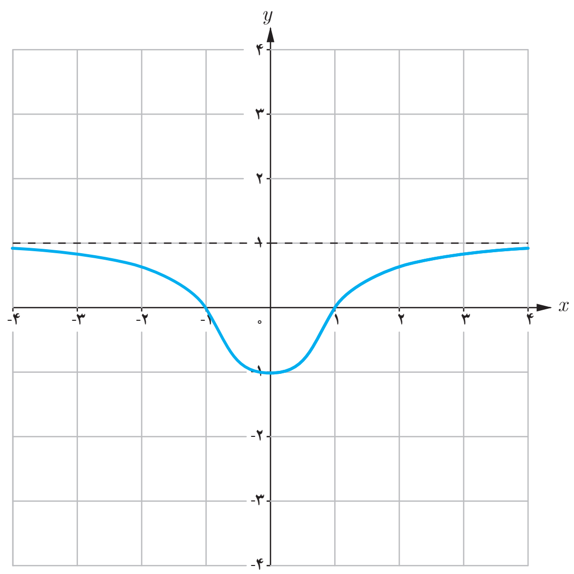
$$B=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^{۳}+x-۱}{۶x^{۳}-۲x+۱}$$

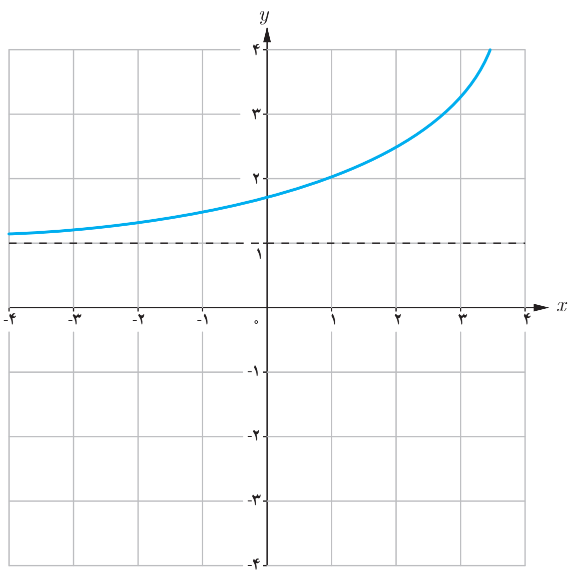
$$C=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}-x+۱}{۴x^{۳}+۲x-۱}$$

مجانب افقی

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامند به شرطی که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$

به عنوان مثال در هر یک از نمودارهای زیر خط $y=۱$ یک مجانب افقی تابع است. چرا؟





مثال : مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را به‌دست آورید.

حل : برای یافتن مجانب افقی تابع داریم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x+۱}=۲$

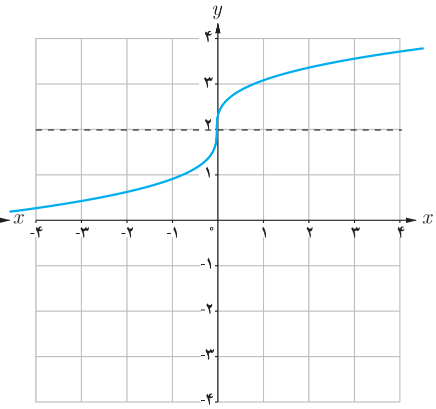
پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است.

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x=-۱$ مجانب قائم تابع است زیرا :

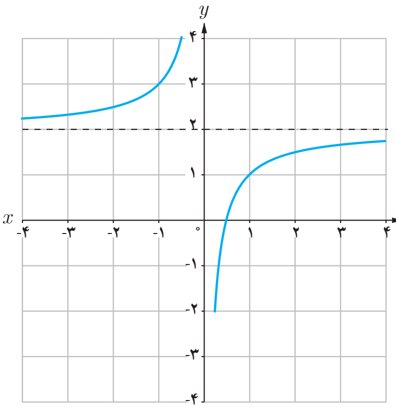
$$\lim_{x\to-۱^+}\frac{۲x+۱}{x+۱}=-\infty$$

کار در کلاس

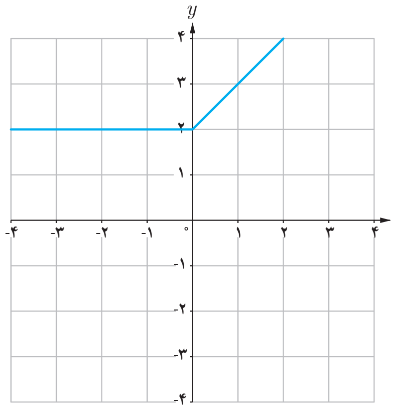
۱ خط $y=۲$ مجانب کدام‌یک از منحنی‌های زیر است؟



(الف)



(ب)



(پ)

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}$

ب) $g(x)=x^۳$

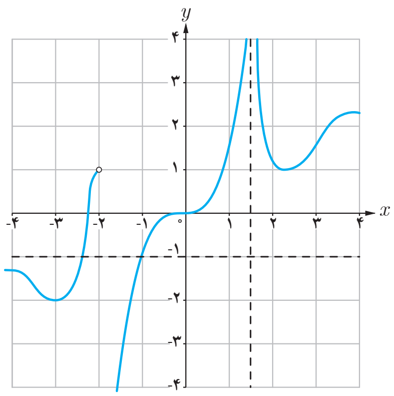
پ) $h(x)=\frac{x^۲+۱}{x+۱}$

تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=$

ج) همه مجانب‌ها

۳ حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{۳x+۵}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}$ ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^۳-۲x^۲)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} f(a)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty$

ت) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.

۶ آیا ممکن است نمودار $y=f(x)$ یکی از مجانب‌های قائمش را قطع کند؟

آیا ممکن است یکی از مجانب‌های افقی‌اش را قطع کند. جواب‌هایتان را با رسم نمودار توضیح دهید.