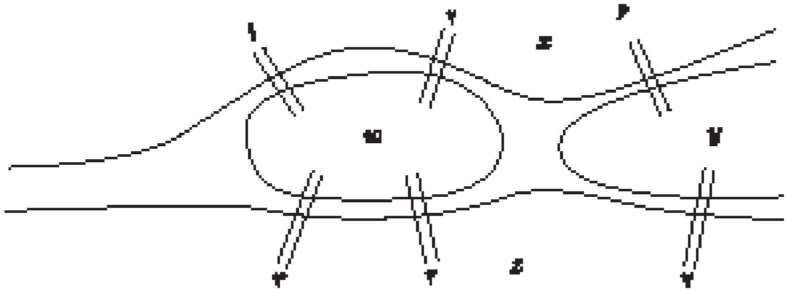
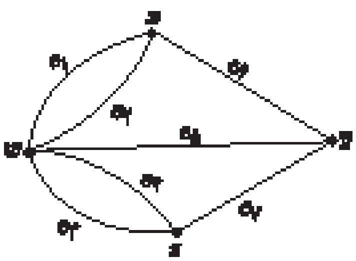
درس ۱ معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص

در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانهٔ این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با شروع از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور کردن از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت برگشت؟



لئوناردو اویلر (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد این مسئله امکان‌پذیر نیست.

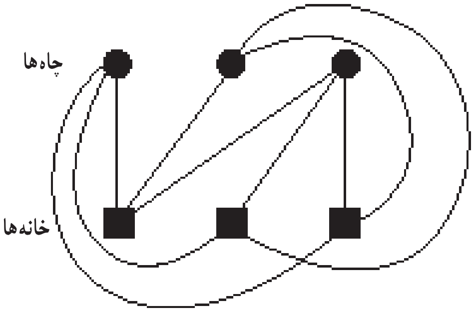


اگر چهار ناحیهٔ x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به‌دست می‌آید که گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئلهٔ مذکور است.

مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی دربارهٔ آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئلهٔ اویلر می‌دانند اما بی‌تردید متفکرین و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز

برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ‌بهایی، ریاضی‌دان ایرانی (۱۰۰۰ــ۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد :



سه رودخانه و سه چاه آب مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اوّل به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند.

شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

مثال : تحلیل وضعیت با استفاده از گراف

فرض کنید بدانیم ۵ تیم فوتبال a، b، c، d و e در یک گروه قرار دارند و باید دوبه‌دو با هم بازی کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و فرض کنید اطلاعات زیر را داشته باشیم :

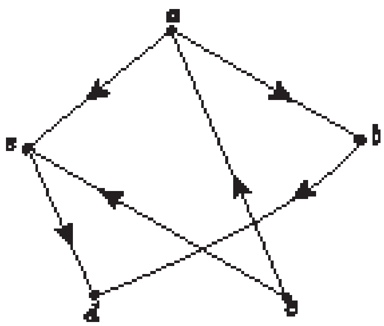
تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

تیم c از a برده و از e نیز برده است.

تیم d به تیم b باخته است و به تیم e نیز باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



فرض کنید برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به این صورت استفاده کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌کشیم و دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

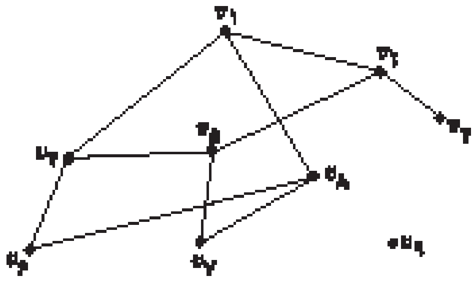
حال با یک نگاه به نمودار رسم شده علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

ــ برای هر تیم مشخص کنید با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

ــ اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

تمرین

سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف بتوان به آن جواب داد.



G

همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از خطوط. به این نقاط رأس و به خطوط یال می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً راست باشند و می‌توانند به‌صورت منحنی نیز باشند و در هر سرِ یال باید رأسی قرار داشته باشد. یک گراف را می‌توان مانند آنچه دیدیم با رسم نمودارِ آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوهٔ نمایش یک گراف را بررسی می‌نماییم.

گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال مانند شکل در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم.

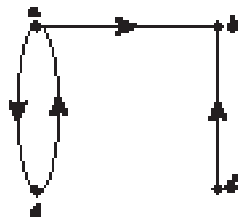
با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا با نمادهای ریاضی مجموعهٔ یال‌ها و رئوس آن را به‌صورت زیر نمایش داد.

مجموعهٔ رأس‌های گراف G [1] $V(G) = \{v_1 , v_2 , \dots , v_8 , v_9\}$

مجموعهٔ یال‌های گراف G [2] $E(G)=\{v_1v_2 , v_1v_4 , v_1v_8 , v_2v_3 , v_2v_5 , v_4v_5 , v_4v_6 , v_5v_7 , v_6v_8 , v_7v_8\}$

به‌وضوح با داشتن شکلِ گراف شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ (تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.



به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف جهت‌دار می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار زیر این‌گونه نمایش می‌دهیم.

$V = \{a , b , c , d\} \quad E\{(a,b),(a,c),(c,a)(d,b)\}$

کار در کلاس

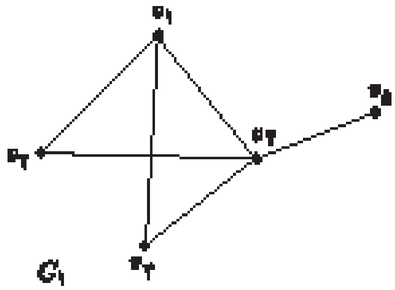
ــ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

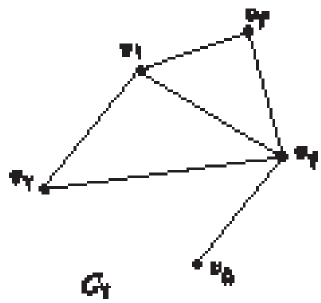
$V(G) = \{v_1 , v_2 , \dots , v_6\}$

$E(G)=\{v_1v_4 , v_2v_5 , v_6v_1 , v_5v_1\}$

توجه : برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی وجود ندارد و شکل گراف صرفاً باید مشخص نماید که کدام رئوس به هم متصل‌اند و چند بار. به طور مثال برای دو نمودار زیر با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.

۱ــ Vertex   ۲ــ Edge

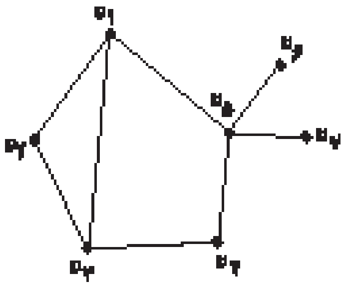




$V(G_1) = \{ \qquad\qquad \}$ $\qquad$ $V(G_2) = \{ \qquad\qquad \}$

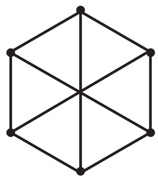
$E(G_1) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $E(G_2) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

■ **مرتبه و اندازهٔ یک گراف** : تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل قبل از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۶ هستند. بنابراین $p = ۵$ و $q = ۶$.



■ **درجهٔ یک رأس** : درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را یک رأس فرد و اگر زوج باشد آن را یک رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم :

$deg(v_1) = ۳ \quad , \quad deg(v_5) = ۴$



■ گرافی که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و مساوی عدد k باشد را گراف k – منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف مقابل یک گراف ۶ رأسِی ۳ – منتظم است.

■ **رأس تنها** : به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد؛ یعنی روی هیچ یالی واقع نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم. به‌طور مثال در گراف G در شکل ۳، رأس v_9 یک رأس تنهاست.

کار در کلاس

۱ــ درجهٔ سایر رئوسِ این گراف شکل قبل را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.

۲ــ گرافی از مرتبهٔ ۵ رسم کنید که :

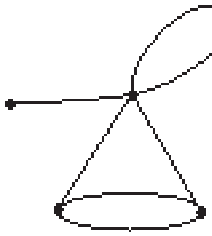
الف) یک رأس تنها داشته باشد.

ب) دو رأس تنها داشته باشد.

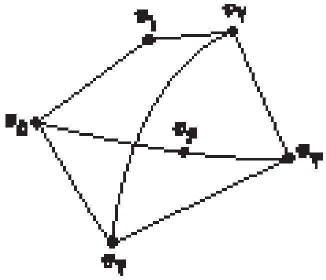
پ) سه رأس تنها داشته باشد.

ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) هر پنج رأس آن، رأس تنها باشند (گرافی که تمام رئوس آن رأس تنها باشند؛ یعنی هیچ یالی نداشته باشد را گراف تهی می‌نامیم).



توجه : بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد و همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خودِ آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه** گفته می‌شود. این دو مورد در شکل روبه‌رو نمایش داده شده‌اند. گرافی که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب صرفاً گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



■ **دو رأس مجاور (همسایه)** : دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G)$. به طور مثال در گراف مقابل، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

توجه : در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

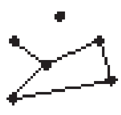
■ **مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس** : مجموعهٔ همسایه‌های رأس v در گراف G مجموعهٔ تمام رأس‌هایی از گراف G هستند که با v مجاوراند و آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. به طور مثال در گراف G در شکل ۳ داریم.

$N_G[V_1] = \{v_2 , v_4 , v_8\}$ $\qquad$ $N_G[V_3] = \{v_2\}$ $\qquad$ $N_G[V_9] = \varnothing$

■ **دو یال مجاور** : دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۳ یال‌های v_1v_2 و v_1v_4 مجاوراند.

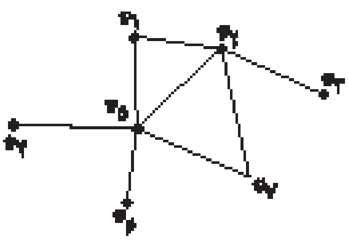
■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف** : بزرگ‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف G را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف روبه‌رو داریم :

$\Delta(G) = 3 \quad , \quad \delta(G) = 0$

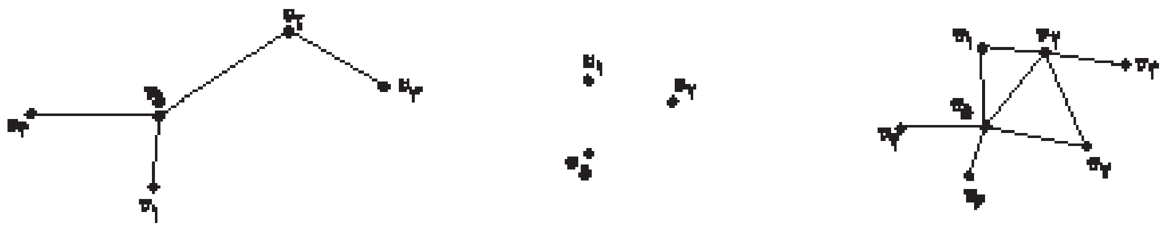


G

■ **زیرگراف** : یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 که در زیر آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G هستند.



G



G_1 G_2 G_3

■ **مکمل یک گراف** : مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل زیر مکمل یک گراف نمایش داده شده است.

G G^c

مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأسِ آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\overline{G}$ باشند، مقدار $d_G(V)+d_{\overline{G}}(V)$ را به‌دست آورید.

مسئله ۲ : یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $e(G)+e(\overline{G})$ را به‌دست آورید.

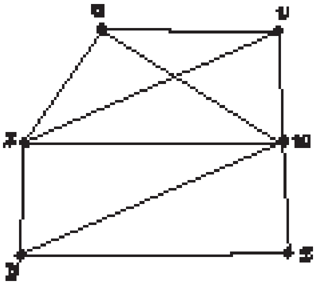
■ **گراف کامل** : گرافی که هر رأس آن به تمام رئوسِ دیگرِ آن وصل باشد را گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G ، $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟

■ **دور، مسیر و هم‌بندی در یک گراف**

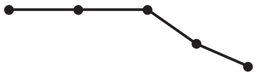
مسیر : اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک v ــ u مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع می‌شود و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v یک مسیر با طول صفر از رأس v به خودش است.



مثال

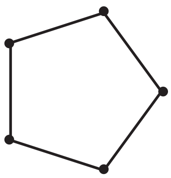
uwv یک v ــ u مسیر به طول ۲ است.

$uzywv$ یک v ــ u مسیر به طول ۴ است.



■ گرافی که تنها از یک مسیرِ n رأسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال P_5 در شکل مقابل نمایش داده شده است.

دور : یک دور به طول m در گراف G دنباله‌ای از $m+1$ رأس است که m رأسِ اوّل آن دوبه‌دو متمایزاند و رأس آخر ($m+1$ امی) همان اولین رأس است. به‌طور مثال در گراف مثال قبل $uvwu$، $ywuzy$، $xwvuzyx$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

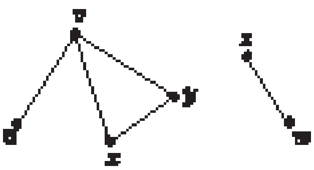


■ گرافی که تنها از یک دورِ n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال C_5 در شکل مقابل نمایش داده شده است.

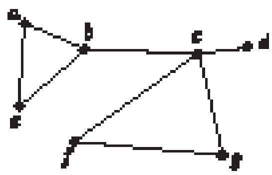
تمرین :

در گراف مثال قبل، دوری به طول ۵ بیابید.

■ **همبندی و ناهمبندی یک گراف :** گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می‌نامیم. به‌طور مثال گراف H در شکل زیر همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.



G



H

فعالیت

۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده در این رابطه بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأسِ v_1 , v_2 , . . . و v_n و m یال e_1 , e_2 , . . . و e_m در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟

۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.

۵ تمام یال‌های e_2 , e_3 , . . . و e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا نهایتاً به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

۷ برای تساوی $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)=2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

با توجه به آنچه در فعالیت به‌دست آوردیم می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود.

قضیه : اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V=\{v_1 , v_2 , . . . , v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه :

$$\sum_{i=1}^{p}\deg v_i=2q$$

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوسِ فردِ گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوجِ گراف G باشد. با برهان خلف فرض کنیم $n(A)$ فرد باشد. در این صورت $\sum_{v\in A}\deg(v)$ عددی فرد است. (چرا؟)

از طرفی $\sum_{v\in B}\deg(v)$ عددی زوج است. (چرا؟)

لذا $\sum_{v\in v(G)}\deg(v)=\sum_{v\in A}\deg(v)+\sum_{v\in B}\deg(v)$ یک عدد فرد است و این با قضیهٔ قبل در تناقض است. بنابراین $n(A)$ نمی‌تواند فرد باشد؛ یعنی تعداد رئوسِ فردِ هر گراف عددی زوج است.

کار در کلاس

الف) یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس در نظر بگیرید.

ب) گراف ۷ رأسی G را به این صورت تشکیل دهید که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید و سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

پ) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

ت) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.