تابع

فصل ۱

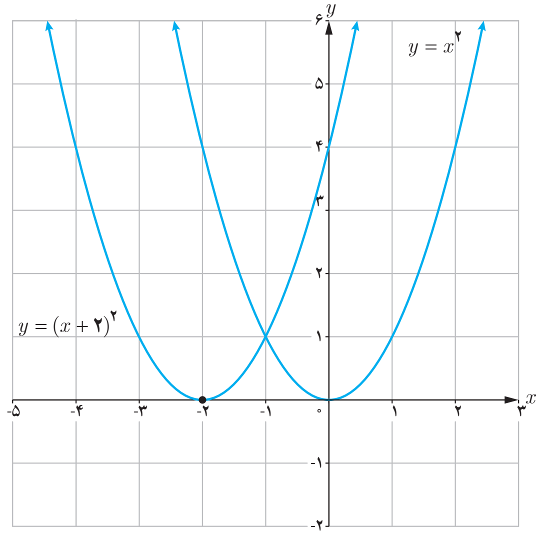
درس ۱

تبدیل نمودار توابع

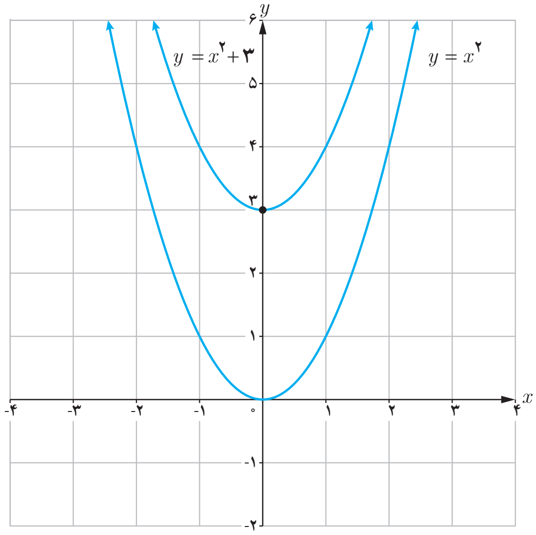
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار بعضی از توابع دیگر را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+۲)^۲$ و $y=x^۲+۳$ را به کمک نمودار تابع $y=x^۲$ رسم کنید.



(الف)



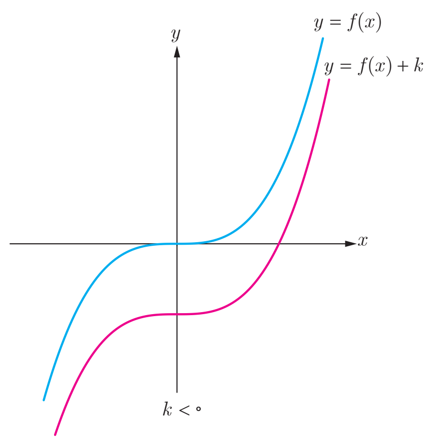
(ب)

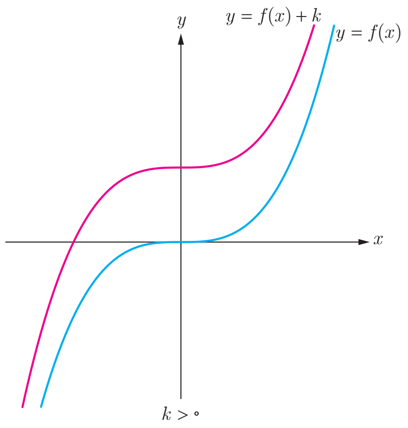
در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، در این صورت

$$g(x_۰)=f(x_۰)+k=y_۰+k$$

بنابراین $(x_۰,y_۰+k)$ یک نقطه از نمودار تابع g است، یعنی برای $k>۰$، هر نقطه از نمودار تابع g، دقیقاً k واحد بالاتر از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.



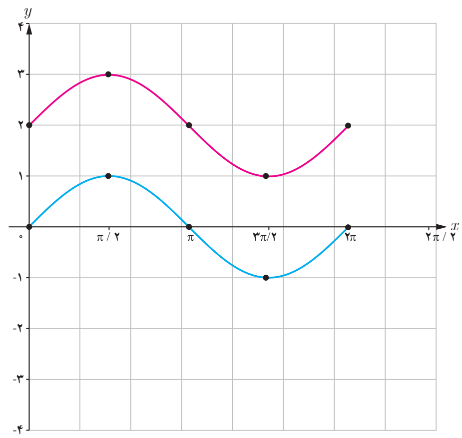


به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، در این صورت

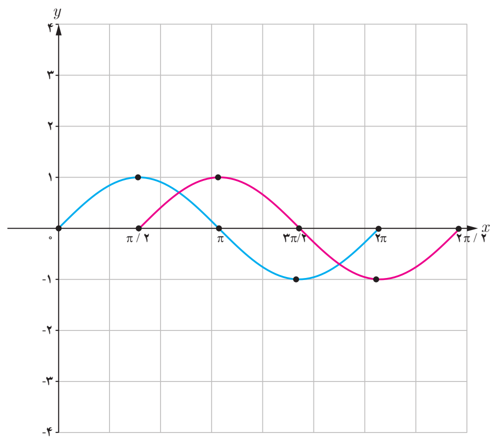
$$h(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0) = y_0$$

بنابراین $(x_0 - k\ , y_0)$ از نمودار h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



(الف)



(ب)

مثال : نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = \sin x + 2$ و $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)

کار در کلاس

۱

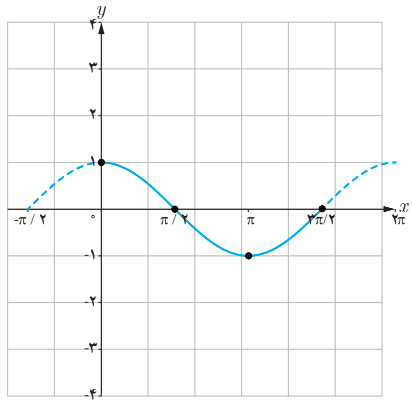
الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[۰,۹]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

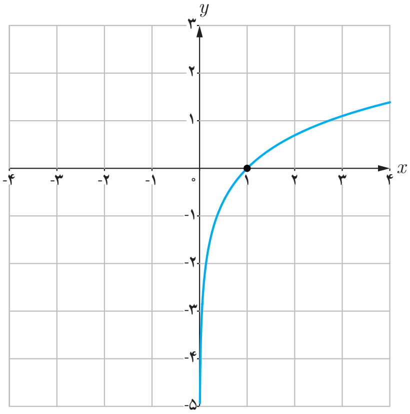
ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

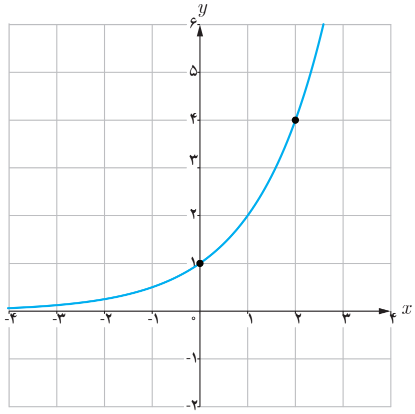
ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-۲)$	$g(x)=f(x)+۳$
دامنه	$[۰,۹]$		
برد			

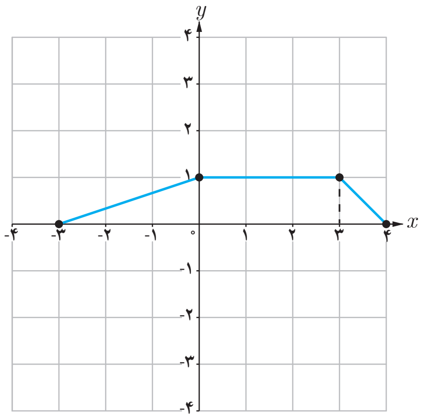
۲ در زیر، نمودار توابع $y=۲^x$، $y=\log x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=۲^{x-۱}+۲$، $y=\log(x+۲)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنید.







۳ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+۱)-۳$ را رسم کنید.

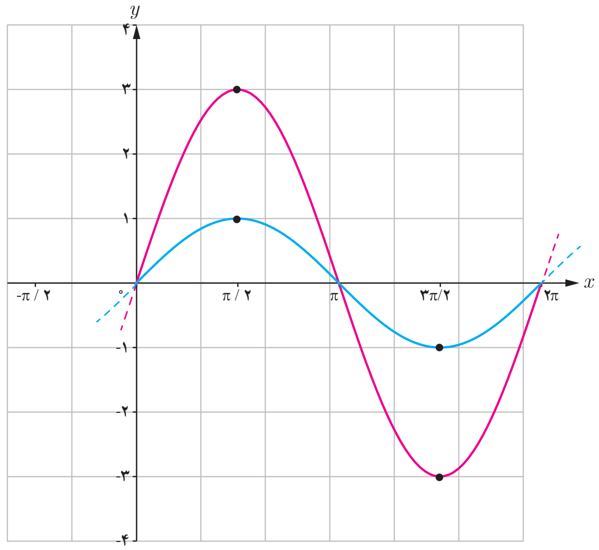


انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	۰	۱	۰	۱−	۰
$y=۳\sin x$	۰	۳	۰	۳−	۰
$y = \frac{۱}{۲}\sin x$	...	...	...	...	...



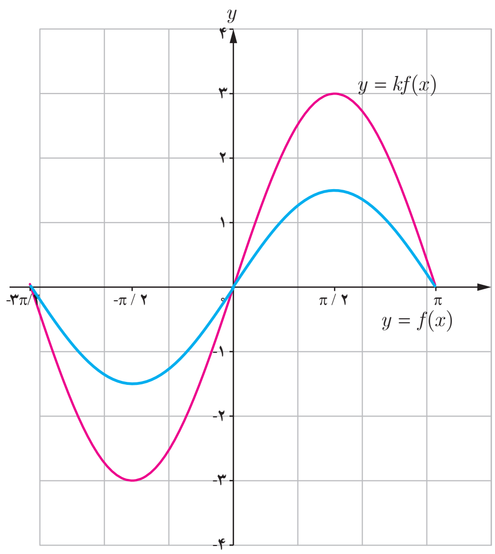
۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

در حالت کلی اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، در این صورت

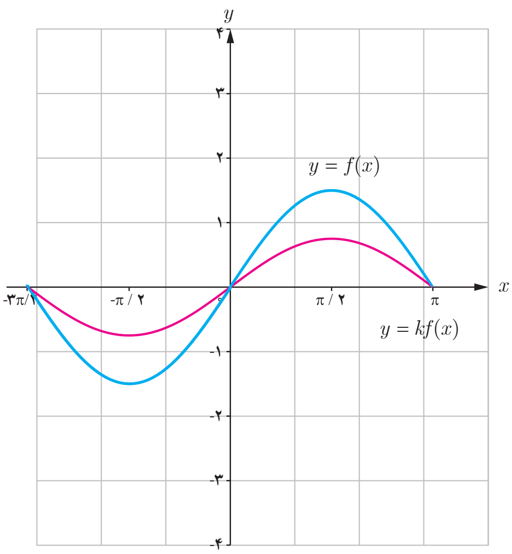
$$g(x_۰) = kf(x_۰) = ky_۰$$

بنابراین $(x_۰, ky_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x, y_۰)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



الف) $k > 1$



ب) $0 < k < 1$

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

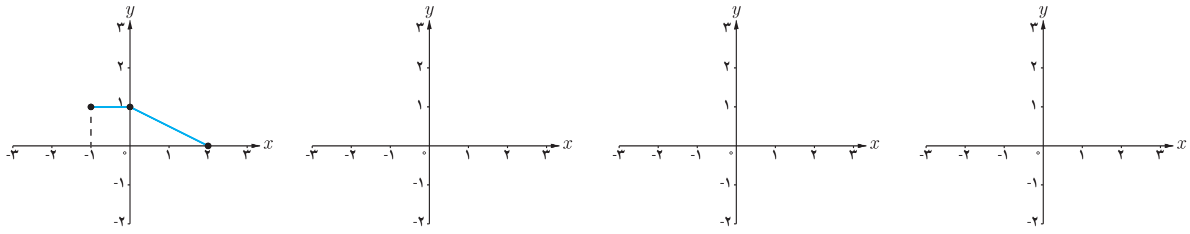
۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند به کمک نمودارهای بالا دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

۳ نمودار تابع $y=f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y=-f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.



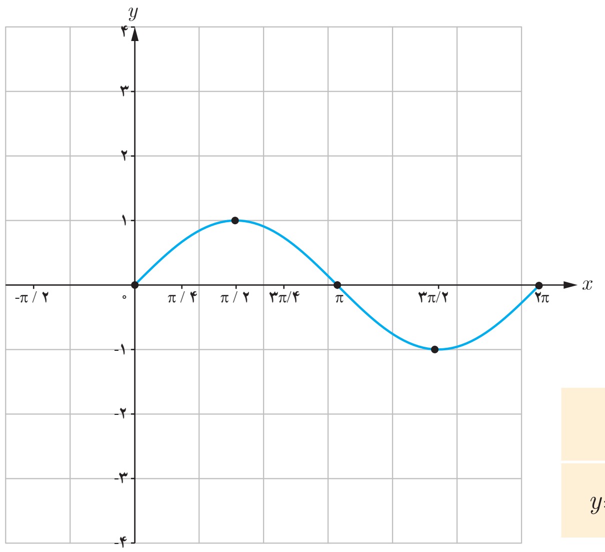
$y=f(x)$ — $y=f(x-۱)$ — $y=-f(x-۱)$ — $y=-f(x-۱)+۲$

انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y=\sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این نقاط نمودار این تابع را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم کنید.



x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y=\sin ۲x$	...	...	...	...	...

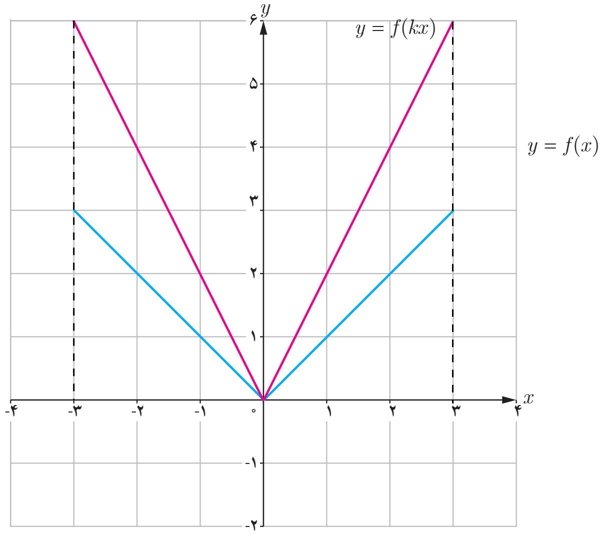
۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

در حالت کلی اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

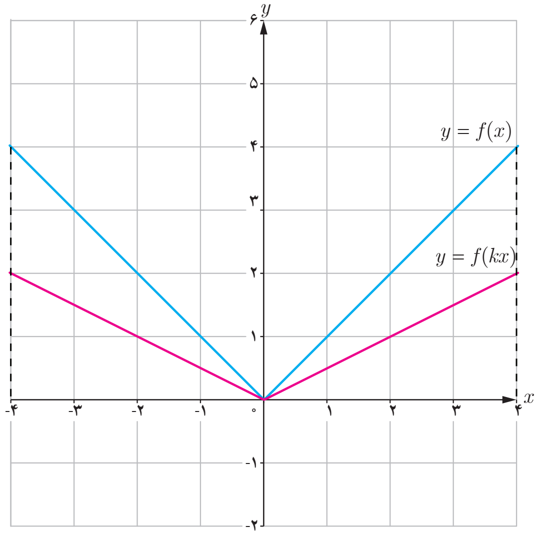
در این صورت :
$$g(\frac{x_\circ}{k}) = f(k\frac{x_\circ}{k}) = f(x_\circ) = y_\circ$$

بنابراین نقطه $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم تابع $y = f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.
در شکل های زیر، نمودارتابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > ۱$ و $\circ < k < ۱$ رسم شده است.



الف) $k > ۱$



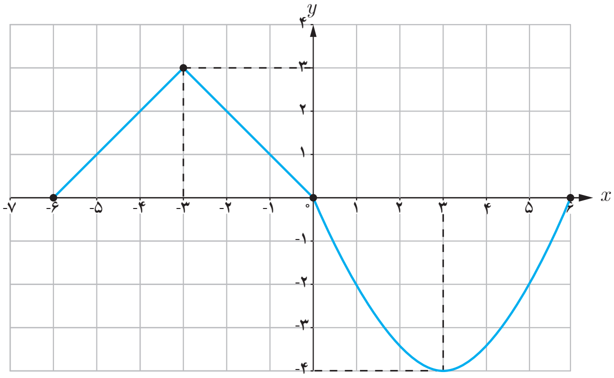
ب) $\circ < k < ۱$

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $\circ < k < ۱$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند به کمک نمودارهای بالا دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودارتوابع $y = f(۳x)$ و $y = f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.



۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos ۲x - ۱$

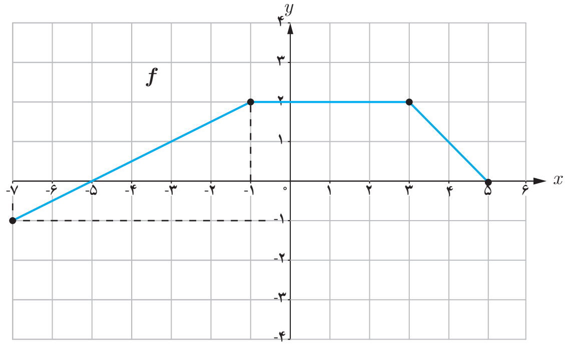
ب) $y = ۲\cos(\frac{x}{۳})$

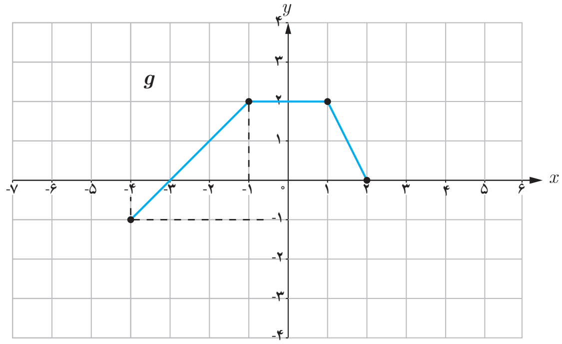
مثال : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودارتابع $g(x) = f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.

اگر $A = (x_۰ , y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، سپس $A' = \left(\frac{x_۰ - ۱}{۲} , y_۰\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا :

$$g\left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}\right) = f\left(۲\left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}\right) + ۱\right) = f(x_۰ - ۱ + ۱) = f(x_۰) = y_۰$$

بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده ، سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.





تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$

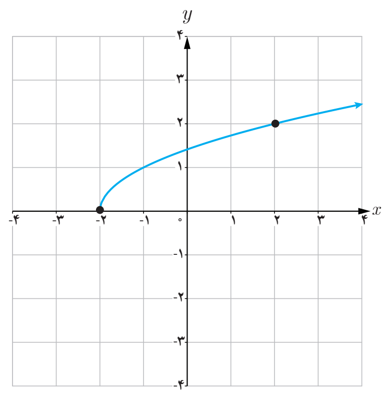
ب) $y=۲+\sqrt{x}$

پ) $y=-۲\sqrt{x}$

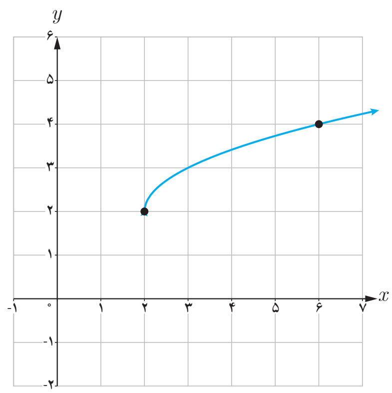
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$

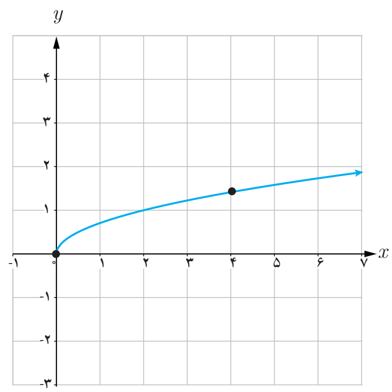
ج) $y=\sqrt{-۲x}$



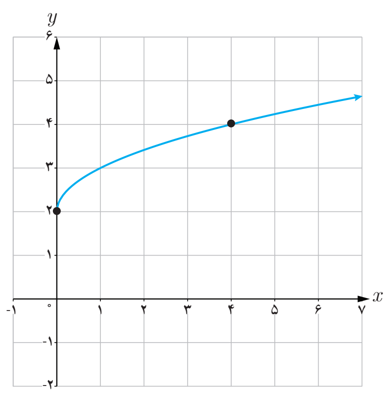
(a)



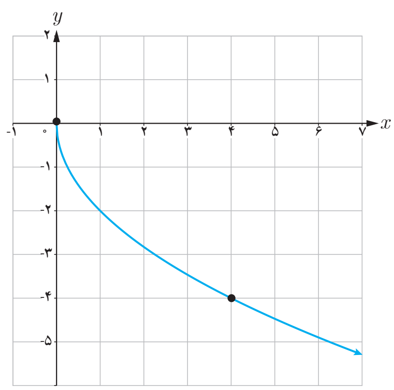
(b)



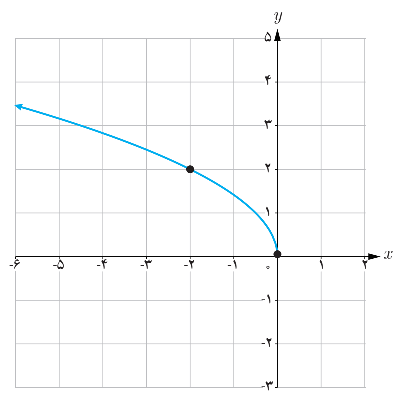
(c)



(d)

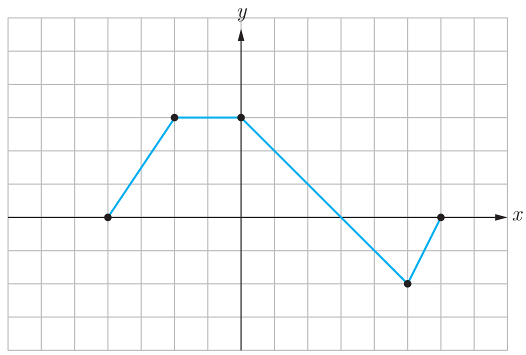


(f)



(e)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(-x)$

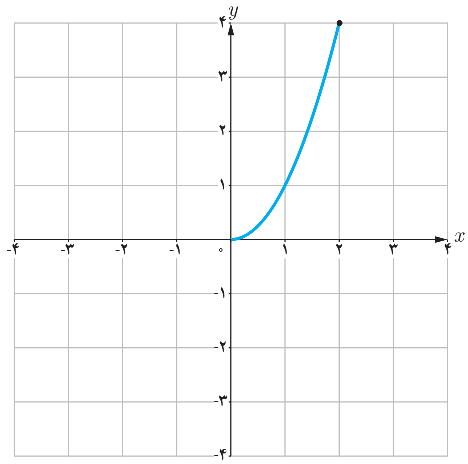
ب) $y = ۲f(x-۱)$

پ) $y = -f(x) + ۲$

ت) $y = f(۲x-۱)$

ث) $y = f(۳-x)$

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

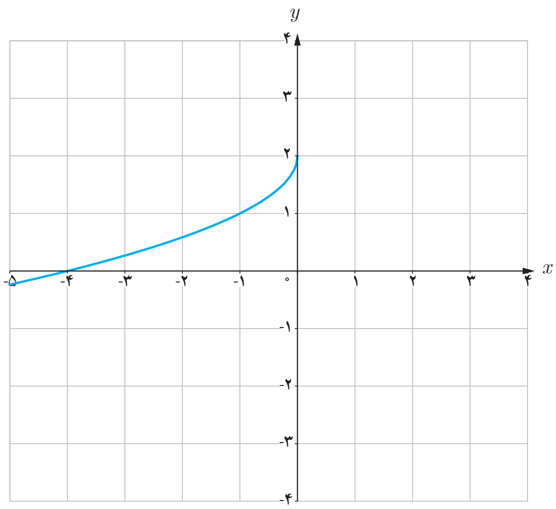


الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$

۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



درس ۲

تابع درجه سوم

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_۰, a_۱, a_۲, \dots, a_{n-۱}$ و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq ۰$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[۱]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۲ x^۲ + a_۱ x + a_۰$$

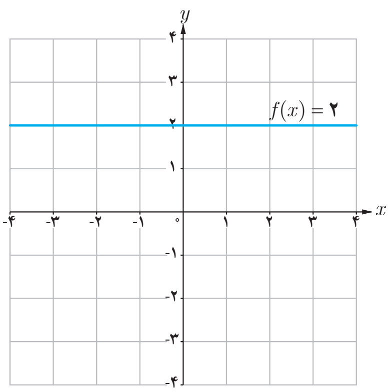
کاردرکلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

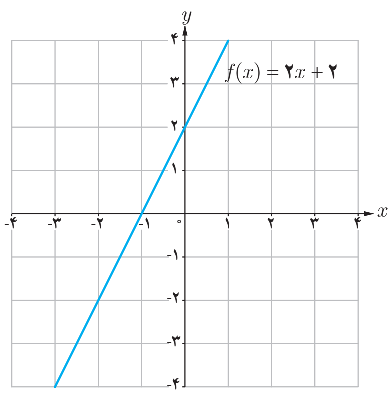
$$f(x) = ۲x - ۳ \quad , \quad h(x) = x^۳ + x - ۴ \quad , \quad n(x) = ۲x - x^۴$$

$$g(x) = (x-۱)^۲ + ۳ \quad , \quad m(x) = ۵ \quad , \quad p(x) = x^۲(۱-x)^۳$$

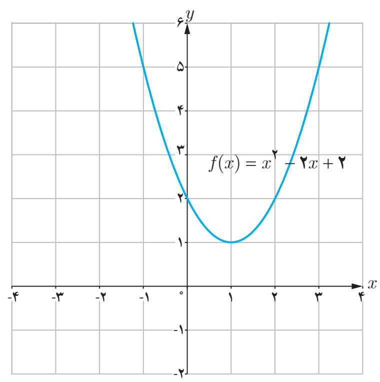
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq ۰$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



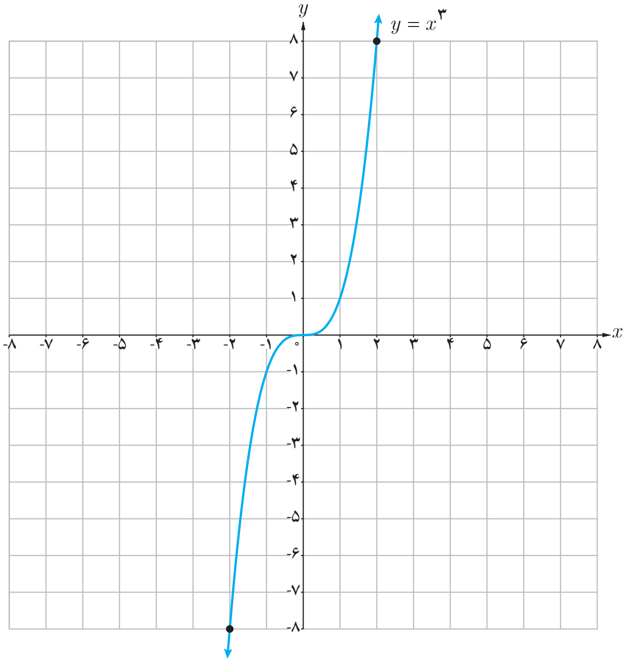
تابع درجه دو

۱ــ برای $f(x)=۰$، درجه تعریف نمی‌شود.

فعالیت

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول نقاط زیر، نمودار تابع $f(x) = x^3$ رسم شده است.



x	$y = x^3$
-۲	$(-۲)^۳ = -۸$
-۱	$(-۱)^۳ = -۱$
۰	۰
۱	۱
۲	$۲^۳ = ۸$

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

کار در کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

الف) $y = (x+۱)^۳$

ب) $y = -x^۳+۱$

پ) $y = x^۲-۳x^۳+۳x$

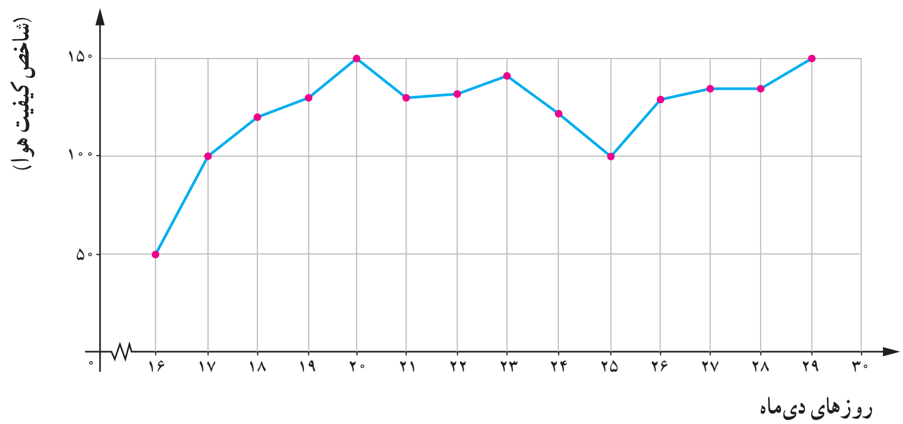
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x$، $y = x^2$ و $y = x^3$ را در فاصله $[۰,۲]$ رسم کنید.

در فاصله $[۰,۱]$، نمودار کدام تابع از همه پایین‌تر و نمودار کدام تابع از همه بالاتر است؟ در فاصله $[۰,۲]$ چطور؟

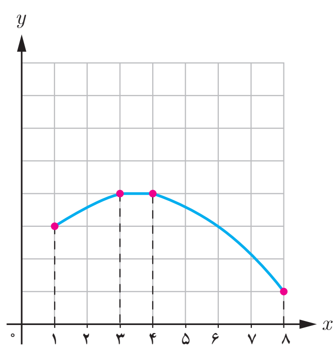
توابع صعودی و نزولی

فعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



الف) در چه روزهایی شاخص کیفیت هوا در بالاترین و پایین‌ترین مقدار بوده است؟
ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله زمانی روبه افزایش بوده است؟
پ) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله زمانی روبه کاهش بوده است؟
ت) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟

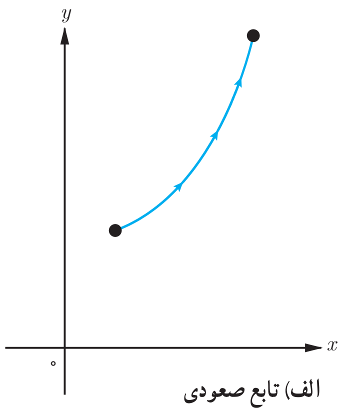


دامنه تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[1,8]$ است. در بازه $[1,3]$، همزمان با افزایش x، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[1,3]$ صعودی می گوییم. در بازه $[3,4]$ مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه $[4,8]$، همزمان با افزایش x، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[4,8]$ نزولی اطلاق می‌شود.

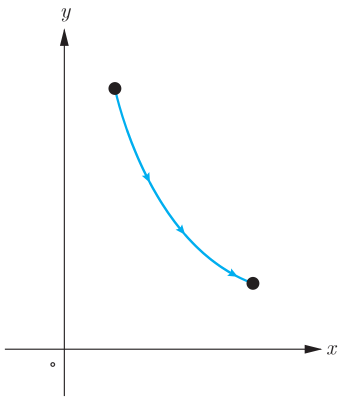
توابع اکیداً یکنوا

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



الف) تابع صعودی

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)

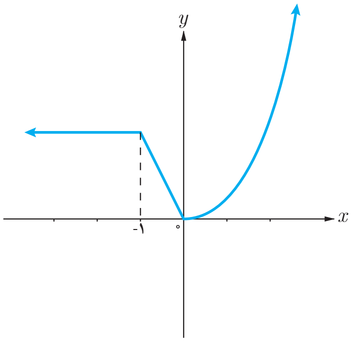


ب) تابع نزولی

✤ تابع f را در یک بازه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، $f(x)$ یک مقدار ثابت باشد.

به تابعی که در یک بازه، اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

✤ **مثال :** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-۱]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-۱,۰]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[۰,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.



کار در کلاس

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

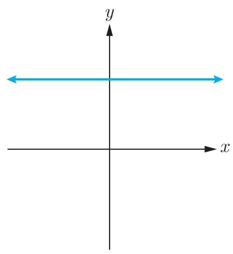
$$f(x)=x^{۲}+۲x \quad , \quad g(x)=۲^{-x} \quad , \quad h(x)=|x+۲|$$

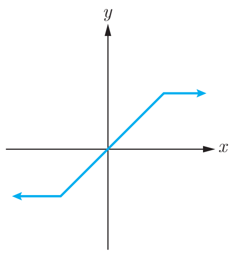
الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

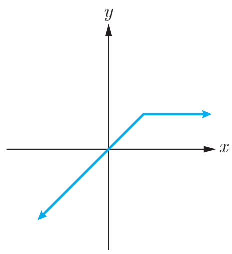
ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

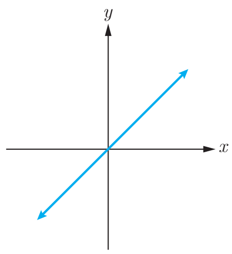
تابع یکنوا

تابع f را در یک بازه، **صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$، آنگاه $f(a)\leq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.

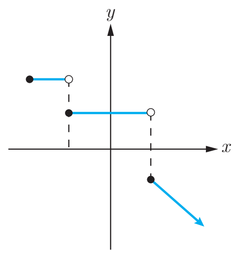


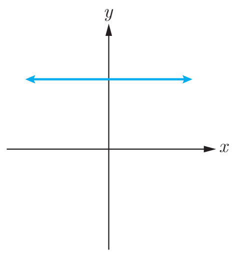


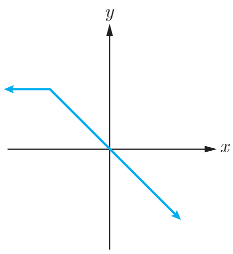


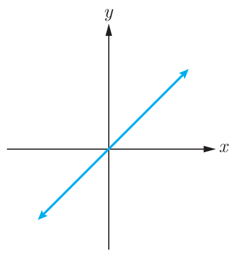


تابع f را در یک بازه، **نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$، آنگاه $f(a)\geq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.









کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\geq -1 \\ 2 & x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است.

۲ الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟

۳

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a)\leq f(b)$ نشان دهید که $a\leq b$.

ب) اگر $\log(2x-3)\leq \log(x+1)$، حدود x را به‌دست آورید.

بخش‌پذیری و تقسیم

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x)=x^{3}-3x^{2}+1$ و $p(x)=x^{2}-2$ را درنظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x)=x-3$ و $r(x)=2x-5$.

ب) درستی تساوی $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ را بررسی کنید.

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که :

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

(اگر $r(x)=0$ باشد، تابع f بر تابع p بخش‌پذیر است.)

کاردرکلاس

اگر $f(x)=x^{4}-16$ و $p(x)=x+2$، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

فعالیت

در یک تقسیم، $f(x)=x^{3}+2$ و $p(x)=2x-1$ به ترتیب مقسوم و مقسوم‌علیه هستند.

الف) اگر $r(x)$ باقی‌مانده تقسیم باشد، نشان دهید که درجه باقیمانده صفر است.

ب) اگر $r(x)$ باقی‌مانده و $q(x)$ خارج قسمت این تقسیم باشد، با توجه به قضیه تقسیم، می‌توان نوشت :

$$f(x)=(2x-1)\ q(x)+r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x)=2x-1$ را به‌دست آورده و با قرار دادن آن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x)=f(\frac{1}{2})$.

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت‌است از $r(x)=f(\frac{-b}{a})$.

کاردرکلاس

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^{3}+x-2$ را بر $2x+1$ به‌دست آورید.

۲ اگر چند جمله‌ای $x^{2}+ax-2$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \qquad \text{و} \qquad (x^3 - a^3) = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۱ از تقسیم $x^4 - a^4$ بر $x-a$ نشان دهید که :

$$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

۲ آیا $x^n - a^n$ $(n \in \mathbb{N})$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟

۳ از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x-a$ نشان دهید که $x^n - a^n$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\boxed{x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}$$

۴ چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

کار در کلاس

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

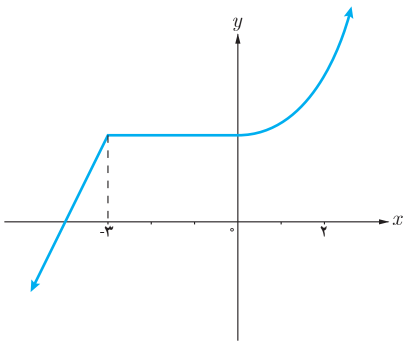
به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را برحسب $x + 2$ تجزیه کنید.

تمرین

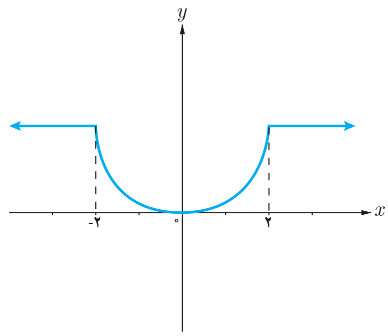
۱ تابع $f(x) = (x-۲)^{۳} + ۱$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^{۳}$ رسم کنید.
ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.
پ) ضابطه $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۲ نمودار توابع f و g در زیر رسم شده‌اند.



$y = f(x)$



$y = g(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟
ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{۲-x}$

ب) $g(x) = \dfrac{۱}{x+۲}$

ج) $h(x) = \log_{۲} x$

۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، صعودی و هم نزولی باشد؟

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است؟ برای تابع $f - g$ چه می‌توان گفت؟

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ برحسب $x - 1$

ب) $x^6 - 1$ برحسب $x + 1$

پ) $x^5 + 32$ برحسب $x + 2$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.

ب) اگر $(\frac{1}{2})^{3x-2} \geq \frac{1}{64}$، حدود x را به‌دست آورید.

www.riazisara.ir   سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara   (@riazisara)