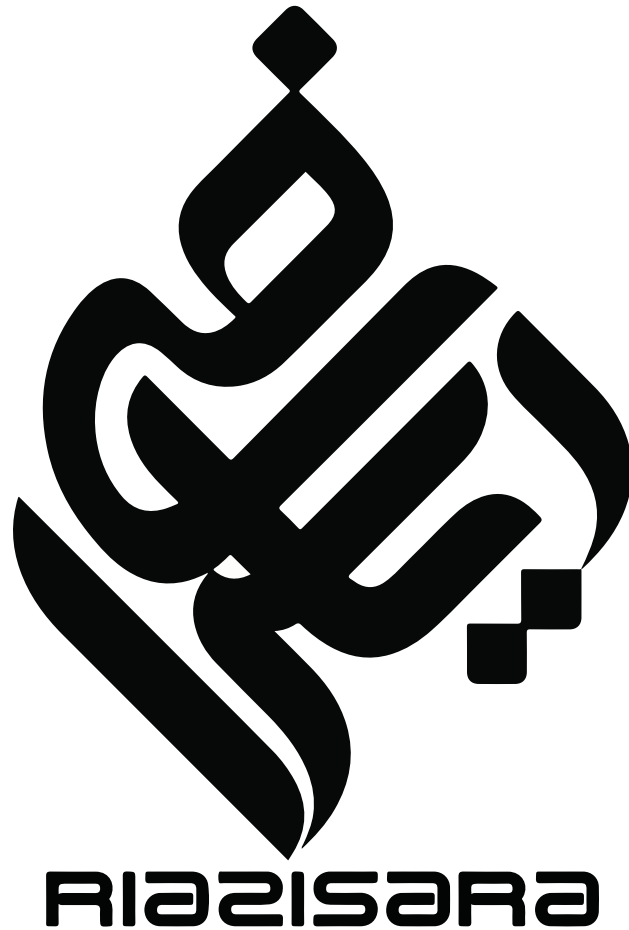




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بنام خدا
جلد سوم حسابان
Calculus III
تألیف و ترجمه
انوشیروان صراف
دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز
(سال های ۱۳۴۲ - ۱۳۶۵)
مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری
(سال های ۱۹۹۶ - ۲۰۰۹)
آدرس ایمیل
John_Sarraf@yahoo.com

بنام خدا

جلد سوم حسابان

فصل اول دنباله ها و سری

به همین قلم تا کنون منتشر شده است. برای اطلاع می توانید به سایت ریاضی سرا مراجعه کنید.

کتاب کامل جبر

جلد اول حسابان با نام حساب دیفرانسیل آرمان

جلد دوم حسابان با نام انتگرال آوا

اصول مثلثات

۱.۱ - محاسبه تقریبی چند جمله ای و قضیه تیلور

Polynomial Approximation and Taylor's Theorem

قضیه تیلور یکی از جالب ترین ایده های ریاضی است. بیشتر تابع هایی که با آنها سرو کار داریم **تابع های هموار** **Smooth Functions** هستند. چند جمله ای ها هم تابع های هموار هستند. پس برای هر تابع همواری، باید بتوانیم یک چند جمله ای بنویسیم بطوری که مقدار تقریبی آنرا خیلی دقیق بدست آوریم. در حقیقت، اگر چند جمله ای ما دارای تعداد کافی جمله باشد، آن چند جمله ای دقیقاً مساوی تابع اصلی خواهد بود. چون کار با چند جمله ای ها آسان تر از کار کردن با بسیاری از تابع ها است، پس به این طریق مساله مشکل به یک مساله آسان تر تبدیل می شود.

فرمول تیلور کلید کار است. این فرمول، یک تساوی چند جمله ای برای هر تابع همواری به ما می دهد. **قضیه تیلور** بر این اساس است که هر تابع همواری را به صورت مجموع نا متناهی جمله ها بنویسیم. پس چند جمله ای ها را برای محاسبه تقریبی $f(x)$ بکار می بریم. این چند جمله ای ها بوسیله مشتق های مرتبه بالای f ساخته می شوند، پس لازم است که فرض کنیم f مشتق های مرتبه بالا را دارد.

چند جمله ای های تیلور Taylor Polynomials

ساده ترین نوع چند جمله ای عدد ثابت است. و چند جمله ای ثابت P_0 که مقادیر f را در همسایگی صفر به تقریب حساب می کند، مطابق زیر است.

$$P_0(x) = f(0) \quad (۱)$$

مثلاً در مورد سینوس، هم f و هم P_0 در صفر یک مقدار دارند. در بیشتر موارد بهترین تقریب مطابق زیر بدست می آید.

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x \quad (۲)$$

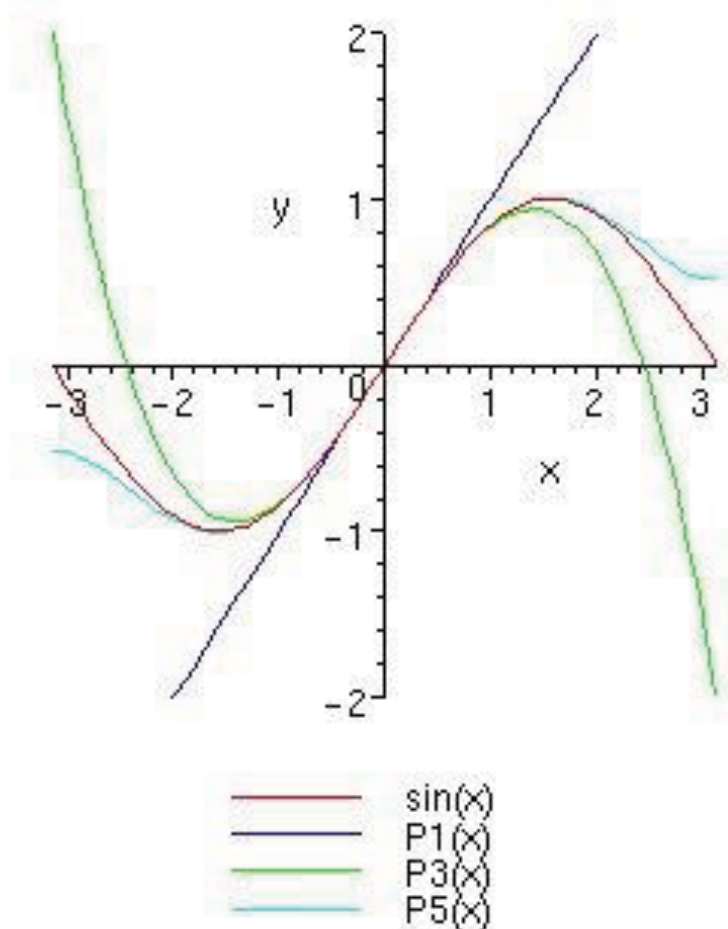
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \quad (۳)$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 \quad (۴)$$

تصویر A نمودار سینوس هم به صورت تابع f و هم به صورت چند جمله ای P با رنگ های مختلف نشان می دهد.

تصویر A

Low order Taylor approximations to $\sin(x)$ near $x=0$



برای درک مطالبی که در پیش داریم ، لازم است مفهوم فاکتوریل را بخاطر بیاورید.

یاد آوری : فاکتوریل Factorial

در جبر دیدیم که برای هر عدد صحیح نا منفی فاکتوریل را چنین تعریف کردیم.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3*2*1 \quad \text{برای } n \geq 1$$

$$0! = 1$$

پس

$$\begin{aligned} 1! &= 1 & 2! &= 2 * 1 = 2 & 3! &= 3 * 2 * 1 = 6 \\ 4! &= 4 * 3 * 2 * 1 = 24 & 5! &= 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \end{aligned}$$

یکی از خواص فاکتوریل که از تعریف نتیجه می شود ، مطابق زیر است.

$$(n+1)! = (n+1)n! , \quad n \geq 0$$

حالا یک چند جمله ای P_n با درجه n را در زیر تعریف می کنیم.

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

چند جمله ای P_n که در بالا تعریف کردیم بنام **چند جمله ای درجه n ام تیلور** **nth Taylor Polynomial** برای f در همسایگی صفر نامیده می شود.توجه داشته باشید که $f^{(n)}$ به معنی f به توان n نیست. بلکه به معنی مشتق درجه n است.**مثال ۱ -** فرض کنید $f(x) = e^x$ باشد. یک فرمول چند جمله ای درجه n ام تیلور برای f و $P_n(1)$ پیدا کنید و سپس $P_5(1)$ را محاسبه کنید.**پاسخ**می دانید که اگر $f(x) = e^x$ باشد ، برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم $f^{(k)}(x) = e^x$ یعنی کلیه مشتق های e^x خود e^x است. همچنین $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ است. فراموش نکنید که چند جمله ای تیلور در همسایگی صفر است. با این اطلاعات داریم.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

و برای $n = 5$ داریم.

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} \approx 2.71667$$

چون هدف محاسبه $P_n(x)$ محاسبه تقریبی $f(x)$ است ، باید امتحان کنیم که محاسبه $P_5(1)$ تا چه اندازه به مقدار حقیقی $f(1) = e$ نزدیک است. مقدار حقیقی e تا شش رقم اعشاری 2.71828 است ، پس خطای $P_5(1)$ تقریباً 0.00161 است.

مثال ۲ - فرض کنید $f(x) = \ln(1+x)$ باشد. یک فرمول چند جمله ای تیلور درجه n ام برای f پیدا کنید و سپس $P_6(1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

ابتدا پنج مشتق f را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) &= 2! \\ f^{(4)}(x) &= \frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) &= -3! \end{aligned}$$

و بطور کلی

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \end{aligned}$$

در نهایت

$$P_6(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60} \approx 0.616667$$

انتظار داریم $P_n(x)$ تابع $f(x)$ به تقریب پیدا کند. چون $f(1) = \ln 2 = 0.693147$ است و چون $P_6(1) \approx 0.616667$ است، پس $P_6(1)$ تابع $\ln 2$ را با خطای 0.07648 محاسبه می کند.

مثال ۳- فرض کنید $f(x) = \frac{1}{1-x}$ باشد. یک فرمول چند جمله ای درجه n ام تیلور برای f پیدا

کنید و سپس $P_n(2)$ را محاسبه کنید.

ياسخ

مشتق های f عبارتند از

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2!}{(1-x)^3} & f''(0) &= 2! \\ f^{(r)}(x) &= \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} & f^{(r)}(0) &= r! \end{aligned}$$

و بطور کلی

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad f^{(k)}(0) = k!$$

در نتیجه

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

9

$$P_n(\mathfrak{Y}) = 1 + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Y}^3 + \dots + \mathfrak{Y}^n$$

در مثال های ۱ و ۲ چند جمله ای تیلور یک تقریب منطقی برای تابع های داده شده ، در اختیار ما گذاشت . در حقیقت متوجه شدیم که اگر $f(x) = e^x$ باشد ، پس

$$|f(\gamma) - P_\delta(\gamma)| = |e - P_\delta(\gamma)| \approx 0.00161$$

و اگر $f(x) = \ln(1+x)$ باشد، پس

$$|f(\gamma) - P_{\hat{\gamma}}(\gamma)| = |\ln \gamma - P_{\hat{\gamma}}(\gamma)| \approx 0.0769$$

است. اما بر عکس، اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ باشد، مانند مثال ۳ برای $n \geq 1$ داریم.

$$\begin{aligned} |f(r) - P_n(r)| &= \left| \frac{1}{1-r} - \left(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \right) \right| \\ &= \left| -1 - \left(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \right) \right| \geq r^n \end{aligned}$$

است. در نتیجه $P_n(2)$ نزدیک $f(2)$ نیست برای هر عدد n . در حقیقت هرچه n بزرگ تر باشد تقریب $P_n(2)$ برای $f(2)$ بدتر است. اگر f یک تابع با مشتق های مرتبه بالا در صفر باشد، برای اندازه گیری خطا و درستی تقریب $P_n(x)$ ، از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right]$$

در فرمول بالا r حرف اول *Remainder* است، به معنی مانده یا باقیمانده

قضیه تیلور Taylor's Theorem

فرض می کنیم n یک عدد صحیح نا منفی باشد و $f^{(n+1)}(x)$ در یک بازه باز I شامل صفر، وجود داشته باشد. برای هر $x \neq 0$ در I یک عدد t_x دقیقاً بین صفر و x وجود دارد بطوری که

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (5)$$

و

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (6)$$

فرمول شماره (5) بنام فرمول تیلور **Taylor's Formula** و فرمول شماره (6) بنام فرمول باقیمانده لاگرانژ **Lagrange Remainder Formula** موسوم است.

برای اثبات این قضیه و قضیه کلی تر به بخش ۱.۹ مراجعه کنید.

مثال ۴- عدد e را با خطای کمتر از 0.001 بدست آورید.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = e^x$ باشد. اگر $e = e^1 = f(1)$ بوسیله $P_n(1)$ به تقریب بدست آوریم، خطا کمتر از 0.001 خواهد بود اگر $|f(1) - P_n(1)| = |r_n(1)| < 0.001$ باشد. در نتیجه اگر یک n پیدا کنیم، بطوری که $|r_n(1)| < 0.001$ باشد، پس $P_n(1)$ تقریب دلخواه ما است. بر اساس قضیه تیلور می دانیم یک عدد t_1 بین صفر و یک وجود دارد بطوری که

$$r_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!} * 1^{n+1}$$

چون $f^{(n+1)}(t_1) = e^{t_1}$ و در کتاب انتگرال آوا توسط همین قلم بخش ۱.۷ انتگرال توابع لگاریتمی گفته شد $e = 2.7182881 \dots < 4$ است، پس

$$e^{t_1} < 4^{t_1} < 4^1 = 4$$

بطوری که

$$r_n(1) = \frac{e^{t_1}}{(n+1)!} < \frac{4}{(n+1)!} \quad (7)$$

با محاسبه $\frac{4}{(n+1)!}$ برای $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ ملاحظه می کنیم که $|r_n(1)| < 0.001$ است اگر $n \geq 6$ باشد، پس $P_6(1)$ تقریب دلخواه برای e است. پس بر اساس فرمول کلی برای $P_n(1)$ در مثال ۱ داریم.

$$P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2.71806$$

نتیجه می گیریم 2.71806 مقدار تقریبی e است با خطای کمتر از 0.001

از شماره (۷) نتیجه می شود که

$$|e - P_n(1)| = \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| < \frac{4}{(n+1)!} \quad (8)$$

چون هنگامی که n زیاد می شود، $\frac{4}{(n+1)!}$ کوچک می شود، پس می توانیم اختلاف بین مقدار e و $P_n(1)$ هر قدر بخواهیم کم کنیم اگر n را به اندازه کافی بزرگ کنیم.

چون $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ است، پس می توانیم مقدار تقریبی $\sqrt{e}$ از همان چند جمله ای های تیلور که برای تابع e^x بکار بردیم، استفاده کنیم. اما برای $\sqrt{e}$ بجای $P_n(1)$ از $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ استفاده می کنیم.

مثال ۵- مقدار تقریبی $\ln 2$ با خطای کمتر از 0.001 پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = \ln(1+x)$ باشد. مانند مثال ۴ مقدار تقریبی $f(1)$ را بوسیله $P_n(1)$ برای یک مقدار مناسب برای n پیدا می کنیم. بر اساس فرمول $f^{(k)}(x)$ در مثال ۲ با جانشین کردن $n+1$ بجای k داریم.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

بر اساس فرمول شماره ۶ با $x = 1$ یک عدد t_1 بین صفر و یک وجود دارد، بطوری که

$$r_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n n!}{(1+t_1)^{n+1} (n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(1+t_1)^{n+1} (n+1)!}$$

چون $t_1 > 0$ است، پس داریم

$$|r_n(1)| < \frac{1}{n+1} \quad (9)$$

پس اگر $n \geq 9$ انتخاب کنیم، $|r_n(1)| < 0/1$ است. لذا $P_9(1)$ مقدار تقریبی $\ln 2$ با خطای کمتر از $0/1$ محاسبه می کند. فرمول کلی $P_n(x)$ در مثال ۲ نتیجه زیر را به ما می دهد.

$$P_9(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0/745635$$

این مقدار تقریبی دلخواه ما است.

نا معادله شماره (۹) معادل نا معادله زیر است.

$$|\ln 2 - P_n(1)| = \left| \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) \right| < \frac{1}{n+1} \quad (10)$$

تمرینات ۱.۱

۱ - فرض کنید $f(x) = \sin x$ باشد. نمودار های P_1, P_3, P_5 را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

در تمرینات ۵ - ۲ یک چند جمله ای تیلور برای f بنویسید.

۲) $f(x) = x^2 - x - 2$

۳) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

۴) $f(x) = e^{-x}$

۵) $f(x) = \cosh x$

در تمرینات ۸ - ۶ چند جمله ای n ام تابع f و مقدار داده شده n پیدا کنید.

۶) $f(x) = e^{-(x^2)}; n = 3$

۸) $f(x) = \sec x; n = 2$

۷) $f(x) = \ln(\cos x); n = 2$

پاسخ تمرینات ۱.۱

۱ - فرض کنید $f(x) = \sin x$ باشد. نمودارهای P_1, P_2, P_3, P_5 را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

پاسخ

چون $f(x) = \sin x$ است، پس $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x$ همان طور که در ابتدای این بخش گفتیم

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 0 + (\cos 0)(x) = 1(x) = x$$

پس نمودار زیر را رسم می کنیم که یک خط مستقیم است و از مرکز مختصات می گذرد.

$$y = x$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

$$= 0 + (\cos 0)(x) - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 = 0 + x - 0 - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{3!}$$

پس نمودار یک جمله دو جمله ای زیر را رسم می کنیم.

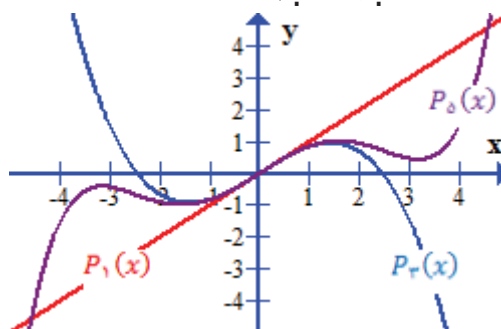
$$y = x - \frac{x^3}{3!}$$

به همین طریق داریم

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

نمودار سه جمله ای زیر را رسم می کنیم.

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



ملاحظه می کنید که $P_1(x) = P_2(x)$ است.

در تمرینات ۵ - ۲ یک چند جمله ای تیلور برای f بنویسید.

۲) $f(x) = x^2 - x - 2$

پاسخ

$$f'(x) = 2x - 1, f''(x) = 2, f^{(k)}(x) = 0, \quad \text{برای } k \geq 3$$

$$P_0(x) = -2, P_1(x) = -2 - x$$

$$P_n(x) = -2 - x + \frac{2x^2}{2} = -2 - x + x^2 \quad \text{برای } n \geq 2$$

۳) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

پاسخ

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}; f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$$

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{2!}{2!}x^2 - \frac{3!}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n n!}{n!}x^n$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

۴) $f(x) = e^{-x}$

پاسخ

$$f'(x) = -e^{-x}, f''(x) = e^{-x}, f^{(3)}(x) = -e^{-x}, f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k$$

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

۵) $f(x) = \cosh x$

پاسخ

$$f'(x) = \sinh x, f''(x) = \cosh x, f^{(2k)}(x) = \cosh x, f^{(2k+1)}(x) = \sinh x$$

$$f^{(2k)}(0) = 1; f^{(2k+1)}(0) = 0$$

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

در تمرینات ۸ - ۶ چند جمله ای n ام تابع f و مقدار داده شده n پیدا کنید.

۶) $f(x) = e^{-(x^2)}; n = 3$

پاسخ

$$f'(x) = -2xe^{-(x^2)}, f''(x) = -2e^{-(x^2)} + 4x^2e^{-(x^2)}$$

$$f^{(3)}(x) = 12xe^{-(x^2)} - 8x^3e^{-(x^2)}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = -2, f^{(3)}(0) = 0$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 = 1 - x^2$$

۸) $f(x) = \sec x; n = 2$

پاسخ

$$f'(x) = \sec x \tan x, f''(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1$$

$$P_2(x) = P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

۷) $f(x) = \ln(\cos x); n = 2$

پاسخ

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, f''(x) = -\sec^2 x$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = -1$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

۱.۲ - دنباله ها Sequences

یاد آوری : چون در این بخش و بخش های آینده که در مورد همگرا یا واگرا بودن دنباله ها ، به قواعد حد احتیاج داریم ، در زیر چند نمونه که لازم به نظر می رسد ، از کتاب حساب دیفرانسیل آرمان نگارش همین قلم ذکر می شود. در صورتی که موارد دیگری هم لازم باشد ، یاد آوری خواهیم کرد.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} cx = ca$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a > 0$$

قضیه قانون لا هیتال L'Hopital's Rule Theorem

فرض کنید L یک عدد حقیقی و یا ∞ و یا $-\infty$ باشد.

الف - فرض کنید g و f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x) \neq 0$ باشد برای $a < x < b$

اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به a از طرف چپ هم صادق است.

ب - فرض کنید g و f در بازه (a, ∞) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x) \neq 0$ باشد برای $x > a$. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به $-\infty$ صادق است.

در بخش ۱.۱ اعداد زیر را برای محاسبه تقریبی e بکار بردیم.

$$(1) \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{برای } n \geq 0$$

و دیدیم که تقریب می تواند به مقدار e نزدیک شود، اگر n را به اندازه کافی بزرگ کنیم. اعداد شماره (۱) تابعی به ما می دهد که دامنه آن مجموعه تمام اعداد نامنفی است. پس می توان نوشت

$$f(n) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{برای } n \geq 0$$

همچنین اعداد زیر را در نظر بگیرید.

$$(2) \quad \left(1 + \frac{0.005}{n}\right)^n \quad \text{برای } n \geq 1$$

اگر یک تومان، یا هر واحد پولی، در یک حساب با ۵ درصد سود مرکب n مرتبه در سال ذخیره کنیم، پس در آخر سال تعداد تومان ها در حساب $\left(1 + \frac{0.005}{n}\right)^n$ است. هر قدر تعداد n زیاد تر شود، مقدار پول در حساب زیاد تر خواهد بود. اعداد شماره (۲) تابعی به ما میدهد که دامنه آن مجموعه تمام اعداد مثبت است. پس می توان نوشت.

$$g(n) = \left(1 + \frac{0.005}{n}\right)^n \quad \text{برای } n \geq 1$$

این بخش اختصاص به توابعی دارد که دامنه آنها مانند دامنه f و g است.

تعریف ۲.۱ - یک دنباله Sequence یک تابع است که دامنه آن مجموعه اعداد صحیح بزرگ تر از یک عدد داده شده مانند m است. معمولاً یا صفر است و یا یک.

پس تابع های شماره های (۱) و (۲) دنباله هستند.
مثال های دیگر

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$k(n) = n^2 \quad n \geq 4$$

بطور کلی اگر داشته باشیم

$$(3) \quad f(n) = a_n, \quad n \geq 1$$

پس مجموعه اعداد مرتب $a_1, a_2, \dots$ دنباله را مشخص می کند. در نتیجه f را حذف می کنیم و

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{می نویسیم، (۳) برای نشان دادن دنباله شماره}$$

به همین طریق اگر داشته باشیم

$$f(n) = a_n, \quad n \geq m$$

$$\{a_n\}_{n=m}^{\infty} \quad \text{می نویسیم}$$

و دنباله های k و f, g, h را مطابق زیر بیان می کنیم.

$$\left\{ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\left\{ \left(1 + \frac{0.005}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{ n^2 \}_{n=1}^{\infty}$$

چهار جمله اول دنباله h مطابق زیر است.

$$a_0 = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1, \quad a_1 = \left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

هر کدام از $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ به ترتیب، جمله اول، جمله دوم، جمله سوم، جمله چهارم، ... نامیده می شوند.

به همین ترتیب چهار جمله اول $\{ n^2 \}_{n=1}^{\infty}$ مطابق زیر است.

$$a_4 = 4^2 = 16, \quad a_5 = 5^2 = 25$$

$$a_6 = 6^2 = 36, \quad a_7 = 7^2 = 49$$

اینجا هم $a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$ به ترتیب، جمله اول، جمله دوم، جمله سوم، جمله چهارم، ... نامیده می شوند.

نماد n در $\{ a_n \}_{n=m}^{\infty}$ را اندیس Index می نامند. و m را اندیس اولیه Initial Index می نامند. توجه داشته باشید که نماد اندیس هر حرفی می تواند باشد. یک دنباله را می توان به طرق مختلف نمایش داد. سه اشکال زیر نمایش یک دنباله هستند.

$$\{ a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \} \quad \{ a_n \} \quad \{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$$

دنباله های همگرا Caonvergent Sequences

برای هر دنباله ای $\{ a_n \}_{n=m}^{\infty}$ ممکن است بخواهیم بدانیم هنگامی که n بطور نامحدود زیاد می شود، a_n چه حالتی پیدا می کند. مثلاً دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

اگر شش جمله این دنباله را پیدا کنیم، ملاحظه می کنیم

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} \approx 2.71667$$

پس هر قدر n را اضافه کنیم، این دنباله به e نزدیک تر می شود.

اما برای

$$a_n = \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n$$

کاملاً واضح نیست که آیا، هنگامی که n بطور نامحدود افزایش پیدا کند، a_n به یک عدد مشخصی نزدیک می شود یا نه.

تعریف ۲.۲

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله باشد. یک عدد L حد $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح N وجود داشته باشد بطوری که اگر $n \geq N$ باشد، پس $|a_n - L| < \varepsilon$ است (۴)

است. در این صورت می نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

است. اگر این عدد L وجود داشته باشد، می گوئیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ همگرا است و یا به سوی L همگرا است. و یا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود دارد. اگر این عدد L وجود نداشته باشد، می گوئیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ واگرا است و یا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود ندارد.

همگرا بودن Converge

واگرا بودن Diverge

همگرا Convergent

واگرا Divergent

همان طور که حد یک تابع منحصر به فرد است، حد یک دنباله هم اگر وجود داشته باشد، منحصر به فرد است.

مثال ۱ - فرض کنید c یک عدد باشد، و فرض کنید $a_n = c$ باشد، برای $n \geq 1$. نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

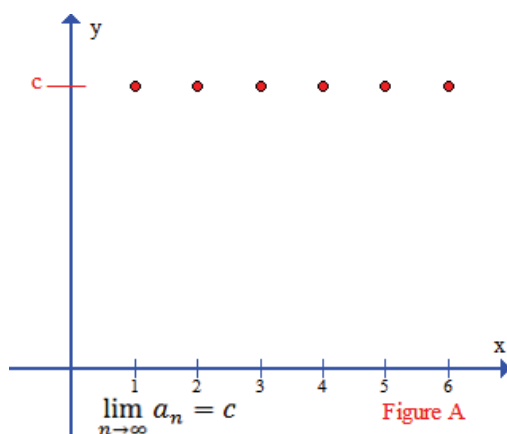
پاسخ

برای هر $\varepsilon > 0$ فرض می کنیم $N \geq 1$ باشد. ملاحظه می کنید که اگر $n \geq N$ باشد، پس

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

است. در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ است. تصویر A

توجه برای رسم نمودار دنباله $\{a_n\}$ نقاط (a, a_n) را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم. مثلاً برای این دنباله نقاط $(1, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(1, 3)$ ، ... داریم.



در مثال ۱ نتیجه را به صورت زیر می نویسیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

اگر بخواهیم بطور مشخص نتیجه را بیان کنیم ، می نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-5) = -5, \quad \dots$$

مثال ۲ - نشان دهید $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ است.

پاسخ

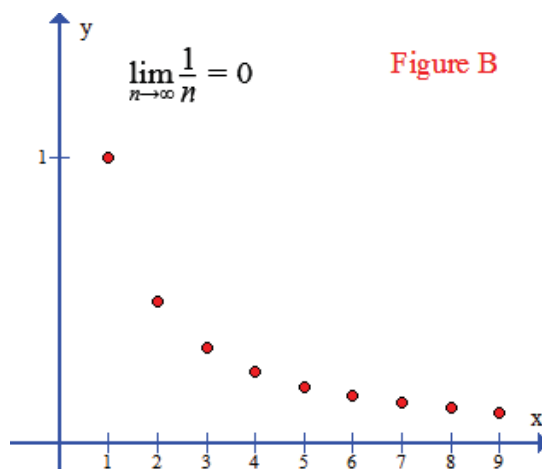
برای $\varepsilon > 0$ فرض می کنیم N یک عدد صحیح بزرگ تر از $\frac{1}{\varepsilon}$ باشد. پس اگر $n \geq N$ باشد ، داریم

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

این نشان می دهد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

است. تصویر B



مثال ۳- نشان دهید که $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا است.

پاسخ
داریم

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پس نمودار در تصویر C نشان داده شده است. اگر $L \geq 0$ باشد، پس برای مقادیر فرد n داریم

$$|(-1)^n - L| = |-1 - L| \geq 1$$

اما اگر $L < 0$ باشد، پس برای مقادیر زوج n داریم.

$$|(-1)^n - L| = |1 - L| \geq 1$$

است. در نتیجه اگر $0 < \varepsilon \leq 1$ باشد، هیچ عددی مانند L وجود ندارد که تعریف ۲.۲ را برقرار کند.

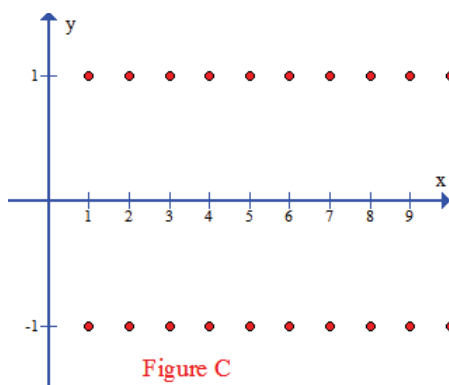


Figure C

دنباله مثال ۳ واگرا است، زیرا اعداد دنباله بین ۱ و -۱ در نوسان هستند. پس به یک حد نزدیک نمی شویم. یک دنباله می تواند واگرا باشد به این علت که قدر مطلق دنباله بدون حد و مرز بزرگ می شود.

تعریف ۲.۳

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله باشد. اگر برای هر عدد M یک عدد صحیح N وجود دارد، بطوری که

اگر $n \geq N$ باشد، پس $a_n > M$ است. (۵)

در این صورت می گوئیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ واگرا است به طرف ∞ و می نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

به همین طریق، اگر برای هر عدد M یک عدد صحیح مانند N وجود داشته باشد، بطوری که اگر $n \geq N$ باشد، پس $a_n < M$ است. در این صورت می گوئیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ به طرف $-\infty$ واگرا است. و می نویسیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

اما مراجعه به تعریف ۲.۳ برای نشان دادن این که یک دنباله واگرا است و مانند مثال های ۱ - ۳ مراجعه به تعریف ۲.۲ برای اثبات این که یک دنباله همگرا است. مشکل است. یک راه برای احتراز از مراجعه مکرر به این دو تعریف وجود دارد، به این حقیقت توجه کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ که در مبحث حد تابع در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان دیدیم، شبیه است. همین طور

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$$

این مشاهدات ما را به قضیه زیر می رساند.

قضیه ۲.۱

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله باشد، و L یک عدد، و f یک تابع تعریف شده در $[m, \infty)$ بطوری که $f(n) = a_n$ باشد برای $n \geq m$. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ باشد، پس $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ همگرا است و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ یا $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ پس $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ واگرا است و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

اثبات

ابتدا فرض می کنیم $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ باشد. و فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ پس یک عدد صحیح N وجود دارد، بطوری که اگر $x \geq N$ باشد، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ است. این یعنی اگر $n \geq N$ باشد، پس $|a_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon$ است. لذا بر اساس شماره (۴) داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ باشد، پس برای هر M یک عدد صحیح N وجود دارد، بطوری که اگر $x \geq N$ باشد پس $f(x) > M$ است بطوری که اگر $n \geq N$

باشد، پس $a_n > M$ است. براساس شماره (۵) این یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ، به همین طرق $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

مثال ۴ - نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ است.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = x^2$ باشد، برای $x \geq 1$ ، پس $f(n) = n^2$ است برای $n \geq 1$ چون $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ است، بر اساس قضیه ۲.۱ نتیجه می گیریم که $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

مثال ۵ - نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \text{ برای } r > 0$$

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = \frac{1}{x^r}$ باشد برای $x \geq 1$ پس $f(n) = \frac{1}{n^r}$ است برای $n \geq 1$ و بر اساس آنچه در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان در مورد توابع توانی گفتیم می دانیم که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ است. در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

مثال ۶ - فرض کنید r هر عددی باشد. نشان دهید دنباله $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $|r| > 1$ و

$r = -1$ و اگر r برای بقیه مقادیر r این دنباله همگرا است. با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 1 & \text{برای } r = 1 \\ 0 & \text{برای } |r| < 1 \end{cases}$$

پاسخ

ابتدا مقادیر نامنفی r را بررسی می کنیم. فرض می کنیم $f(x) = r^x$ برای $x \geq 1$

پس

$$f(n) = r^n \text{ برای } n \geq 1$$

پس بر اساس آنچه در مورد تابع های نمایی دیده ایم، داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} 0 & \text{برای } 0 \leq r < 1 \\ 1 & \text{برای } r = 1 \\ \infty & \text{برای } r > 1 \end{cases}$$

پس بر اساس قضیه ۲.۱ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{برای } 0 \leq r < 1 \\ 1 & \text{برای } r = 1 \\ \infty & \text{برای } r > 1 \end{cases} \quad (۶)$$

لذا $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $r > 1$ واگرا است و برای $0 \leq r \leq 1$ همگرا است.

اگر $r = -1$ باشد، پس $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ تبدیل می شود به $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ که بر اساس مثال

۳ وگرا است، پس چون $|r^n| = |r|^n$ است از شماره (۶) نتیجه می shaved

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \begin{cases} 0 & \text{برای } -1 < r < 1 \\ \infty & \text{برای } r < -1 \end{cases}$$

در نهایت $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ است وقتی که $-1 < r < 1$ است، و $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ وجود ندارد وقتی که $r < -1$ است. این خاتمه پاسخ مثال ۶ است.

برای هر عدد r ، دنباله $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله هندسی می نامند.

دنباله هندسی Geometric Sequence

مثال ۷ - نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

پاسخ
اگر فرض کنیم

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{برای } x \geq 1$$

باشد، پس

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{برای } n \geq 1$$

است. در بخش ۲.۱۳ قانون لا پیتال مثال ۹ کتاب حساب دیفرانسیل آرمان ثابت کردیم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$$

پس بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

است. برای یاد آوری، آن مثال را در زیر می آوریم.

مثال ۹ کتاب حساب دیفرانسیل آرمان بخش ۲.۱۳ قانون لا پیتال

نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

پاسخ

ابتدا حد لگاریتم سمت چپ را پیدا می کنیم. یعنی عدد b را پیدا می کنیم به طوری که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = b$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

این عبارت حالا آماده است برای قانون لا پیتال. زیرا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

پس $b = 1$ است و لذا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^1 = e$$

مثال ۸ - نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad \text{برای } c > 0$$

پاسخ

می توان نوشت

$$\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}} = e^{\left(\frac{1}{n} \right) \ln c}$$

پس فرض می کنیم

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{x} \right) \ln c} \quad \text{برای } x \geq 1$$

پس f پیوسته است و $f(n) = e^{\left(\frac{1}{n} \right) \ln c} = \sqrt[n]{c}$ است برای $n \geq 1$ پس، چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) \ln c = 0$ است، پس داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{x} \right) \ln c} = e^0 = 1$$

بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

مثال ۹ - نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

پاسخ

با تقلید از حل مثال ۸ داریم.

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\left(\frac{1}{n} \right) \ln n}$$

پس فرض می کنیم

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}\right) \ln x} \quad \text{برای } x \geq 1$$

باشد. چون f پیوسته است و $f(n) = e^{\left(\frac{1}{n}\right) \ln n} = \sqrt[n]{n}$ است برای $n \geq 1$ ، و چون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$$

بر اساس قانون لا پیتال داریم .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

و لذا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right) \ln x} = e^0 = 1$$

پس بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

تمرینات ۱.۲

در تمرینات زیر چهار جمله اول دنباله را بنویسید.

۱) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

۲) $\left\{ \frac{k-1}{k+1} \right\}_{k=1}^{\infty}$

۳) $\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

در تمرینات زیر با استفاده از تعریف های ذکر شده در این بخش ، درستی تساوی را نشان دهید.

۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2$

۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$

۶) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$

۷) $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \infty$

در تمرینات زیر ، مشخص کنید که دنباله به یک عدد همگرا است و یا به طرف $-\infty$ ، ∞ واگرا است.

۸) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{1}{n} \right)$

$$۹) \lim_{j \rightarrow \infty} (0.8)^j$$

$$۱۰) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$$

$$۱۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2-2}$$

$$۱۲) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4}{-n-5}$$

$$۱۳) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$۱۴) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n$$

$$۱۵) \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$۱۶) \lim_{k \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{k} \right)$$

$$۱۷) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx$$

در تمرینات زیر مشخص کنید که آیا دنباله همگرا است و یا واگرا. اگر همگرا است، حد آنرا پیدا کنید.

$$۱۸) \{-4n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$۱۹) \left\{ \frac{1}{n^2-1} \right\}_{n=2}^{\infty}$$

$$۲۰) \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$۲۱) \left\{ \frac{n^2-4n+3}{1+10n-4n^2} \right\}_{n=3}^{\infty}$$

$$۲۲) \left\{ \frac{(-1)^{n-2} n}{4+n^3} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$۲۳) \left\{ \frac{e^{\Delta n}}{3-e^2 n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

پاسخ تمرینات ۱.۲

در تمرینات زیر چهار جمله اول دنباله را بنویسید.

$$۱) \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=3}^{\infty}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$$

$$۲) \left\{ \frac{k-1}{k+1} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$$

$$۳) \left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$۲, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}$$

در تمرینات زیر با استفاده از تعریف های ذکر شده در این بخش ، درستی تساوی را نشان دهید.

$$۴) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2$$

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ و N یک عدد صحیح باشد. اگر $n \geq N$ باشد ، پس

$$|(-2) - (-2)| = 0 < \varepsilon$$

لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2$$

$$۵) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ و N یک عدد صحیح بزرگ تر از $\frac{1}{\varepsilon}$ باشد. اگر $n \geq N$ باشد ، پس

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

$$\left| \frac{3n+1}{n} - 3 \right| = \left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

فرض می کنیم M هر عددی باشد ، و فرض می کنیم N یک عدد صحیح مثبت باشد ، بطوری که

$$N > M^2 \text{ باشد. اگر } n \geq N \text{ باشد ، پس}$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > \sqrt{M^2} = |M| \geq M$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

$$۷) \lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \infty$$

فرض می کنیم M هر عددی باشد ، و فرض می کنیم N یک عدد صحیح مثبت باشد ، بطوری که $N > \ln|M|$ باشد. اگر $k \geq N$ باشد ، پس

$$e^k \geq e^N > e^{\ln|M|} = |M| \geq M$$

پس

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \infty$$

در تمرینات زیر ، مشخص کنید که دنباله به یک عدد همگرا است و یا به طرف ∞ ، $-\infty$ و اگر است.

$$۸) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{1}{n} \right)$$

فرض می کنیم $f(x) = \pi + \frac{1}{x}$ باشد ، برای $x \geq 1$ پس $f(n) = \pi + \frac{1}{n}$ است برای $n \geq 1$ چون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{1}{x} \right) = \pi$$

است. پس بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{1}{n} \right) = \pi$$

$$۹) \lim_{j \rightarrow \infty} (0.8)^j$$

چون $0 < 0.8 < 1$ است ، بر اساس مثال ۶ داریم.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (0.8)^j = 0$$

$$۱۰) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$$

چون $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ است و $0 < \frac{1}{e} < 1$ است پس بر اساس شماره (۶) و $r = \frac{1}{e}$ داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$$

$$۱۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2-2}$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2}$ باشد، برای $x \geq 2$ پس $f(n) = \frac{n+3}{n^2-2}$ است برای $n \geq 2$. چون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

پس بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2-2} = 0$$

$$۱۲) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4}{-n-5}$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{2x^2-4}{-x-5}$ باشد، برای $x \geq 1$ پس $f(n) = \frac{2n^2-4}{-n-5}$ است برای $n \geq 1$. چون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-4}{-x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \frac{4}{x}}{-1 - \frac{5}{x}} = -\infty$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4}{-n-5} = -\infty$$

$$۱۳) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n}$$

فرض می کنیم $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ باشد، برای $x \geq 1$ پس $f(n) = n \sin \frac{\pi}{n}$ است برای $n \geq 1$ بر اساس قانون لا پیتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi \cos \frac{\pi}{x}\right) = \pi \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$$

$$۱۴) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n$$

فرض می کنیم $f(x) = \left(1 + \frac{0.05}{x}\right)^x$ باشد، برای $x \geq 1$ پس $f(n) = \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n$ است
برای $n \geq 1$ چون $\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{0.05}{x}\right)$ است برای $x \geq 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{0.05}{x}\right) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

پس بر اساس قانون لا هیتال داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{0.05}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{0.05}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{0.05}{x}} \left(-\frac{0.05}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0.05}{1 + \frac{0.05}{x}} = 0.05$$

پس $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{0.05}$ است، پس بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n = e^{0.05}$$

$$۱۵) \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + k\right)^{\frac{1}{k}}$$

فرض می کنیم $f(x) = \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$ باشد، برای $x \geq 1$ پس $f(k) = \left(1 + k\right)^{\frac{1}{k}}$ است برای
 $k \geq 1$ چون $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x)$ برای $x \geq 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} x$$

پس بر اساس قانون لا هیتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x} = 0$$

پس $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^0 = 1$ لذا بر اساس قضیه ۲.۱

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + k\right)^{\frac{1}{k}} = 1$$

$$۱۶) \lim_{k \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{k} \right)$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{x}$ باشد، برای $x \geq 1$ پس $f(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{k}$ است، برای $k \geq 1$ چون تابع کسینوس در صفر پیوسته است، پس داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حالا فرض می کنیم $g(x) = \arcsin x$ باشد. چون تابع آرک سینوس در $[-1, 1]$ پیوسته است، پس بر اساس قضیه جانشینی با $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{x}$ داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

پس

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{k} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$۱۷) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx$$

می دانید که

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx = e^x \bigg|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}$$

است و چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \right) = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

در تمرینات زیر مشخص کنید که آیا دنباله همگرا است و یا واگرا. اگر همگرا است، حد آنرا پیدا کنید.

$$۱۸) \quad \{-4n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-4n) = -\infty$$

پس دنباله واگرا است.

$$۱۹) \quad \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \right\}_{n=2}^{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$$

پس دنباله همگرا است به طرف صفر.

$$۲۰) \quad \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

بر اساس مثال ۵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = 0$$

پس دنباله به طرف صفر همگرا است.

$$۲۱) \quad \left\{ \frac{n^2 - 4n + 3}{1 + 10n - 4n^2} \right\}_{n=3}^{\infty}$$

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ ترین توان مخرج تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{1 + 10n - 4n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{10}{n} - 4} \right) \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{10}{n} - 4 \right)} = \frac{1}{-4} \end{aligned}$$

$$۲۲) \quad \left\{ \frac{(-1)^{n-۲} n}{۴ + n^۳} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ ترین توان مخرج تقسیم می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{n-۲} n}{۴ + n^۳} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{(-1)^{n-۲} n}{n}}{\frac{۴}{n^۳} + ۱} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{n-۲}}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{۴}{n^۳} + ۱ \right)}$$

$$\frac{0}{۱} = 0$$

$$۲۳) \quad \left\{ \frac{e^{\Delta n}}{۳ - e^{\Upsilon n}} \right\}_{n=۱}^{\infty}$$

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ ترین توان مخرج تقسیم می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\Delta n}}{۳ - e^{\Upsilon n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{e^{\Upsilon n}}{e^{\Upsilon n}}}{\frac{۳}{e^{\Upsilon n}} - ۱} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\Upsilon n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{۳}{e^{\Upsilon n}} - ۱ \right)}$$

$$= \frac{\infty}{-۱} = -\infty$$

۱.۳ - خواص همگرایی دنباله ها

در این بخش بحث خود را در مورد همگرایی و واگرایی دنباله ها ادامه می دهیم. چون دنباله ها تابع هستند، می توانیم دنباله ها را هم مانند تابع ها با هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کنیم.

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ دنباله های همگرا باشند. پس مجموع

$$\{a_n + b_n\}_{n=m}^{\infty}, \text{ ضرب های } \{ca_n\}_{n=m}^{\infty} \text{ و } \{a_n * b_n\}_{n=m}^{\infty} \text{ و تقسیم}$$

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=m}^{\infty}$ در صورتی که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ باشد، همگی همگرا هستند. و داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (۱)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (۴)$$

مثال ۱ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n + 5}$$

پاسخ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

قضیه ساندویچی برای دنباله ها

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ باشد، و اگر $\{c_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله باشد، بطوری که

$a_n \leq c_n \leq b_n$ برای $n \geq m$ باشد، پس $\{c_n\}_{n=m}^{\infty}$ همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (۵)$$

مثال ۲ - نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$$

پاسخ

می دانیم که $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ است، بطوری که

$$0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

پس بر اساس قضیه ساندویچی داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$$

مثال ۳ - نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

پاسخ

ابتدا نشان می دهیم که برای $n \geq 1$ داریم.

$$0 \leq \frac{\ln n}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

برای رسیدن به این هدف ملاحظه می شود که برای $t \geq 1$ داریم $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ است، بطوری که

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_1^n = 2(\sqrt{n} - 1) \leq 2\sqrt{n}$$

پس

$$0 \leq \frac{\ln n}{n} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (۴)$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

مثال ۴ - نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

پاسخ

در بخش ۱.۱ فرمول شماره (۸) گفتیم

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

چون

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n}$$

است برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ است، پس بر اساس قضیه ساندویچی برای دنباله ها داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right] = 0$$

است، رابطه بالا معادل رابطه زیر است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

مثال ۵ - نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) = \ln 2$$

پاسخ

در بخش ۱.۱ فرمول (۱۰) گفتیم

$$\left| \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) \right| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

است، پس بر اساس قضیه ساندویچی برای دنباله ها داریم

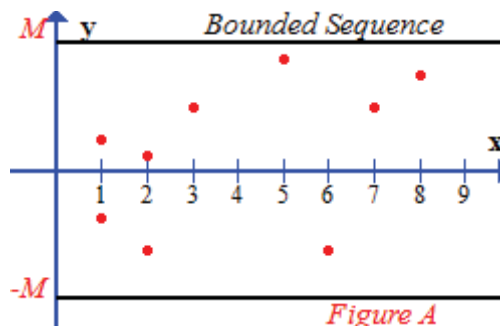
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) \right] = 0$$

است، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) = \ln 2$$

دنباله های کران دار Bounded Sequences

دنباله $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ کران دار است اگر یک عدد مانند M وجود داشته باشد، بطوری که $|a_n| \leq M$ باشد برای $n \geq m$. تصویر A در غیر این صورت می گوئیم آن دنباله بی کران است. مثلا دنباله های $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ و $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار هستند، اما $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ بی کران است.



حالا نشان می دهیم که دنباله های همگرا، همیشه کران دار هستند و دنباله های بی کران، همیشه واگرا هستند.

قضیه ۳.۱

- الف - اگر $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ همگرا باشد، پس این دنباله کران دار است.
 ب - اگر $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ بی کران باشد، پس این دنباله واگرا است.

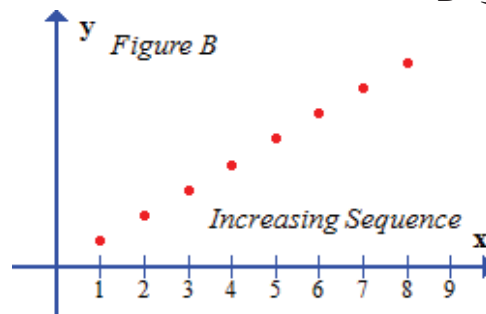
اثبات

الف - فرض می کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ باشد، پس یعنی یک N وجود دارد، بطوری که اگر $n \geq N$ باشد، پس $|a_n - L| < 1$ است. لذا اگر $n \geq N$ باشد، پس $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$. فرض می کنیم M عددی باشد بزرگ تر از $1 + |L|$ و $|a_m|, |a_{m+1}|, \dots, |a_{N-1}|$. پس $|a_n| \leq M$ است برای $n \geq m$ و لذا دنباله کران دار است. چون قسمت ب هم از لحاظ منطقی معادل قسمت الف است، پس قضیه ثابت شد.

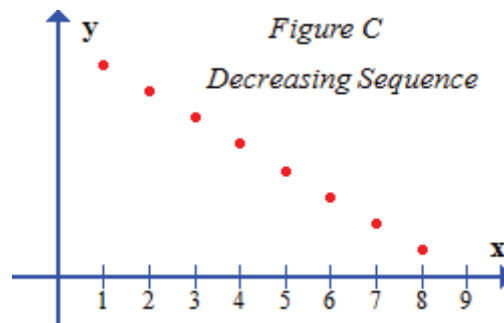
پس بر اساس قضیه ۳.۱ دنباله های بی کران $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{\ln n\}_{n=2}^{\infty}$ واگرا هستند.

توجه - قضیه ۳.۱ نمی گوید تمام دنباله های کران دار، همگرا هستند. مثلا $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار است، اما در مثال ۳ بخش ۱.۲ ثابت کردیم که این دنباله واگرا است.

می‌گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ صعودی است اگر مثل یک تابع صعودی باشد. یعنی $a_n \leq a_{n+1}$ باشد برای هر $n \geq m$. تصویر B



به همین طریق، می‌گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ نزولی است اگر $a_n \geq a_{n+1}$ باشد، برای هر $n \geq m$. تصویر C.



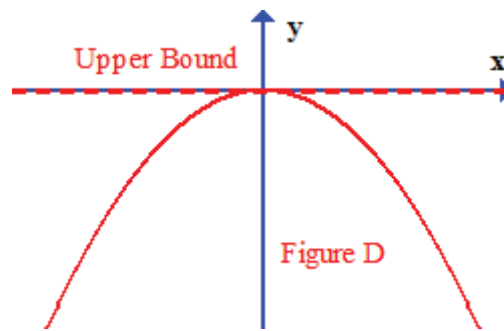
همانطور که برای تابع دیده ایم، یک دنباله هم لزومی ندارد که صعودی و یا نزولی باشد. مثلاً $\{(-1)^n\}_{n=m}^{\infty}$ نه صعودی است و نه نزولی. زیرا بین ۱ و -۱ نوسان می‌کند.

قضیه ۳.۲

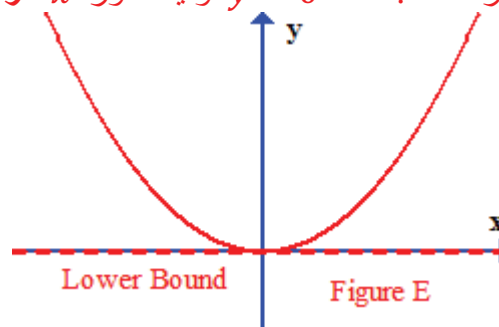
دنباله کران دار $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ خواه صعودی یا نزولی باشد، همگرا است. اگر دنباله صعودی است، پس حد آن کوچک‌ترین L است بطوری که $a_n \leq L$ است برای $n \geq m$. اگر دنباله نزولی است، پس حد آن بزرگ‌ترین عدد L است بطوری که $a_n \geq L$ است برای $n \geq m$.

اثبات

ابتدا برای یادآوری تعریف کران بالا و کران پایین را در زیر می‌آوریم.
یک مجموعه اعداد حقیقی S از طرف بالا کران دار **Bounded from above** است اگر یک عدد حقیقی k وجود داشته باشد، بطوری که $k \geq s$ باشد، برای تمام s ها در S . در تصویر نمودار D نمودار $f(x) = -x^2$ را ملاحظه می‌کنید. این تابع از طرف بالا کران دار است. کران بالای این تابع محور x است. این خط را Upper Bound می‌گویند. در این تصویر هیچ یک از مقادیر f بزرگ‌تر از صفر نیست. و خط $y = 0$ و یا محور x را کران بالای این تابع می‌گویند.



در تصویر E نمودار $f(x) = x^2$ را ملاحظه می کنید. این تابع از طرف پایین کران دار است، یعنی یک عدد حقیقی k وجود دارد، بطوری که $k \leq s$ است برای تمام s ها در S . در این مثال تمام مقادیر f از صفر بزرگ تر هستند. خط $y = 0$ و یا محور x کران پایین این تابع است.



تعریف کمترین کران بالا و بزرگ ترین کران پایین

یک عدد M کوچک ترین کران بالای یک مجموعه S است اگر M یک کران بالای S باشد و هیچ کدام از کران بالای S کوچک تر از M نباشد.

یک عدد m بزرگ ترین کران پایین یک مجموعه S است اگر m یک کران پایین S باشد و هیچ کدام از کران پایین S بزرگ تر از m نباشد.

هر مجموعه اعداد حقیقی که از بالا کران دار باشد، یک کوچک ترین کران بالا دارد.

حالا اثبات قضیه

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله کران دار و صعودی باشد. بر اساس تعریف کمترین کران بالا یک کوچک ترین کران بالای L از مجموعه S شامل $a_1, a_2, a_3, \dots$ وجود دارد. ثابت می کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ است.

فرض می کنیم L کوچک ترین کران بالای S باشد، $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست. پس یک عدد a_N در S وجود دارد بطوری که $L - \varepsilon < a_N \leq L$ باشد. چون دنباله داده شده، صعودی است، پس داریم $a_N \leq a_n$ و لذا $L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L$ است برای هر $n \geq N$ ، پس

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad n \geq N$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

به همین طریق می توان نشان داد هر دنباله کران دار و نزولی، همگرا است.

مثال ۶ - فرض کنید داشته باشیم

$$a_n = 1 + \frac{1}{1 * 1!} + \frac{1}{2 * 2!} + \frac{1}{3 * 3!} + \dots + \frac{1}{n * n!} \quad \text{برای } n \geq 1$$

نشان دهید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

پاسخ
چون

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} > a_n$$

است، پس دنباله صعودی است. برای نشان دادن این که این دنباله کران دار است، مثال ۴ را بکار می بریم و ملاحظه می کنیم

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{1 * 1!} + \frac{1}{2 * 2!} + \frac{1}{3 * 3!} + \dots + \frac{1}{n * n!} \\ < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < e$$

چون دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و کران دار است، پس بر اساس قضیه ۳.۲، این دنباله همگرا است.

از مطالب گفته شده می توان نتیجه گرفت که اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، پس برای هر عدد صحیح مثبت k دنباله $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ هم همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (۷)$$

مثلا، اگر $a_n = \frac{1}{n}$ و $k = 2$ باشد، می بینیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (۸)$$

و اگر $a_n = r^n$ و $k = -1$ باشد، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad \text{برای } -1 < r < 1 \quad (۹)$$

تمرینات ۱.۳

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا دنباله کران دار است یا بی کران.

$$۱) \left\{ ۱ + \frac{۲}{n} \right\}_{n=۱}^{\infty}$$

$$۲) \left\{ n + \frac{۱}{۲n} \right\}_{n=۱}^{\infty}$$

$$۳) \{ \cosh k \}_{k=۱}^{\infty}$$

در تمرینات زیر، حد را پیدا کنید.

$$۴) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(۲ + \frac{۱}{n} \right)$$

$$۵) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱} \right)$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۲}}$$

$$۷) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+۱}{k}$$

$$۸) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۴n^۳ - ۵}{۶n^۳ + ۳}$$

$$۹) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{۳n}$$

$$۱۰) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+۱}{\sqrt{n}-۱}$$

$$۱۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n} \right)$$

$$۱۲) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-۱)^n}{n}$$

$$۱۳) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۱}{ne^n}$$

$$۱۴) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(۱ + \frac{۱}{j} \right)}{j}$$

۱۵ - بر اساس آنچه در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم ، بخش ۲.۱۲ توابع هیپر بالیک گفتیم

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

با استفاده از این فرمول ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh n = 1$$

پاسخ تمرینات ۱.۳

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا دنباله کران دار است یا بی کران.

۱) $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

چون $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 3$ است برای $n \geq 1$ ، پس دنباله ، کران دار است.

۲) $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

چون $n + \frac{1}{n} \geq n$ است ، پس دنباله ، بی کران است.

۳) $\{ \cosh k \}_{k=1}^{\infty}$

چون $k = \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \geq \frac{1}{2}e^k$ است ، برای $k \geq 1$ ، و چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}e^x = \infty$ پس دنباله بی کران است.

در تمرینات زیر ، حد را پیدا کنید.

۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 - 0 = 0$

۶) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 * 2^n}{5^2 * 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{25} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{25} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{25} * 0 = 0$

عملیات بالا بر اساس فرمول شماره (۲) همین بخش و مثال ۶ بخش ۱.۲ انجام شد.

۷) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 1 + 0 = 1$

$$۸) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 5}{6n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{n^3}}{6 + \frac{3}{n^3}} = \frac{4 - 5(0)^3}{6 + 3(0)^3} = \frac{4}{9}$$

$$۹) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} * \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 * 1 = 1$$

عملیات بالا بر اساس فرمول شماره ۳ همین بخش و مثال ۹ و ۸ بخش ۱.۲ انجام شد.

$$۱۰) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\begin{aligned} ۱۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) * \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} ((n+1) - n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$۱۲) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ملاحظه می کنید که

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

و چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

پس بر اساس قضیه ساندویچی برای دنباله ها داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$۱۳) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne^n}$$

چون داریم

$$0 \leq \frac{1}{ne^n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

و چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

پس بر اساس قضیه ساندویچی داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne^n} = 0$$

$$۱۴) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)}{j}$$

چون

$$0 \leq \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)}{j} \leq \frac{\ln 2}{j} \quad \text{برای } j \geq 1$$

و چون

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{j} = 0 = \lim_{j \rightarrow \infty} 0$$

پس بر اساس قضیه ساندویچی داریم.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)}{j} = 0$$

۱۵ - بر اساس آنچه در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم ، بخش ۲.۱۲. توابع هیپر بالیک گفتیم

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

با استفاده از این فرمول ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh n = 1$$

اثبات

چون

$$0 < e^{-2n} < e^{-n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

و چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0$$

پس بر اساس تمرین شماره ۱۰ بخش ۱.۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n} = 0$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

۱.۴ - سری های نامتناهی Infinite Series

توجه: برای یاد آوری دنباله های حسابی و دنباله ها و سری های هندسی به کتاب کامل جبر توسط همین قلم مراجعه کنید.

مسلم است که می دانیم چگونه تعداد محدودی عدد را با هم جمع کنیم. اما تصور کنید می خواهیم مجموعه نامتناهی اعداد

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

را با هم جمع کنیم. اگر آنها را به ترتیب با هم جمع کنیم، اعداد زیر بدست می آوریم.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$$

که به نظر می رسد به یک نزدیک می شود.
پس منطقی است اگر بگوییم مجموع

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

یک است.

همچنین در بخش ۱.۳ مثال ۴ نشان دادیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = e$$

طبیعی است که بگوییم مجموع زیر می شود e

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

بطور کلی، برای این که مشخص کنیم آیا می توان مجموع اعداد در دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را تعریف کنیم اعداد $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ به ترتیب با هم جمع می کنیم تا ببینیم آیا به یک حد نزدیک می شویم یا نه. جمع هایی که بدست می آوریم به ترتیب زیر خواهند بود.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

جمع های بالا را حاصل جمع جزئی یا مجموع جزئی $Partial\ sum$ می نامند. اگر دنباله حاصل جمع های جزئی حد داشته باشد، آن حد را مجموع یا حاصل جمع Sum می نامیم و با نماد زیر نشان می دهیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اما، خواه حاصل جمع جزئی به یک حد نزدیک بشود و یا نشود، عبارت های زیر را بکار می بریم، تا نشان دهیم چه اعدادی با هم جمع شده اند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{و} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

هر کدام از عبارت های بالا را یک سری می نامیم. مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

نماد $\sum$ سیگما تلفظ می شود.

تعریف ۴.۱

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ یک دنباله باشد. برای هر عدد صحیح j ، **مجموع جزئی J ام** J th partial sum که با نماد s_j نشان می دهیم، عبارت است از مجموع اولین j جمله های آن دنباله. اگر $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$ وجود داشته باشد، می گوئیم سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ **همگرا Converges** است. و $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$ را **حاصل جمع سری Sum of the Series** می نامیم. در غیر این صورت می گوئیم سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ **واگرا Diverges** است. اعداد $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ را **جملات Terms** سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ می نامند.

چون همانطور که قبلاً گفتیم، حد یک دنباله منحصر به فرد است، پس حد یک سری هم منحصر به فرد است.

تقریباً تمام سری های که در آینده با آنها سرو کار داریم به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و یا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ هستند. برای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مجموع جزئی J ام به صورت زیر است.

$$s_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j$$

و برای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مجموع جزئی J ام به صورت زیر است.

$$s_j = a_0 + a_1 + \dots + a_{j-1}$$

مثال ۱ - نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

پاسخ

در بخش ۱.۳ مثال ۴ نشان دادیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e \quad (1)$$

اگر $a_n = \frac{1}{n!}$ باشد، برای $n \geq 0$ پس

$$s_j = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(j-1)!}$$

است. پس بر اساس فرمول شماره (۱) بالا داریم.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = e$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

مثال ۲ نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

پاسخ

در بخش ۱.۳ مثال ۵ ثابت کردیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) = \ln 2 \quad (2)$$

اگر $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ باشد، برای $n \geq 1$ ، پس

$$s_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_j = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{j-1} \frac{1}{j}$$

بر اساس فرمول شماره (۲) بالا، $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \ln 2$ است. لذا

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$$

مثال ۳ - نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots$$

همگرا است و مجموع آنرا حساب کنید.

پاسخ

میدانید که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{برای } n \geq 1$$

پس

$$s_j = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) + \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \quad (3)$$

پس

$$s_j = 1 - \frac{1}{j+1}$$

است. و چون

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{j+1}\right) = 1$$

است. پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 1$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ را سری ادغامی **Telescoping Series** می نامند، زیرا هنگامی که مجموع جزئی مانند فرمول شماره (۳) می نویسیم، بجز جمله اول و آخر، همه حذف می شوند. سری ادغامی را سری توی هم رونده هم می نامند.

مثال ۴ - نشان دهید سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

پاسخ

نشان می دهیم که

$$s_{j+1} \geq 1 + j \left(\frac{1}{j+1}\right), \quad \text{برای هر } j \quad (4)$$

و لذا دنباله مجموع جزئی بی کران است و باید واگرا باشد. برای اثبات شماره (۴)، ملاحظه می کنید که

$$\begin{aligned} s_{2+1} &= s_2 = 1 + \frac{1}{2} \\ s_{2+2} &= s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\ s_{2+3} &= s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

بطور کلی جمله ها را در چند گروه s_j ترتیب می دهیم ، بطوری که مجموع هر گروه $\frac{1}{j}$ بشود.

$$\begin{aligned} s_j &= 1 + \frac{1}{j} + \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2}\right) + \left(\frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{j^{j-1}} + \dots + \frac{1}{j^j}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{j} + \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2}\right) + \left(\frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3} + \frac{1}{j^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{j^j} + \dots + \frac{1}{j^j}\right) \\ &= 1 + j \left(\frac{1}{j^2}\right) \end{aligned}$$

چون

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[1 + j \left(\frac{1}{j^2}\right) \right] = \infty$$

است. پس دنباله مجموع جزئی $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ بی کران است ، همان طور که می خواستیم ثابت کنیم ، و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است.

همانطور که دیدیم ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است ، گر چه جمله های آن به طرف صفر همگرا است. این سری بنام سری هارمونیک یا سری هما هنگ **Harmonic Series** نامیده می شود. زیرا جمله های آن ، دنباله هارمونیک تشکیل می دهند.

مقایسه $\sum_{n=m_1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=m_2}^{\infty} a_n$

می خواهیم مجموع جزئی دوسری $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ با هم مقایسه کنیم. ملاحظه کنید برای هر عدد صحیح مثبت $j \geq 5$

$$\overbrace{\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2} + \dots + \frac{1}{j^2}}^{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ جمع جزئی}} = \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2} \right) + \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^2} + \dots + \frac{1}{j^2} \right) \quad (5)$$

از فرمول شماره (۵) نتیجه می شود اگر $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا باشد ، پس $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ هم همگرا است و بر عکس ، و همچنین اگر هر دو سری همگرا باشند ، جمع آنها دارای رابطه زیر است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \right) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

به همین طریق می توان نشان داد اگر $m_2 > m_1$ باشد ، پس سری $\sum_{n=m_1}^{\infty} a_n$ همگرا است ، فقط به شرطی که $\sum_{n=m_2}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. علاوه بر این اگر هر دو سری همگرا باشند ، پس

$$\sum_{n=m_1}^{\infty} a_n = (a_{m_1} + a_{m_1+1} + \cdots + a_{m_2-1}) + \sum_{n=m_2}^{\infty} a_n \quad (۶)$$

بنابر این، اندیس m که با آن جمع سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ آغاز می شود، ربطی به همگرایی سری ندارد. گرچه در فرمول (۶) چنین نیست.

قضیه آزمون واگرایی A Divergence Test Theorem

الف - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ است.

ب - اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ صفر نباشد و یا وجود نداشته باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اثبات

برای اثبات الف، برای $n \geq 1$ داریم

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1} \quad (۷)$$

چون بر اساس فرض مساله این سری همگرا است، پس می دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ وجود دارد. پس بر اساس آنچه در آخر بخش ۱.۳ گفتیم $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$ هم وجود دارد و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

پس از فرمول شماره (۷) نتیجه می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$$

این اثبات قسمت الف. چون قسمت ب هم منطقاً معادل قسمت الف است، پس اثبات قضیه کامل است.

قضیه آزمون واگرایی قسمت ب را گاهی اوقات، آزمون جمله n ام برای واگرایی می نامند. این آزمون به ما می گوید که سری های زیر واگرا هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ۶۱, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=-۴}^{\infty} n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ۲^{(n^۲)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

سری های هندسی Geometric Series

یک سری هندسی یک سری است به شکل $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n$ ، در صورتی که r و c عدد ثابت باشند و $c \neq 0$. واگرایی سری های هندسی تنها بستگی به انتخاب r دارد.

قضیه سری هندسی Geometric Series Theorem

فرض می کنیم r هر عددی باشد. و $c \neq 0$ و $m \geq 0$. سری هندسی $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n$ همگرا است فقط و فقط اگر $|r| < 1$ باشد. برای $|r| < 1$ داریم.

$$\sum_{n=m}^{\infty} cr^n = \frac{cr^m}{1-r} \quad (۸)$$

اثبات

حالت های $|r| \geq 1$ و $|r| < 1$ جداگانه بررسی می کنیم. اگر $|r| \geq 1$ باشد، پس

$$|cr^n| \geq |c|$$

است برای تمام $n \geq m$ ها، و لذا بر اساس قضیه آزمون واگرایی، سری $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n$ واگرا است. اگر $|r| < 1$ باشد، پس اتحاد زیر را بکار می بریم

$$(1-r)(1+r+r^2+\dots+r^{j-1}) = 1-r^j$$

این، یعنی

$$\begin{aligned} s_j &= cr^m + cr^{m+1} + \dots + cr^{m+j-1} = cr^m (1+r+r^2+\dots+r^{j-1}) \\ &= cr^m \left(\frac{1-r^j}{1-r} \right) \end{aligned}$$

چون $\lim_{j \rightarrow \infty} r^j = 0$ است بر اساس مثال ۶ بخش ۱.۲، پس

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \frac{cr^m}{1-r} * \lim_{j \rightarrow \infty} (1-r^j) = \frac{cr^m}{1-r}$$

عدد r نامیده می شود نسبت **Ratio** سری هندسی. به عبارت دیگر r خارج قسمت مشترک دو جمله متوالی در یک سری هندسی است. زیرا اگر هر کدام از دو جمله متوالی را بر هم تقسیم کنیم آن

خارج قسمت ها با هم مساوی هستند. یعنی $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

بر اساس قضیه سری هندسی، مجموع یک سری همگرای هندسی برابر است با جمله اول یعنی cr^m تقسیم بر $1-r$

مثال ۵ - نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$ است.

پاسخ

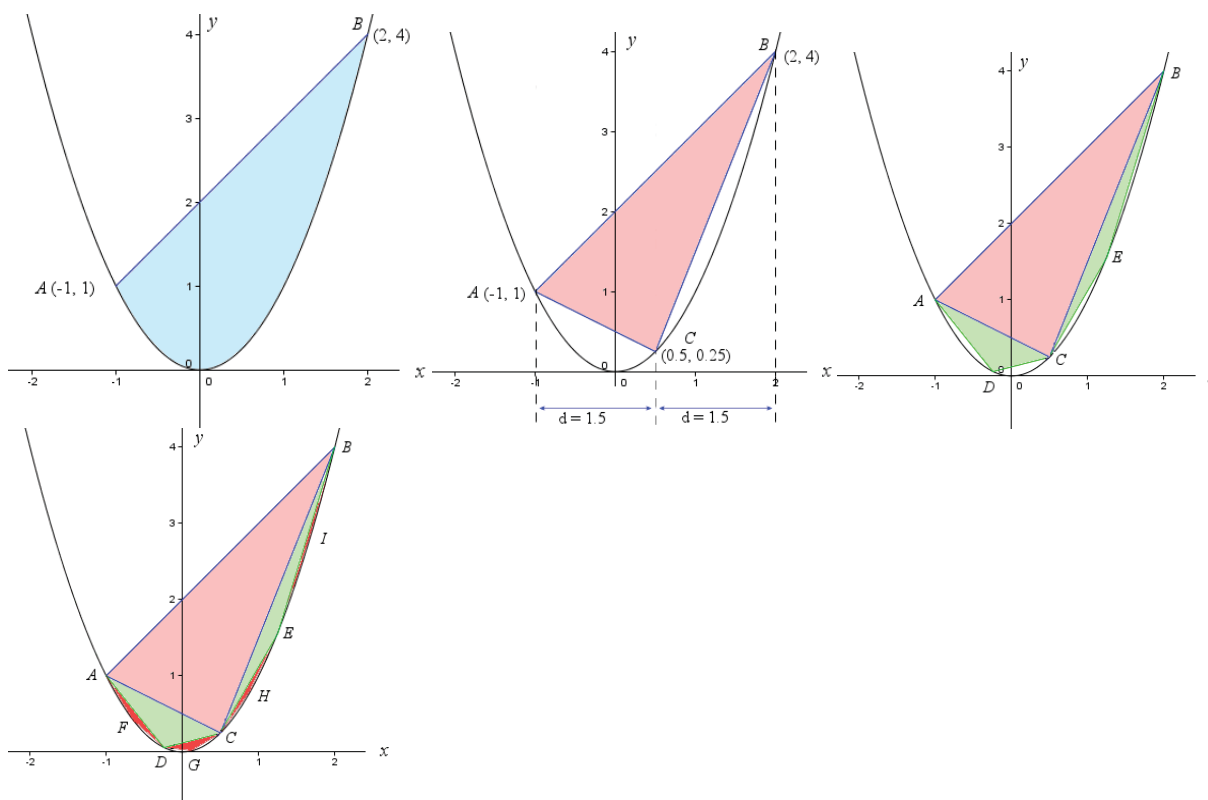
این سری یک سری هندسی است، با نسبت $r = \frac{1}{4}$ ، پس بر اساس قضیه سری هندسی، این سری

همگرا است. چون جمله اول $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ است، پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

سری در مثال ۵ از نظر تاریخی مهم است. هنگامی که ارشمیدس Archimedes مساحت ناحیه آبی رنگ تصویر زیر را محاسبه می کرد، شروع کرد به محاط کردن مثلث هایی داخل ناحیه و به تدریج تعداد مثلث ها را اضافه کرد و مساحت این مثلث ها را با هم جمع کرد و نتیجه گرفت مساحت ناحیه آبی

رنگ مساوی با $\frac{4}{3}$ است. البته ارشمیدس از موضوع سری که اکنون ما بکار می بریم استفاده نکرد. اما کار او مقدمه موضوع سری است که ما اکنون با آن کار می کنیم.



مثال ۶ – نشان دهید که

$$\sum_{n=2}^{\infty} 14 \left(\frac{5}{3} \right)^n = 1/8$$

است.

پاسخ

سری داده شده یک سری هندسی است با خارج قسمت مشترک $r = 5/3$. چون جمله اول

$$14 \left(\frac{5}{3} \right)^2$$

است، پس

$$\sum_{n=2}^{\infty} 14 \left(\frac{5}{3} \right)^n = \frac{14 \left(\frac{5}{3} \right)^2}{1 - 5/3} = 1/8$$

البته، قضیه سری های هندسی به ما می گوید همه سری های هندسی همگرا نیستند. در حقیقت

$$\sum_{n=6}^{\infty} 3 \left(\frac{5}{4} \right)^n$$

رابطه نزدیکی بین سری ها هندسی و اعشار های مکرر وجود دارد. مثلاً $0.3333 \dots$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$0.333 \dots = 3 \left(\frac{1}{10} \right) + 3 \left(\frac{1}{10} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

همچنین

$$0.454545\dots = 45 \left(\frac{1}{100} \right) + 45 \left(\frac{1}{100} \right)^2 + 45 \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 45 \left(\frac{1}{100} \right)^n$$

سری های هندسی ما را قادر می کنند که هر عدد اعشاری مکرر را بصورت یک کسر و در نتیجه یک عدد گویا بنویسیم.

تبدیل اعداد مکرر اعشاری به یک کسر ، به ما می گوید که اعداد مکرر اعشاری اعداد گویا هستند. عکس این موضوع هم صادق است. یعنی هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر نوشت. اما مراحل ذکر شده بالا برای اعداد اعشاری غیر مکرر قابل استفاده نیستند. مثلاً عدد

$$e = 2.71828\dots$$

که اعشاری مکرر نیست را نمی توان به صورت سری زیر نوشت.

$$2 + 7 \left(\frac{1}{10} \right) + 1 \left(\frac{1}{10} \right)^2 + 8 \left(\frac{1}{10} \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{10} \right)^4 + 8 \left(\frac{1}{10} \right)^5 + \dots$$

در حقیقت سری بالا به e همگرا است ، اما این سری یک سری هندسی نیست.

ترکیب سری ها Combinations of Series

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری باشند ، می توانیم آنها را جمله به جمله باهم جمع کنیم ، همچنین می توانیم تمام جملات هر کدام از سری ها در یک عدد c ضرب کنیم. این عملیات دو سری جدید به ما می دهد. یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. همگرایی این سری ها جدید بستگی به همگرایی سری های اولیه دارد.

قضیه ترکیب سری ها Combinations of Series Theorem

الف - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند ، پس $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ هم همگرا است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ب - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ، پس $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ هم همگرا است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اثبات

برای اثبات قسمت الف ، فرض می کنیم s_j, s'_j, s''_j به ترتیب حاصل جمع جزئی j ام سری های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ باشند. پس

$$\begin{aligned} s_j &= [(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_j + b_j)] \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_j) + (b_1 + b_2 + \dots + b_j) = s'_j + s''_j \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (s'_j + s''_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} s'_j + \lim_{j \rightarrow \infty} s''_j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

برای اثبات قسمت ب هم همین ایده را دنبال می کنیم.
قضیه ترکیب سری ها را می توان به سه سری هم تعمیم داد. همچنین می توان گفت

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (9)$$

مثال ۷- نشان دهید سری زیر همگرا است و مجموع آنرا پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2^n} - \frac{2}{n(n+1)} \right)$$

پاسخ

بر اساس قضیه سری های هندسی داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

بر اساس مثال ۳ و قضیه ترکیب سری ها قسمت دوم داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

در نتیجه بر اساس شماره (۹) داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2^n} - \frac{2}{n(n+1)} \right) = 4 - 2 = 2$$

تغییر اندیس ها Change of Indexes

می توانیم سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ را به صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ فرض کنیم ، با اندیس صفر. پس داریم.

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} \quad (10)$$

تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۱ - ۳ مجموعه جزئی چهارم هر یک از سری ها را حساب کنید.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$۲) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$۳) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

در تمرینات ۴ - ۷ با استفاده از قضیه آزمون واگرایی ، قسمت دوم ، مشخص کنید آیا سری های زیر همگرا هستند یا واگرا.

$$۴) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$۵) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

$$۶) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

در تمرینات ۸ - ۱۱ یک فرمول برای مجموعه های جزئی سری پیدا کنید. برای هر سری مشخص کنید که آیا مجموعه های جزئی حد دارد ، اگر چنین است ، حاصل جمع سری را پیدا کنید.

$$۸) \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$۹) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 - (n+1)^2]$$

در تمرینات ۱۶ - ۱۲ مشخص کنید که آیا سری داده شده همگرا است یا نه ، اگر همگرا است مجموع آنرا پیدا کنید.

$$۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

$$۱۳) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (0/3)^n$$

$$۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$۱۵) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}}$$

$$۱۶) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}$$

در تمرینات ۱۹ - ۱۷ سری داده شده که به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است ، به صورت $c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بنویسید.

$$۱۷) \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

$$۱۸) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$۱۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

در تمرینات ۲۳ - ۲۰ اعشار های مکرر را به صورت کسر بنویسید.

$$20) 0.72727272 \dots$$

$$21) 0.232232232 \dots$$

$$22) 27.56123123123 \dots$$

$$23) 0.86400000 \dots$$

۲۴ - نشان دادیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ، با استفاده از این حقیقت ، حاصل جمع زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

پاسخ تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۱ - ۳ مجموعه جزئی چهارم هر یک از سری ها را حساب کنید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ ۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27} \\ ۳) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

در تمرینات ۴ - ۷ با استفاده از قضیه آزمون واگرایی ، قسمت دوم ، مشخص کنید آیا سری های زیر همگرا هستند یا واگرا.

$$۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

چون حد بالا صفر نیست ، پس سری واگرا است.

$$۵) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = 0$$

چون حد بالا صفر است ، پس سری می تواند همگرا باشد .

$$۶) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

چون حد بالا صفر نیست، پس سری واگرا است.

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$$

چون حد بالا صفر نیست، پس سری واگرا است.
ممکن است بگویید چرا؟ به دلیل زیر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

با استفاده از قانون لا پیتال داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\cos \frac{1}{n}}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = 1$$

در تمرینات ۱۱ - ۸ یک فرمول برای مجموعه های جزئی سری پیدا کنید. برای هر سری مشخص کنید که آیا مجموعه های جزئی حد دارد، اگر چنین است، حاصل جمع سری را پیدا کنید.

$$۸) \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$s_j = j; \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \lim_{j \rightarrow \infty} j = \infty$$

پس سری واگرا است.

$$۹) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\text{وجود ندارد } \lim_{j \rightarrow \infty} s_j; \text{ برای } j \geq 1 \text{ و } s_{2j+1} = 1 \text{ و } s_{2j} = 0$$

پس سری واگرا است.

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$s_j = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{j+2}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j+2} \right) = \frac{1}{2}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} [n^3 - (n+1)^3]$$

$$s_j = (1 - 8) + (8 - 27) + \dots + (j^3 - (j+1)^3) = 1 - (j+1)^3$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - (j+1)^3) = -\infty$$

پس سری واگرا است.

در تمرینات ۱۶ - ۱۲ مشخص کنید که آیا سری داده شده همگرا است یا نه ، اگر همگرا است مجموع آنرا پیدا کنید.

$$۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{4}{7} \right)^n$$

چون سری داده شده یک سری هندسی است با نسبت $r = \frac{4}{7} < 1$ ، پس سری همگرا است و داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{4}{7} \right)^n = \frac{5 \left(\frac{4}{7} \right)}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{20}{3}$$

$$۱۳) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (0/3)^n$$

چون سری داده شده یک سری هندسی است با نسبت $r = -0/3$, $|-0/3| < 1$ ، پس سری همگرا است و داریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (0/3)^n = \frac{1}{1 - (-0/3)} = \frac{10}{13}$$

$$۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

چون سری داده شده یک سری هندسی است با نسبت $r = \frac{1}{2} < 1$ ، پس سری همگرا است و داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$۱۵) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}}$$

چون سری داده شده یک سری هندسی است با نسبت $r = \frac{3}{5} < 1$ ، پس سری همگرا است و داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (27)(5) \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{135 \left(\frac{3}{5}\right)}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{405}{2}$$

$$۱۶) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}$$

چون سری داده شده، یک سری هندسی است با نسبت $r = -\frac{3}{2}$ و $\left|-\frac{3}{2}\right| > 1$ ، پس این سری واگرا است.

در تمرینات ۱۷ - ۱۹ سری داده شده که به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است، به صورت $c + \sum_{n=4}^{\infty} a_n$ بنویسید.

$$۱۷) \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = \frac{57}{343} + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

$$۱۸) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{4}{5} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$۱۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{49}{36} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

در تمرینات ۲۳- تا ۲۵ اعشار های مکرر را به صورت کسر بنویسید.

$$20) \quad 0.72727272 \dots = 72 \left(\frac{1}{100} \right) + 72 \left(\frac{1}{100} \right)^2 + 72 \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 72 \left(\frac{1}{100} \right)^n = \frac{72 \left(\frac{1}{100} \right)}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{8}{11}$$

$$21) \quad 0.232232232 \dots = 232 \left(\frac{1}{1000} \right) + 232 \left(\frac{1}{1000} \right)^2 + 232 \left(\frac{1}{1000} \right)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 232 \left(\frac{1}{1000} \right)^n = \frac{232 \left(\frac{1}{1000} \right)}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{232}{999}$$

$$22) \quad 27.56123123123 \dots = 27.56 + 123 \left(\frac{1}{10} \right)^5 + 123 \left(\frac{1}{10} \right)^8 + 123 \left(\frac{1}{10} \right)^{11} + \dots$$

$$= \frac{2756}{100} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{100} \left(\frac{1}{1000} \right)^n = \frac{2756}{100} + \frac{\frac{123}{100} * \frac{1}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}}$$

$$= \frac{2756}{100} + \frac{123}{99900} = \frac{917789}{33300}$$

$$23) \quad 0.86400000 \dots = \frac{864}{1000} = \frac{108}{125}$$

۲۴- نشان دادیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ، با استفاده از این حقیقت ، حاصل جمع زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \ln 2 - \frac{5}{6}$$

سری های نامنفی - آزمون انتگرال و آزمون های مقایسه

Nonnegative Series – The Integral Test and the Comparison Tests

تا کنون، برای اثبات این که یک سری همگرا است، از طریق محاسبه مقدار آن عمل می کردیم. اما برای بیشتر سری های همگرا، پیدا کردن مقدار دقیق آن یا غیر ممکن و یا مشکل است. این موضوع هم حتی برای سری هایی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ صادق است. در بخش های آینده فرمول هایی برای مشخص کردن همگرایی و واگرایی سری ها بدست می آوریم. عجلتا توجه خود را به سری های نامنفی متمرکز می کنیم. یعنی سری هایی که جملات آنها منفی نیستند. برای آسان بودن کار فرض می کنیم اندیس اولیه یک باشد. مجموع جزئی $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ از یک سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تشکیل یک دنباله صعودی می دهد. یعنی

$$s_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j \leq a_1 + a_2 + \dots + a_j + a_{j+1} = s_{j+1} \quad \text{برای } j \geq 1$$

در نتیجه اگر $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ کران دار باشد، پس بر اساس قضیه ۳.۲ بخش ۱.۳ حد زیر وجود دارد.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$$

و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. بر عکس اگر $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ بی کران باشد، پس $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$ نمی تواند وجود داشته باشد، پس بر اساس قضیه ۳.۱ بخش ۱.۳ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

در این بخش در مورد دو نوع آزمون همگرایی بحث می کنیم.

۱ - مقایسه یک سری نامنفی داده شده با یک انتگرال نامعین.

۲ - مقایسه یک سری نامنفی داده شده با یک سری دیگر.

قضیه آزمون انتگرال Integral Test Theorem

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نامنفی باشد، و فرض می کنیم f یک تابع پیوسته، و نزولی باشد که در بازه $[1, \infty)$ تعریف شده باشد بطوری که

$$f(n) = a_n \quad \text{برای } n \geq 1 \quad (1)$$

باشد. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر فقط و فقط انتگرال

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

همگرا باشد.

اثبات

بر اساس شماره (۱) و این حقیقت که f نزولی است، پس داریم

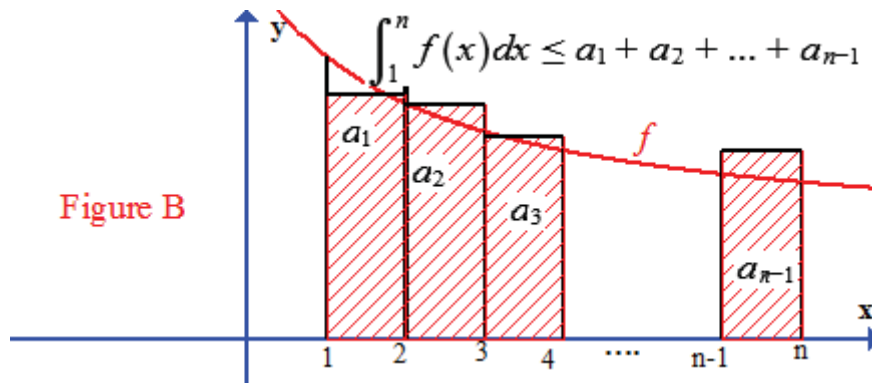
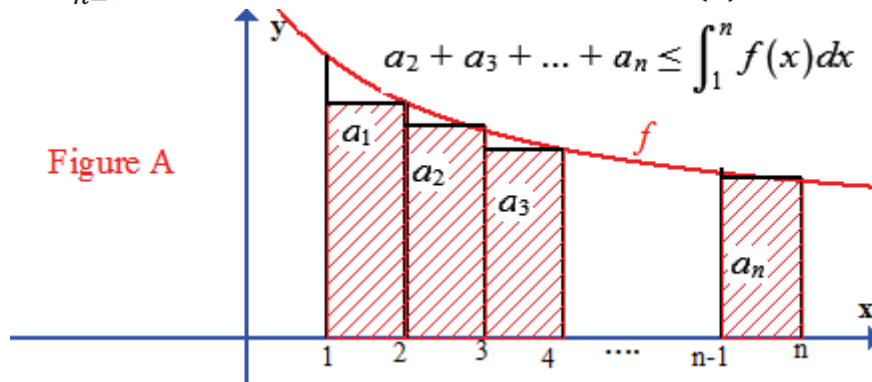
$$0 \leq a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx \quad \text{برای } n \geq 2 \quad (2)$$

و

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad \text{برای } n \geq 2 \quad (3)$$

تصویر های A و B

از شماره (۲) نتیجه می گیریم که سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر انتگرال همگرا باشد، و از شماره (۳) نتیجه می گیریم انتگرال همگرا است اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.



از شماره های (۲) و (۳) در اثبات آزمون انتگرال نتیجه می شود که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و یا $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد، دیگری هم همگرا است. علاوه بر این داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

آزمون انتگرال برای سری های p مناسب است. این سری ها نامنفی هستند و به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ می باشند. p یک عدد ثابت است.

مثال ۱ - نشان دهید سری زیر همگرا است اگر فقط و فقط $p > 1$ باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

پاسخ

اگر $p \leq 0$ باشد، هنگامی که n افزایش پیدامی کند، جملات $\frac{1}{n^p}$ به طرف صفر میل نمی کنند، پس بر اساس قضیه آزمون واگرایی بخش ۱.۴ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ واگرا است. حالا فرض می کنیم $p > 0$ باشد. برای $p = 1$ سری مایک سری هارمونیک است، که می دانیم واگراست. پس فرض می کنیم $p \neq 1$ باشد. تابع ایده آل برای استفاده از آزمون انتگرال مطابق زیر است.

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \text{ برای } x \geq 1$$

زیرا $f(n) = \frac{1}{n^p}$ است برای $n \geq 1$ و چون f در بازه $[1, \infty)$ پیوسته و نزولی است. برای اینکه مشخص کنیم که آیا $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا است، باید مطمئن شویم آیا

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx$$

وجود دارد یا نه. چون $p \neq 1$ است، پس داریم

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{(-p+1)x^{p-1}} \Big|_1^b = \frac{1}{(-p+1)} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right)$$

چون $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} \right)$ وجود دارد اگر $p > 1$ باشد و وجود ندارد اگر $0 < p < 1$ باشد، پس $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا است اگر $p > 1$ باشد، و واگرا است اگر $0 < p < 1$ باشد. در نتیجه آزمون انتگرال می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگرا است اگر $p > 1$ باشد، و واگرا است اگر $0 < p < 1$ باشد.

از مثال ۱ نتیجه می گیریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.001}} \text{ همگرا است}$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999}} \text{ واگرا است}$$

همچنین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگرا هستند. بطور کلی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگرا است برای هر عدد صحیح $p > 1$ ، اما مثال ۱ حاصل جمع این سری ها را به ما نمی دهد. این موضوع برای ریاضی دانان مساله بود تا لئونارد آیلر *Leonard Euler* اواسط قرن هیجدهم ثابت کرد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

است.

امروزه حاصل جمع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای هر عدد صحیح مثبت زوج شناخته شده است، اما برای هیچ عدد صحیح فرد بزرگ تر از یک شناخته نیست. مثلاً، گر چه می دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگرا است، اما حاصل جمع آنرا نمی دانیم.

مثال ۲ - نشان دهید که سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{برای } x \geq 2$$

باشد. پس f در بازه $[2, \infty)$ پیوسته و نزولی است. و داریم

$$f(n) = \frac{1}{n \ln n} \quad \text{برای } n \geq 2$$

حال ملاحظه می کنید که

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln(\ln x) \right) \Big|_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty \end{aligned}$$

یعنی $\int_2^{\infty} f(x) dx$ واگرا است. بر اساس قضیه آزمون انتگرال، سری داده شده، واگرا است. آزمون انتگرال هنگامی که بتوانیم تابع f را به اسانی انتگرال گیری کنیم، موثر است.

قضیه آزمون مقایسه The Comparison Tests Theorem

الف - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد و داشته باشیم $0 \leq a_n \leq b_n$ برای $n \geq 1$ پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است.

ب - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد و داشته باشیم $0 \leq b_n \leq a_n$ برای $n \geq 1$ پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اثبات

برای اثبات قسمت الف، فرض می کنیم s_j و s'_j به ترتیب مجموع جزئی j ام $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ باشد. چون بر اساس فرض قضیه، $\lim_{j \rightarrow \infty} s'_j$ وجود دارد، و م این حد را L می نامیم. چون $0 \leq a_n \leq b_n$ است برای همه n ها، پس $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ و $\{s'_j\}_{j=1}^{\infty}$ صعودی هستند و

$$(۴) \quad 0 \leq s_j \leq s'_j \leq L \quad j \geq 1$$

این یعنی $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله کران دار و صعودی است، پس بر اساس قضیه ۳.۲ بخش ۱.۳ می دانیم که $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$ وجود دارد. در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. علاوه بر این از فرمول شماره (۴) نتیجه می شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j \leq L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

این، قسمت الف را ثابت می کند.

برای اثبات قسمت ب، ملاحظه می کنید که اگر قرار باشد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، پس بر اساس قسمت الف سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ باید همگرا باشد. و این مخالف فرض قسمت ب است. پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باید واگرا باشد.

مثال ۳ - نشان دهید که سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

اثبات

بر اساس قضیه سری های هندسی، می دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگرا است. و چون داریم

$$\frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

پس بر اساس قضیه آزمون مقایسه، سری داده شده همگرا است.

مثال ۴ - نشان دهید سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}$$

اثبات

ملاحظه می کنید که

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}-1} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad \text{برای } n \geq 1$$

است. و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ یک سری p است با $p = \frac{1}{n}$ که می دانیم واگرا است. پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ هم واگرا است. پس بر اساس قضیه آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}$ واگرا است.

مثال ۵ - نشان دهید که سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{n!}$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$\frac{\sin^3 n}{n!} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{برای } n \geq 0$$

است. در مثال ۱ بخش ۱.۴ دیدیم که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ همگرا است. پس $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{n!}$ همگرا است. پس بر اساس قضیه آزمون مقایسه، سری داده شده همگرا است.

مثال ۶ - نشان دهید که سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

پاسخ

$$\frac{1}{2^n - 1} \geq \frac{1}{2^n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

است. و امکان ندارد همگرایی و یا واگرایی سری داده شده را از طریق مقایسه با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ مشخص کنیم. اما چون

$$\frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{برای } n \geq 1 \quad (5)$$

است، و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، بر اساس قضیه آزمون مقایسه، سری داده شده، همگرا است.

قضیه آزمون مقایسه حد Limit Comparison Test Theorem

فرض می کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری های نامنفی باشند. فرض می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

باشد. L یک عدد مثبت است.

الف - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هم همگرا است.

ب - اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هم، واگرا است.

اثبات

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ است، پس یک عدد صحیح N وجود دارد، بطوری که

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L \quad \text{برای } n \geq N$$

است. در نتیجه $a_n \leq 2Lb_n$ و $a_n \geq \frac{1}{2}Lb_n$ است، برای $n \geq N$. بر اساس این دو نامساوی

وقتی آزمون مقایسه داریم اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، پس در نتیجه

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2Lb_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

هم همگرا هستند. به همین طریق اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، پس

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2}Lb_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

هم واگرا هستند.

مثال ۷ - نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3-5n-7}$$

همگرا است.

پاسخ

جمله های سری داده شده، تابع های گویا بر حسب n هستند. برای پیدا کردن یک سری که با آن، سری داده شده را مقایسه کنیم، همه جمله ها را نادیده می گیریم بجز بیشترین توان n که در صورت و مخرج وجود دارد. پس داریم.

$$\frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$$

پس سری داده شده را با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ مقایسه می کنیم. چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک p سری است با $p = 2$ که می دانیم همگرا است، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ همگرا است. چون داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n-3}{n^3-5n-7}}{\frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3-3n^2}{4n^3-20n-28}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n}}{4 - \frac{20}{n} - \frac{28}{n^3}} = 1$$

قضیه آزمون مقایسه حد قسمت الف می گوید سری داده شده همگرا است.

مثال ۸ - نشان دهید سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$$

اثبات

همه جمله ها را بجز بالاترین توان n در مخرج را نادیده می گیریم. پس داریم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}$$

پس سری داده شده را با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}$ مقایسه می کنیم. چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}$ یک p سری واگرا است با

$p = \frac{2}{3}$ ، و چون داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}}{\frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{8n^2}{8n^2-5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{8}{8-\frac{5}{n}}} = 1$$

بر اساس آزمون مقایسه حد، قیمت ب، سری داده شده واگرا است.

تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۱۴ - ۱ با استفاده از قضایای آزمون مقایسه، آزمون مقایسه حد و آزمون انتگرال، مشخص کنید که آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$۳) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$۴) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(n^2)}}$$

راهنمایی - با $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ مقایسه کنید.

$$۵) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

$$۶) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$$

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$۸) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3}$$

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+1)^{\frac{3}{5}}}$$

$$۱۰) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$$

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

راهنمایی - $\ln n \leq \sqrt{n}$

$$۱۳) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

پاسخ تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۱۴ - ۱ با استفاده از قضایای آزمون مقایسه، آزمون مقایسه حد و آزمون انتگرال، مشخص کنید که آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

چون $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری p با $p = 2$ است و همگرا

است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ همگرا است.

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

چون $\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ یک سری p با $p = \frac{3}{2}$ است و همگرا

است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ همگرا است.

$$۳) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

چون $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{n+1}$ است برای $n \geq 1$ است و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است. هم واگرا است.

$$۴) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(n^2)}}$$

راهنمایی - با $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ مقایسه کنید.

چون $\frac{1}{e^{(n^2)}} < \frac{1}{e^n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ یک سری هندسی همگرا است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(n^2)}}$ هم همگرا است.

$$۵) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

چون $\frac{1}{(n-1)(n-2)} \leq \frac{1}{(n-2)^2}$ است برای $n \geq 3$ است و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}$ همگرا است.

$$۶) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2-1}{n^3-n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{n^3-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = 1$$

و چون $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است، پس آزمون مقایسه حد می گوید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$ واگرا است.

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$$

چون $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{n}{\sqrt[n]{n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n}} * \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ یک سری هندسی همگرا است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$ هم همگرا است.

$$۸) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 3}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2 - 3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{n^2}} = 1$$

و چون $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ یک سری با $p = \frac{3}{2}$ و همگرا است، پس آزمون مقایسه حد می گوید

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 3}$$

هم همگرا است.

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3 + 1)^{\frac{2}{5}}}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n^3 + 1)^{\frac{2}{5}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{5}}}{(n^3 + 1)^{\frac{2}{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{5}}} = 1$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}$ یک سری با $p = \frac{1}{5}$ و واگرا است، پس آزمون مقایسه حد می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3 + 1)^{\frac{2}{5}}}$ واگرا است.

$$۱۰) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 1$$

و چون $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری با $p=2$ و همگرا است پس آزمون مقایسه حد می گوید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ هم همگرا است.

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$$

چون $0 \leq \frac{\arctan n}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{n^2}$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$ بر اساس مثال ۱ همگرا است ، پس قضیه آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ هم همگرا است.

$$۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

راهنمایی - $\ln n \leq \sqrt{n}$

چون $\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ است برای $n \geq 1$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ بر اساس مثال ۱ همگرا است ، پس قضیه آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ هم همگرا است.

$$۱۳) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

چون $0 < \frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{(\ln 3)^n}$ است برای $n \geq 3$ و چون $\frac{1}{\ln 3} < 1$ است و چون $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$ یک سری هندسی همگرا است ، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ همگرا است و لذا $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ همگرا است.

$$۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است ، پس آزمون مقایسه حد می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ واگرا است.

۱.۶ - سری های نامنفی - آزمون نسبت و آزمون ریشه

Nonnegative Series – The Ratio Test and the Root Test

در این بخش دو آزمون همگرایی دیگر برای سری های نامنفی ارائه می دهیم ، آزمون نسبت و آزمون ریشه. این تست ها فقط شامل جمله های سری می شوند. اینجا لازم نیست یک سری دیگری پیدا کنیم و سری داده شده را با آن مقایسه کنیم. این دو آزمون از دو آزمون که در بخش ۱.۵ بحث کردیم آسان تر هستند. اما برای اثبات صحیح بودن این آزمون ها ، سری داده شده را با یک سری هندسی مقایسه می کنیم. که در هر حال به آزمون مقایسه وابسته هستند.

قضیه آزمون نسبت The Ratio Test Theorem

فرض می کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری نامنفی باشد. فرض می کنیم $a_n \neq 0$ باشد برای تمام n ها و این که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (\infty \text{ احتمالا})$$

الف - اگر $0 \leq r < 1$ باشد ، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب - اگر $r > 1$ باشد ، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اگر $r = 1$ باشد ، پس از این آزمون نمی توانیم در مورد همگرایی و یا واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه گیری کنیم.

اثبات

ابتدا فرض می کنیم $0 \leq r < 1$ باشد و فرض می کنیم s هر عددی باشد بطوری که $r < s < 1$ باشد. چون داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{و} \quad r < s$$

پس یک عدد صحیح مانند N وجود دارد بطوری که برای $n \geq N$ داریم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s$ و یا به عبارت دیگر $a_{n+1} \leq a_n s$ است.

اگر فرض کنیم $n = N$ باشد ، خواهیم داشت $a_{N+1} \leq a_N s$ و سپس اگر فرض کنیم $n = N + 1$ باشد ، خواهیم داشت

$$a_{N+2} \leq a_{N+1} s \leq (a_N s) s = a_N s^2$$

بطور کلی ، برای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$0 \leq a_{N+n} \leq a_{N+n-1} \leq a_{N+n-2} s \leq \dots \leq a_{N+1} s^{n-1} \leq a_N s^n \quad (1)$$

چون $0 < s < 1$ است ، سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} a_N s^n$ همگرا است. بر اساس شماره (۱) و آزمون مقایسه نتیجه می گیریم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}$ که همان سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا است. از همگرایی $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نتیجه می گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. این اثبات قسمت الف است. اثبات قسمت ب هم به همین طریق بدست می آید ، اما با $r > s > 1$ همراه با وارونه نامساوی هایی که در قسمت الف ثابت کردیم و واگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_N s^n$

برای نشان دادن درستی جمله آخر قضیه، به خاطر بیاورید که گفتیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است و

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، و محاسبه نسبت های مربوطه: سری زیر واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

و داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

سری زیر همگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

و داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

لذا، اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ باشد، تنها بوسیله آزمون نسبت، نمی توانیم همگرایی و واگرایی سری را مشخص کنیم.

مثال ۱ - نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

پاسخ

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

چون $r < 1$ است، پس سری داده شده همگرا است.

مثال ۲ - نشان دهید سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

پاسخ

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} * n^2}{(n+1)^2 * 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n * 2^1 * n^2}{(n+1)^2 * 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 2 \end{aligned}$$

چون $r > 1$ است، پس سری داده شده واگرا است.

مثال ۳ - نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

پاسخ

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} * \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\frac{n+1}{n} \right]^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

آخرین تساوی بر اساس مثال ۷ بخش ۱.۲ است. چون $r < 1$ است، پس سری داده شده همگرا است.

توجه: از مثال ۳ نتیجه گیری اشتباه نکنید. در مثال نشان ندادیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ بطرف $\frac{1}{e}$ همگرا است. فقط گفتیم نسبت دو جمله متوالی به طرف $\frac{1}{e}$ همگرا است.

قضیه آزمون ریشه Root Test Theorem

فرض می کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری نامنفی باشد. و فرض می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad (\infty \text{ احتمالا})$$

باشد.

الف - اگر $0 \leq r < 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب - اگر $r > 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اگر $r = 1$ باشد، پس از طریق آزمون ریشه به تنهایی نمی توان در مورد همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه گیری کرد.

اثبات -

فرض می کنیم $0 \leq r < 1$ باشد، و فرض می کنیم s هر عددی باشد بطوری که $r < s < 1$ باشد. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad \text{و} \quad r < s$$

است، پس یک عدد صحیح N وجود دارد بطوری که برای $n \geq N$ داریم $\sqrt[n]{a_n} \leq s$ است و

یا به عبارت دیگر $a_n \leq s^n$ است. چون $s < 1$ است، پس سری هندسی $\sum_{n=N}^{\infty} s^n$ همگرا است. پس بر اساس آزمون مقایسه $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا است و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هم همگرا است.

این اثبات قسمت الف. باری $r > 1$ هم به همین طریق استدلال می کنیم برای نشان دادن صحت

جمله آخر قضیه، بخاطر بیاورید وگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و محاسبه

ریشه های مربوطه با کمک مثال ۹ بخش ۱.۲

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{واگرا است}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{همگرا است}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

جلد سوم حسابان ۱.۶ سری های نا منفی - آزمون نسبت و آزمون ریشه انوشیروان صراف

پس اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ باشد، امکان ندارد در مورد همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با آزمون ریشه تصمیم گرفت.

مثال ۴ - نشان دهید سری زیر واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{1000} \right)^n$$

پاسخ

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\ln n}{1000} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1000} = \infty$$

پس سری داده شده واگرا است.

مثال ۵ - نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

پاسخ

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

پس بر اساس آزمون ریشه، سری داده شده، همگرا است.

تمرینات ۱.۶

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا.

- ۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$
- ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! * 3^n}{10^n}$
- ۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n$
- ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
- ۵) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{100} e^{-n}$
- ۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1.7}}{(1.7)^n}$
- ۷) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$
- ۸) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
- ۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n)}$

پاسخ تمرینات ۱.۶

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا.

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

پس سری داده شده واگرا است.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{10^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)! \cdot 3^{n+1}}{10^{n+1}}}{\frac{n! \cdot 3^n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)}{10} = \infty$$

پس سری داده شده واگرا است.

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1$$

پس سری داده شده همگرا است.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1$$

پس سری داده شده واگرا است.

$$۵) \sum_{n=0}^{\infty} n^{100} e^{-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{100} e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{100})^{1/n} e^{-1} = e^{-1} < 1$$

پس سری داده شده همگرا است.

$$۶) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1.7}}{(1.7)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1.7}}{(1.7)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1.7}}{(1.7)n^{1.7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1.7} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1.7} = \frac{1}{1.7} < 1$$

پس سری داده شده همگرا است.

$$۷) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = \infty$$

پس سری داده شده واگرا است.

$$۸) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

پس سری داده شده همگرا است.

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n)}$$

چون

$$\frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n)} = \frac{3}{2} * \frac{5}{4} \dots \frac{2n-1}{2n-2} * \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}$$

است، و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ واگرا است، بر اساس آزمون مقایسه، سری داده شده واگرا است.

۱.۷ – سری های متناوب و همگرایی مطلق

Alternating Series and Absolute Convergence

حال که در مورد همگرایی و واگرایی سری های نامنفی صحبت کرده ایم ، آماده هستیم در مورد سری هایی که شامل اعداد مثبت و منفی هستند بحث کنیم.

سری های متناوب – اگر جملات یک سری بطور متناوب مثبت و منفی باشند ، این سری را **سری متناوب** می نامیم. مثلاً سری های زیر ، سری های متناوب هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n = 3 - 9 + 27 - 81 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \dots$$

قضیه آزمون سری های متناوب Alternating Series Test Theorem

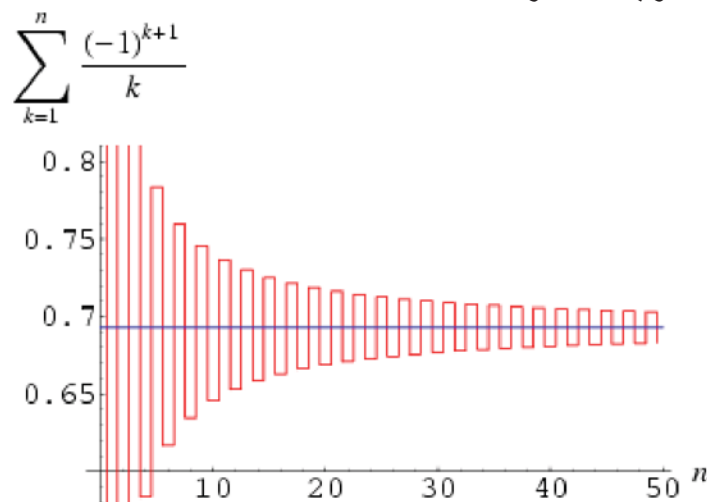
فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی اعداد مثبت باشد بطوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ باشد.

پس سری های متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگرا هستند. علاوه بر این در هر دو مورد ، مجموع s و دنباله مجموع جزئی $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ نامعادله زیر را برقرار می کنند.

$$|s - s_j| \leq a_{j+1} \quad (1)$$

اثبات

چون اثبات این قضیه طولانی است از اثبات آن فعلاً صرفنظر می کنیم اما با توجه به تصویر زیر ملاحظه می کنید که سری های متناوب ، همگرا هستند.



مثال ۱- نشان دهید سری هارمونیک متناوب **Alternating Harmonic Series** زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

پاسخ

داریم $a_n = \frac{1}{n}$ بطوری که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نا منفی نزولی است و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ است پس این سری هارمونیک متناوب، شرایط آزمون سری های متناوب را برقرار می کند و باید همگرا باشد.

مثال ۲- نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

پاسخ

چون $\left\{ \frac{1}{\ln n} \right\}_{n=2}^{\infty}$ یک دنباله نا منفی نزولی است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ است پس بر اساس آزمون سری های متناوب، این سری همگرا است.

مثال ۳- مقدار تقریب سری زیر با خطای کمتر از 0.001 محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$$

پاسخ

یک مجموعه جزئی s_j مقدار تقریبی حاصل جمع s این سری را با خطای کمتر از 0.001 بدست می دهد اگر $|s - s_j| < 0.001$ باشد. اگر مقدار j را طوری پیدا کنیم که $a_{j+1} < 0.001$ باشد، پس بر اساس شماره (۱) خواهیم داشت $|s - s_j| < 0.001$.

چون $a_{j+1} = \frac{1}{(j+1)^3}$ است، پس هدف ما این است که مقدار j را طوری پیدا کنیم که

$$\frac{1}{(j+1)^3} < 0.001$$

باشد. اگر $j = 10$ باشد، داریم.

$$\frac{1}{(j+1)^3} = \frac{1}{11^3} < 0.001$$

و لذا مقدار تقریبی مورد دلخواه ما مطابق زیر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{10^3} \approx 0.901116$$

قضیه همگرایی مطلق Absolute Convergence Theorem
اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

اثبات

ابتدا نشان می دهیم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تفاضل دو سری نا منفی است، که هر یک از آنها همگرا هستند. فرض می کنیم

$$p_n = \begin{cases} a_n & \text{اگر } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{اگر } a_n < 0 \end{cases}$$

باشد، بطوری که داشته باشیم $a_n = p_n - q_n$ بر اساس تعریف p_n و q_n داریم.

$$0 \leq p_n \leq |a_n| \quad \text{و} \quad 0 \leq q_n \leq |a_n|$$

برای تمام n ها.

بر اساس فرض قضیه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا است، پس آزمون مقایسه می گوید $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هر دو همگرا هستند. پس $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$ که همان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است، همگرا است. این اثبات قضیه است.

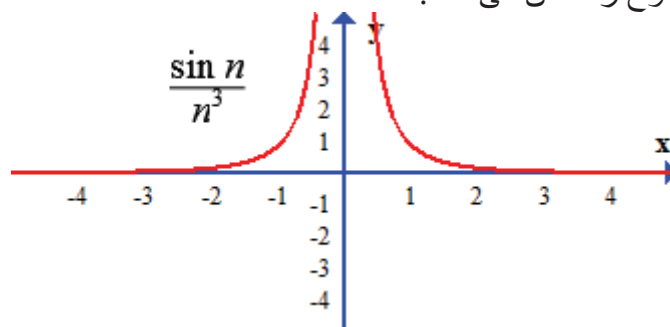
با استفاده از قضیه همگرایی مطلق، می توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است تنها اگر سری نا منفی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

مثال ۴ - نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$$

پاسخ

اگر چند مقدار از $\sin n$ را پیدا کنیم، ملاحظه می کنید که سری داده شده نه نا منفی است و نه متناوب. تصویر زیر هم این موضوع را نشان می دهد.



لذا هیچ کدام از آزمون های قبلی مستقیما کار برد ندارند. اما چون داریم

$$\left| \frac{\sin n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad \text{برای } n \geq 1$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگرا است زیرا یک p سری است با $p = 3$ ، پس بر اساس آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$ همگرا است و لذا بر اساس قضیه همگرایی مطلق، سری داده شده همگرا است.

احتیاط: اشتباه است اگر بگوییم چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است پس $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ هم همگرا است.

مثلا سری هارمونیک متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ همگرا است اما $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است. پس اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ممکن است همگرا باشد یا ممکن است همگرا نباشد.

تعریف ۱.۷

فرض می کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا باشد. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، می گوییم سری

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **مطلقا همگرا است. Converges Absolutely**

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد، می گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **بطور مشروط همگرا است.**

Converges Conditionally

بنا بر تعریف بالا، می گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ مطلقا همگرا است. در صورتی که

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$$

بطور مشروط همگرا است.

قضیه آزمون های همگرایی تعمیم یافته Generalized Convergence Tests Theorem
فرض می کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری باشد.

الف Generalized Comparison Test آزمون مقایسه تعمیم یافته
اگر $|a_n| \leq |b_n|$ باشد برای $n \geq 1$ و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ همگرا باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا است.

ب Generalized Limit Comparison Test آزمون مقایسه حد تعمیم یافته
اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$ باشد، L یک عدد مثبت، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ همگرا باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا است.

ج Generalized Ratio Test آزمون نسبت تعمیم یافته
فرض می کنیم $a_n \neq 0$ باشد، برای $n \geq 1$ و داشته باشیم
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \quad (\infty \text{ احتمالا})$$

اگر $r < 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا است. اگر $r > 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اگر $r = 1$ باشد، پس از این آزمون به تنهایی نمی توانیم در مورد همگرایی سری داده شده نتیجه گیری کنیم.

د Generalized Root Test آزمون ریشه تعمیم یافته
فرض می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \quad (\infty \text{ احتمالا})$$

باشد. اگر $r < 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا است. اگر $r > 1$ باشد، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است. اگر $r = 1$ باشد، پس از این آزمون به تنهایی نمی توانیم در مورد همگرایی سری داده شده نتیجه گیری کنیم.

اثبات

برای اثبات قضیه بالا کافی است از قضایای آزمون مقایسه، آزمون نسبت، آزمون ریشه و آزمون همگرایی مطلق استفاده کنیم.

مثال ۵ - نشان دهید سری زیر برای $|x| < 1$ مطلقاً همگرا است، برای $x = -1$ بطور مشروط همگرا است، و برای $x = 1$ و $|x| > 1$ واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

پاسخ

اگر $x = 0$ باشد، پس واضح است که سری، همگرا است.

اگر $x \neq 0$ باشد، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

پس بر اساس آزمون نسبت تعمیم یافته، سری داده شده برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. برای $x = 1$ سری داده شده تبدیل به سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ می شود که واگرا است.

برای $x = -1$ سری به سری زیر تبدیل می شود

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

این سری، منفی سری هارمونیک و متناوب است که در نهایت همگرا است. اما چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

است و می دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است، پس نتیجه می گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ بطور مشروط، همگرا است.

مثال ۶ - نشان دهید سری زیر برای $|x| < 1$ مطلقاً همگرا است، برای $|x| = 1$ بطور مشروط همگرا است، و برای $|x| > 1$ واگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

پاسخ

اگر $x = 0$ باشد، واضح است که سری داده شده همگرا است. اگر $x \neq 0$ باشد، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+1}{2n+3} x^2 \right| = |x|^2$$

در نتیجه بر اساس آزمون نسبت تعمیم یافته، سری داده شده برای $|x| < 1$ مطلقاً همگرا است، و برای $|x| > 1$ واگرا است.

برای $x = -1$ سری داده شده به سری زیر تبدیل می شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

و این سری آخر بر اساس آزمون سری ها متناوب، همگرا است. برای $x = 1$ سری به سری زیر تبدیل می شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

که بر اساس آزمون سری های متناوب، همگرا است. به اسانی می توان نشان داد سری زیر بر اساس آزمون مقایسه حد، واگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

لذا سری داده شده برای $|x| = 1$ بطور مشروط، همگرا است.

قضیه تبعی Corollary

فرض می کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله باشد، اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a^n} \right| = r < 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1$$

باشد، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

است.

مثال ۷ - نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ است برای تمام x ها.

پاسخ

اگر $x = 0$ باشد، واضح است که حد صفر است. اگر $x \neq 0$ باشد، فرض می کنیم

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

باشد، پس

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0$$

چون $r < 1$ است، بر اساس قضیه فرعی بالا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

تمرینات ۱.۷

مشخص کنید آیا سری های زیر همگرا هستند یا واگرا.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\delta n+1}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2 + 3n+5}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^p}{n}$ ، $p \in \mathbb{Z}, p > 0$

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{100^n}$

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$

در تمرینات زیر مشخص کنید کدام سری همگرا، کدام بطور مشروط همگرا، و کدام مطلقا همگرا است.

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}$

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$۱۱) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$۱۲) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$۱۳) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n+1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n+2)}$$

در تمرینات زیر با استفاده از قضیه تبعی این بخش ، درستی حد داده شده را نشان دهید.

$$۱۴) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 0$$

$$۱۵) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0 \quad , \quad |x| < 1$$

$$۱۶) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! x^n}{n^n} = 0 \quad , \quad |x| < e$$

پاسخ تمرینات ۱.۷

مشخص کنید آیا سری های زیر همگرا هستند یا واگرا.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

چون $\left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و نامنفی است با $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ پس این سری همگرا است.

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{5n+1}$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0$ پس سری واگرا است.

$$۳) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3n+5}$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+5}$ باشد. پس $f'(x) = \frac{-x^2-4x-1}{(x^2+3x+5)^2} < 0$ است برای $x > 0$

پس f در بازه $(1, \infty)$ نزولی است. پس $\left\{ \frac{n+2}{n^2+3n+5} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و نامنفی است. و

داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+3n+5} = 0$ لذا سری داده شده، همگرا است.

$$۴) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ باشد. چون $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ است برای $x > e$ پس تابع

f در بازه $[e, \infty)$ نزولی است. پس $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و نامنفی است. و

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ است. پس $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرا است. و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرا است.

$$۵) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^p}{n}, \quad p \in \mathbb{Z}, p > 0$$

فرض می کنیم $f(x) = \frac{(\ln x)^p}{x}$ باشد،

$$f'(x) = \frac{p(\ln x)^{p-1} - (\ln x)^p}{x^2} = \frac{(\ln x)^{p-1}(p - \ln x)}{x^2} < 0 \text{ برای } x > e^p$$

علاوه بر این، بر اساس قانون لا پیتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p!}{x} = 0$$

پس $\left\{ \frac{(\ln n)^p}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و نامنفی است با $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^p}{n} = 0$ لذا

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^p}{n}$ همگرا است و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^p}{n}$ همگرا است.

$$۶) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{100^n}$$

چون

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{100^{(n+1)}}}{\frac{n!}{100^n}} = \frac{n+1}{100} > 1 \quad \text{برای } n \geq 100$$

است. پس سری داده شده واگرا است.

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2n+1}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} = \infty$$

است. پس سری داده شده واگرا است.

در تمرینات زیر مشخص کنید کدام سری همگرا، کدام بطور مشروط همگرا، و کدام مطلقاً همگرا است.

$$۸) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+4}$$

چون $\left\{ \frac{1}{3n+4} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و نامنفی است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} = 0$ است پسهمگرا است. اما ملاحظه می کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+4}$ واگرا است، زیرا

$$\frac{1}{3n+4} \geq \frac{1}{2n} \quad \text{برای } n \geq 1$$

است و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ واگرا است. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+4}$ بطور مشروط همگرا است.

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

پس سری داده شده واگرا است.

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

است. پس سری داده شده واگرا است.

$$۱۱) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

چون

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\ln x} \right) \Big|_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

است، پس آزمون انتگرال می گوید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ همگرا است، پس

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

مطلقا همگرا است.

$$۱۲) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

پس $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$ مطلقا همگرا است.

$$\begin{aligned}
 (۱۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n+1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n+2)} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 * 3 * 5 \dots (2n+3)}{2 * 4 * 6 \dots (2n+4)}}{\frac{1 * 3 * 5 \dots (2n+1)}{2 * 4 * 6 \dots (2n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{2}
 \end{aligned}$$

پس ، سری داده شده مطلقاً همگرا است.

در تمرینات زیر با استفاده از قضیه تبعی این بخش ، درستی حد داده شده را نشان دهید.

$$(۱۴) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)^2}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)^2}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = 0$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 0$$

است.

$$(۱۵) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0 \quad , \quad |x| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{n}} = x^2$$

اگر $|x| < 1$ باشد ، $x^2 < 1$ است ، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0$ است. اگر $|x| = 1$ باشد ، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n}}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

است ، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0$ است.

$$۱۶) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! x^n}{n^n} = 0, \quad |x| < e$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{\frac{n! |x|^n}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{|x|}{e} \end{aligned}$$

پس اگر $|x| < e$ باشد،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! x^n}{n^n} = 0$$

است.

۱.۸ - سری های توانی Power Series

تعریف - Definition

یک سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را سری توانی می نامیم.

اگر $c_0 = 0$ باشد، سری توانی را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ می نویسیم و اگر همچنین داشته باشیم $c_1 = 0$ سری را به صورت $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ می نویسیم. بطور کلی اندیس اولیه یک سری توانی می تواند هر عدد نامنفی باشد. برای یکنواختی در نوشتن سری های توانی، همیشه فرض می کنیم $x^0 = 1$ است برای تمام x ها، از جمله برای $x = 0$ بطوری که

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

اگر $c_n = 0$ باشد برای تمام $n > N$ ها، پس سری توانی، یک چند جمله ای با درجه N است. مثلاً

$$2 - 3x + 4x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

در سری بالا داریم

$$c_0 = 2, \quad c_1 = -3, \quad c_2 = 4, \quad c_n = 0 \text{ برای } n \geq N = 3$$

برای این که مشخص کنیم آیا یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ همگرا و یا واگرا است، باید مشخص کنیم برای چه مقادیری از x سری داده شده همگرا است و برای کدام مقادیر از x سری داده شده واگرا است. توجه داشته باشید که هر سری توانی برای $x = 0$ همگرا است. پس هر سری توانی، یک تابع را تعریف می کند که دامنه آن مجموعه مقادیر x است که برای آن مقادیر، سری همگرا است.

مثال ۱- نشان دهید که سری زیر فقط برای $x = 0$ همگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \dots$$

پاسخ

اگر $x \neq 0$ باشد، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x| = \infty$$

آزمون نسبت تعمیم یافته می گوید این سری واگرا است.

مثال ۲ - نشان دهید سری زیر برای تمام مقادیر x ، همگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

پاسخ

اگر $x \neq 0$ باشد، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} x \right| = 0$$

پس بر اساس آزمون نسبت تعمیم یافته، این سری برای $x \neq 0$ همگرا است و در نتیجه برای تمام مقادیر x همگرا است.

بر خلاف دو مثال ۱ و ۲، سری های توانی هستند، که برای چند مقادیر غیر صفر همگرا هستند و برای بقیه مقادیر x واگرا هستند. یکی از مثال های مهم این نوع سری ها، سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ است، که برای هر مقدار از x که صفر نباشد، یک سری هندسی است با نسبت x . و بر اساس قضیه سری های هندسی می دانیم که این سری برای $|x| \geq 1$ واگرا است و برای $|x| < 1$ همگرا است، با

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (۱)$$

توجه داشته باشید که سری بالا برای تمام x ها در بازه باز اطراف صفر، همگرا است.

اصل موضوع Lemma

الف - اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ همگرا باشد، پس $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ مطلقا همگرا است برای $|x| < |s|$
 ب - اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگرا باشد، پس $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگرا است برای $|x| > |s|$

اثبات

برای اثبات قسمت الف، فرض می کنیم $|x| < |s|$ باشد، و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را به شکل زیر باز نویسی می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \left(\frac{x}{s}\right)^n$$

چون بر اساس فرض قضیه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ همگرا است، بر اساس قضیه آزمون واگرایی بخش ۱.۴ می دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n s^n = 0$ است. پس یک عدد صحیح مثبت N وجود دارد، بطوری که $|c_n s^n| \leq 1$ است برای تمام $n \geq N$ ها. یعنی

$$|c_n x^n| = |c_n s^n| \left| \frac{x}{s} \right|^n \leq \left| \frac{x}{s} \right|^n \quad \text{برای } n \geq N$$

چون $|x| < |s|$ است، یعنی $\left|\frac{x}{s}\right| < 1$ است، می دانیم سری هندسی $\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{x}{s}\right|^n$ مطلقاً همگرا است. بر اساس آزمون مقایسه تعمیم یافته $\sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n$ مطلقاً همگرا است، و در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ هم همگرا است. این اثبات قسمت الف. برای قسمت ب، فرض می کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگرا باشد، و فقط لازم است که توجه کنیم که اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ قرار است همگرا باشد، پس اگر نقش s و x در قسمت الف وارون کنیم، متوجه می شویم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$ باید همگرا باشد، این خلاف فرض قضیه است. لذا $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگرا است.

قضیه اساسی سری های توانی Fundamental Theorem of Power Series

فرض می کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک سری توانی باشد. پس فقط یکی از شرایط زیر برقرار است.

الف - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ فقط برای $x = 0$ همگرا است.

ب - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برای تمام x ها همگرا است.

ج - یک عدد مانند $R > 0$ وجود دارد، بطوری که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برای $|x| < R$ همگرا است و برای $|x| > R$ واگرا است.

عدد R را شعاع همگرایی Radius of Convergence سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ می نامند.

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ شرط الف قضیه بالا را برقرار کند، پس فرض می کنیم $R = 0$ است. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ شرط ب را برقرار کند، پس فرض می کنیم $R = \infty$ است.

پس هر سری توانی یک شعاع همگرایی R دارد، که یا یک عدد نامنفی است و یا ∞ است. مجموعه

مقادیر x که برای آنها $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ همگرا است، بازه همگرایی Interval of Convergence سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ نامیده می شود. بازه همگرایی یکی از اشکال زیر است.

$$[0,0], (-R,R), [-R,R), (-R,R], [-R,R], (-\infty,\infty)$$

جدول زیر برای بازه های بالا مثالی می آورد.

بازه	مثال
$[0,0]$	$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$
$(-1,1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$[-1,1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
$(-1,1]$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$
$[-1,1]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$
$(-\infty,\infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

شعاع همگرایی لازم نیست ∞ یا 1 ، 0 باشد. مثلاً، سری هندسی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

برای تمام x ها در بازه $(-2, 2)$ همگرا است، پس $R = 2$ است. در حقیقت هر عدد مثبت R می تواند شعاع همگرایی باشد.

مثال ۳ - بازه همگرایی سری توانی زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{1/2}}$$

پاسخ

برای $x = -1$ سری تبدیل می شود به $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$ که بر اساس آزمون سری های متناوب، همگرا است. برای $x = 1$ سری تبدیل می شود به $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ که یک p سری است با $p = \frac{1}{2}$ که واگرا است. چون سری اصلی برای $x = -1$ همگرا است و برای $x = 1$ واگرا است، قضیه اساسی سری های توانی ما را مطمئن می سازد که تنها مقدار ممکن برای شعاع همگرایی $R = 1$ است، و در نتیجه بازه همگرایی $(-1, 1)$ است.

در بیشتر مورد پیدا کردن بازه همگرایی به اسانی مثال ۳ ممکن نیست. معمولاً برای پیدا کردن بازه همگرایی، از آزمون نسبت تعمیم یافته و یا آزمون ریشه تعمیم یافته استفاده می کنیم تا شعاع همگرایی را بطور دقیق پیدا کنیم و سپس دو نقطه انتهایی $x = R$ و $x = -R$ را جداگانه امتحان می کنیم.

مثال ۴ - بازه همگرایی سری توانی زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

پاسخ

برای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} x \right| = |x|$$

پس بر اساس آزمون نسبت تعمیم یافته می دانیم که سری داده شده برای $|x| < 1$ همگرا است، و برای $|x| > 1$ واگرا است. بر اساس قضیه اساسی سری های توانی، شعاع همگرایی $R = 1$ است. حال باید دو مقدار 1 و -1 را جداگانه امتحان کنیم. برای این دو مقادیر سری های $\sum_{n=1}^{\infty} n$ و

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ بدست می آوریم که هر دو واگرا هستند ، زیرا جمله های این دو سری به طرف صفر همگرا نیستند. لذا بازه همگرایی $(-1, 1)$ است.

مشتق گیری از سری های توانی Differentiation of Power Series

چون $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک تابع است ، ممکن است سوال کنیم آیا مشتق آن وجود دارد ؟ با کامل تعجب ، یک سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر ، همیشه مشتق پذیر است. علاوه بر این ، مشتق $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ از طریق مشتق گرفتن جمله به جمله بدست می آید. به همان طریق که از چند جمله ای ها مشتق می گیریم.

قضیه مشتق گیری برای سری های توانی Differentiation theorem for Power Series

فرض می کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد. پس $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ همان شعاع همگرایی دارد ، و

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (c_n x^n) \quad \text{برای } |x| < R$$

اثبات این قضیه پیچیده است ، لذا از ذکر آن صرف نظر می کنیم.

مثال ۵ – نشان دهید که

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (۲)$$

پاسخ

بر اساس مثال ۲ می دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگرا است برای تمام مقادیر x . قضیه مشتق گیری برای

سری های توانی می گوید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$ هم همگرا است و داریم

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

اگر یک تابع f را مطابق زیر تعریف کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

پس بر اساس شماره (۲) می توان نوشت

$$f'(x) = f(x) \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

چون $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ است ، می توان نتیجه گرفت

$$f(x) = e^x \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

لذا

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3)$$

پس یک فرمول برای e^x بر حسب یک سری توانی پیدا کردیم. تابع های زیر هم می توان بدست آورد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &= e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ e^{(x^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \end{aligned}$$

احتیاط - گر چه قضیه مشتق گیری برای سری های توانی می گوید شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ یکی است اما نمی گوید بازه های همگرایی این دو سری یکی است. بر عکس بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ بازه $(-1, 1)$ است، در صورتی که بازه همگرایی مشتق آن $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ بازه $(-1, 1)$ است.

قضیه مشتق های مرتبه بالا برای سری های توانی

Higher Derivatives for Power Series Theorem

فرض می کنیم یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ دارای شعاع همگرایی $R > 0$ باشد. فرض می کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{برای} \quad -R < x < R \quad (4)$$

باشد. پس f دارای مشتق تمام مرتبه ها در $(-R, R)$ است، و

$$f^{(n)}(0) = n! c_n \quad \text{برای} \quad n \geq 0 \quad (5)$$

است. در نتیجه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{برای} \quad -R < x < R$$

اثبات

قضیه مشتق گیری برای سری های توانی می گوید یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ با شعاع همگرایی نا منفی را می توان مشتق گرفت. اما چون مشتق، خودش یک سری توانی است با همان شعاع همگرایی، پس از مشتق هم می توان مشتق گرفت. به همین ترتیب پس یک سری توانی دارای مشتق های مرتبه بالا است. و لذا f دارای مشتق های مرتبه بالا است در بازه $(-R, R)$. اگر در فرمول شماره (۴) بجای x بگذاریم صفر، پس داریم

$$f^{(0)}(0) = f(0) = c_0 = 0! c_0$$

سپس با استفاده از قضیه مشتق گیری، از دو طرف فرمول (۴) مشتق می گیریم.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (7)$$

باز با بکار بردن $x = 0$ داریم.

$$f'(0) = c_1 = 1! c_1$$

با مشتق گرفتن از دو طرف فرمول (۷) داریم.

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

باز با بکار بردن $x = 0$ داریم.

$$f''(0) = 2(1) c_2 = 2! c_2$$

به همین طریق با n مرتبه مشتق گرفتن از فرمول (۴) و سپس جانشین کردن $x = 0$ در فرمول بدست آمده، فرمول (۵) بدست می آید. در نهایت فرمول (۶) بدست می آید.

قضیه تبعی Corollary

فرض می کنیم $R > 0$ باشد و فرض می کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ سری های توانی باشند که برای $-R < x < R$ همگرا باشند. اگر داشته باشیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{برای } -R < x < R$$

پس $a_n = b_n$ است برای هر $n \geq 0$.

اثبات

فرض می کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{برای } -R < x < R$$

باشد. پس بر اساس قضیه مشتق های مرتبه بالا برای سری های توانی، داریم

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

قضیه تبعی بالا می گوید دو چند جمله ای

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

و

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

که البته سری های توانی هستند ، تمام ضریب های آنها ، بجز معدودی ، صفر باشد ، یک تابع هستند اگر فقط و فقط داشته باشیم

$$m = n \text{ و } b_j = a_j \text{ برای } 1 \leq j \leq n$$

انتگرال گیری سری های توانی Integration of Power Series

فرض می کنیم $R > 0$ و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برای $-R < x < R$ همگرا باشد. پس می دانیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در $(-R, R)$ مشتق پذیر و لذا پیوسته است. پس امکان پذیر است از تابع $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در هر بازه بسته در بازه $(-R, R)$ انتگرال بگیریم. قضیه بعد می گوید همان طور که جمله به جمله مشتق می گیریم ، از این تابع هم می توان جمله به جمله انتگرال بگیریم.

قضیه انتگرال گیری برای سری های توانی Integration Theorem for Power Series

فرض می کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک سری توانی باشعاع همگرایی $R > 0$ باشد. پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \right)$$

همان شعاع همگرایی دارد ، و

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x c_n t^n dt \right) \text{ برای } |x| < R$$

از اثبات قضیه بالا هم بخاطر پیچیدگی فعلا صرف نظر می کنیم.

مثال ۶ - نشان دهید که

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ برای } |x| < 1 \quad (۸)$$

است.

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۱) می دانیم که

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ برای } |x| < 1$$

است. بجای x در تساوی بالا می گذاریم $-t$ پس داریم

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \quad \text{برای } |t| < 1 \quad (9)$$

با استفاده از فرمول (۹) و قضیه انتگرال گیری بالا، داریم.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{برای } |x| < 1 \end{aligned}$$

نتیجه مثال ۶ را می توان به صورت زیر بسط داد.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

بسط سری توانی بالا برای $\ln(1+x)$ برای $-1 < x \leq 1$ بنام سری مرکاتور **Mercator's Series** معروف است.

مثال ۷ - نشان دهید که

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{برای } |x| < 1 \quad (10)$$

است.

پاسخ

اگر $|t| < 1$ باشد، پس $|t^2| < 1$ است. پس می توانیم در فرمول شماره (۹) بجای t بگذاریم t^2 . پس خواهیم داشت

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad \text{برای } |t| < 1$$

پس قضیه انتگرال سری ها می گوید

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{برای } |x| < 1 \end{aligned}$$

شکل بسط داده شده سری توانی برای $\arctan x$ می شود.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

سری بالا بنام سری گر گوری **Gregory's Series** معروف است.

گر چه اثبات آن مشکل است، اما سری گر گوری برای $\arctan x$ همچنین برای $x = 1$ هم صادق است. این مقدار $x = 1$ عبارت زیر را برای $\frac{\pi}{4}$ بدست می دهد.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

همچنین می توان نوشت

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (11)$$

تمرینات ۱.۸

در تمرینات زیر بازه همگرایی سری داده شده را پیدا کنید.

- ۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
- ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n} x^n$
- ۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n}$
- ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{n+1}$
- ۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} x^n$
- ۶) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$
- ۷) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) x^n$
- ۸) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} x^n$
- ۹) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n^2)}$

در تمرینات زیر شعاع همگرایی سری داده شده را پیدا کنید.

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 * 3^2 * 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 * 4^2 * 6^2 \dots (2n)^2} x^{2n}$$

$$۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)}{2^n [1 * 4 * 7 \dots (3n-2)]} x^n$$

در تمرینات زیر فرض کنید $f(x)$ مجموع سری باشد. مطلوب است $f'(x)$ و $\int_0^x f(t) dt$

$$۱۳) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} x^{(n^2)}$$

پاسخ تمرینات ۱.۸

در تمرینات زیر بازه همگرایی سری داده شده را پیدا کنید.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^2} = |x|$$

سری برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است.

لذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرا است، بازه همگرایی $[-1, 1]$ است.

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} 3^n} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n} 3^n} |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{3 (\sqrt[n]{n})^{1/2}} = \frac{|x|}{3}$$

سری برای $|x| < 3$ همگرا است و برای $|x| > 3$ واگرا است. چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا است و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ همگرا است، بازه همگرایی $[-3, 3]$ است.

$$۳) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{n+2}}{\frac{|x|^{2n}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} x^2 = x^2$$

سری برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. چون $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ همگرا است، پس بازه همگرایی $[-1, 1]$ است.

$$۴) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+2}}{2n+1}}{\frac{|x|^{n+1}}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x| = |x|$$

سری برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. سری متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

همگرا است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{2n-1}$$

واگرا است، پس بازه همگرایی $[-1, 1]$ است.

$$۵) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0$$

بازه همگرایی $(-\infty, \infty)$ است.

$$۶) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n! |x|^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} |x| = 0$$

بازه همگرایی $(-\infty, \infty)$ است.

$$۷) \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) x^n$$

بر اساس قانون لا پیتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}$$

پس داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} \ln(n+1)}{|x|^n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = |x|$$

پس سری برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. چون $\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$ و $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln n$ هر دو واگرا هستند، پس بازه همگرایی $(-1, 1)$ است.

$$۸) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} x^n$$

بر اساس قانون لا پیتال $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$ است، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1} \ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{|x|^n \ln n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = |x|$$

سری برای $|x| < 1$ همگرا است و برای $|x| > 1$ واگرا است. بر اساس تمرین شماره ۱۲ بخش ۱.۵، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ همگرا است و لذا $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ همگرا است. بازه همگرایی $[-1, 1]$ است.

$$۹) \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n^2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{(n+1)^2}}{|x|^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{2n+1}$$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{2n+1} = 0$ است اگر $|x| < 1$ باشد.

و $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{2n+1} = \infty$ است اگر $|x| > 1$ باشد.

لذا سری همگرا است برای $|x| < 1$ و واگرا است برای $|x| > 1$.

چون $\sum_{n=0}^{\infty} 1^{(n^2)}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n^2)}$ هر دو واگرا هستند، بازه همگرایی $(-1, 1)$ است.

در تمرینات زیر شعاع همگرایی سری داده شده را پیدا کنید.

$$۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{|x|^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} |x| = \frac{|x|}{e}$$

پس $R = e$ است.

$$۱۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 * 3^2 * 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 * 4^2 * 6^2 \dots (2n)^2} x^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1^2 * 3^2 * 5^2 \dots (2n+1)^2 |x|^{2n+2}}{2^2 * 4^2 * 6^2 \dots (2n)^2 (2n+2)^2}}{\frac{1^2 * 3^2 * 5^2 \dots (2n-1)^2 |x|^{2n}}{2^2 * 4^2 * 6^2 \dots (2n)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} x^2 = x^2$$

پس $R = 1$ است.

$$\begin{aligned}
 ۱۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)}{2^n [1 * 4 * 7 \dots (3n-2)]} x^n \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)(2n+1)|x|^{n+1}}{2^{n+1} [1 * 4 * 7 \dots (3n-2)(3n+1)]}}{\frac{1 * 3 * 5 \dots (2n-1)|x|^n}{2^n [1 * 4 * 7 \dots (3n-2)]}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(3n+1)} [x] = \frac{|x|}{3}
 \end{aligned}$$

پس $R = 3$ است.

در تمرینات زیر فرض کنید $f(x)$ مجموع سری باشد. مطلوب است $f'(x)$ و $\int_0^x f(t)dt$

$$\begin{aligned}
 ۱۳) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \\
 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n, \quad x \in (-1, 1) \\
 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1) \\
 \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۴) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} x^{(n^2)} \\
 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} x^{(n^2)}, \quad x \in [-1, 1) \\
 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 5n x^{n^2-1}, \quad x \in (-1, 1) \\
 \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n^2+1)} x^{n^2+1}, \quad x \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

۱.۹- سری تیلور Taylor Series

در بخش قبل نشان دادیم

$$(۱) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

$$(۲) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{برای } -1 < x < 1$$

$$(۳) \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{برای } -1 < x < 1$$

در هر یک از حالت های بالا می گوئیم یک نمایش سری توانی برای تابع داده شده ، داریم. بطور کلی اگر f یک تابع باشد ، و اگر I یک بازه باز که شامل صفر است باشد ، و اگر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{برای } x \in I$$

باشد ، می گوئیم یک نمایش سری توانی f در I داریم.

A Power Series Representation of f on I

فایده داشتن یک نمایش سری توانی f در I این است که مقدار f در هر نقطه I عبارت است از مجموع یک سری همگرا ، و لذا می توان مقدار تقریبی آن را بوسیله مجموعه جزئی آن پیدا کرد. چون مجموعه جزئی یک سری توانی ، چند جمله ای است ، پس مقادیر تابع هایی که نمایش سری های توانی دارند ، به آسانی بطور تقریب محاسبه می شوند. در این بخش تابع هایی که نمایش سری های توانی دارند مورد مطالعه قرار می دهیم.

برای یک تابع f می خواهیم مشخص کنیم آیا یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و یک بازه باز I که شامل صفر باشد ، وجود دارد بطوری که داشته باشیم

$$(۴) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad x \in I$$

می توانیم بسیاری از تابع ها مانند $|x|$ را حذف کنیم ، زیرا قضیه مشتق های بالا برای سری های توانی می گوید اگر f یک نمایش سری توانی داشته باشد ، پس f باید مشتق تمام مرتبه ها را داشته باشد.

علاوه بر این ، فرمول شماره (۵) در قضیه مشتق های مرتبه بالا برای سری های توانی می گوید اگر

f یک نمایش مانند شماره (۴) بالا داشته باشد ، پس $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ است. پس یک تابع می تواند

فقط یک نمایش سری توانی داشته باشد ، و (۴) می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$(۵) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \quad x \in I$$

تعریف Definition

فرض می‌کنیم f دارای مشتق‌های تمام مرتبه‌ها را در ۰ داشته باشد. پس سری تیلور f سری توانی زیر است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

از مطالب گفته شده بالا، می‌دانیم که هر گاه نمایش سری توانی یک تابع را پیدا کردیم، آن سری توانی باید سری تیلور برای آن تابع باشد. پس واضح است که سری‌هایی که در شماره‌های (۱)، (۲)، (۳) ذکر کردیم، همگی سری‌های تیلور ابع‌های مربوطه هستند. علاوه بر این، اگر f یک چند جمله‌ای باشد، مثلاً

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

باشد، پس f یک سری توانی است، و لذا f سری تیلور خودش است. برای یک تابع که الزاماً یک چند جمله‌ای نیست، یک چند جمله‌ای n ام تیلور و یک باقی‌مانده n ام تیلور برای f بکار می‌بریم یعنی

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

و

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

توجه $f^{(3)}$ به معنی f به توان ۳ نیست. بلکه به معنی مشتق مرتبه سوم f است. برای یادآوری. به بخش ۹.۱ قضیه تیلور مراجعه کنید.

پس چند جمله‌ای‌های تیلور f عبارتند از مجموعه جزئی سری تیلور f و این که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{اگر فقط و فقط} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad (۶)$$

پس برای نشان دادن این که برای یک مقدار داده شده x ، سری تیلور f به طرف $f(x)$ همگرا است باید نشان دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است. برای این کار معمولاً فرمول باقیمانده لاگرانژ که در بخش ۹.۱ گفتیم، بکار می‌بریم. یعنی

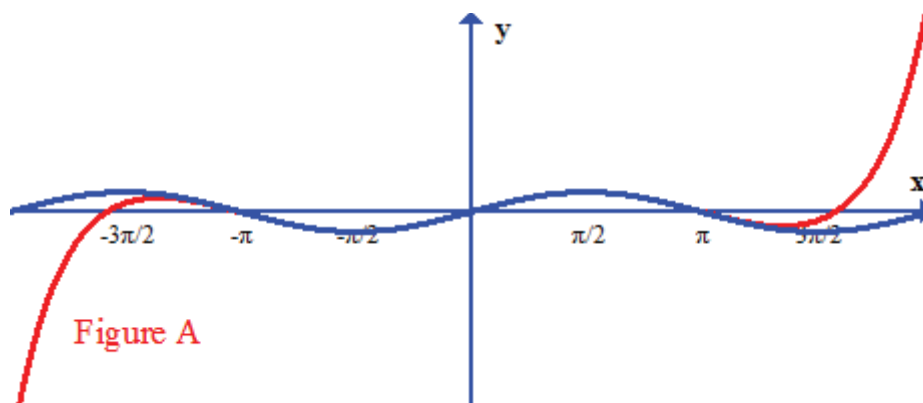
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (۷)$$

در فرمول شماره (۷) بالا t_x بین صفر و x است.

مثال ۱ - نشان دهید

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

است.
پاسخ



ابتدا به تصویر A توجه کنید. نمودار قرمز رنگ نمودار

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

است. نمودار آبی رنگ نمودار $f(x) = \sin x$ است. ملاحظه می کنید هر دو نمودار در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کاملاً روی هم منطبق هستند. با وجود این که فقط چهار جمله از چند جمله ای بکار بردیم. حالا پاسخ تمرین.

فرض می کنیم $f(x) = \sin x$ باشد. مشتق های f در گروه های چهار گانه تکرار می شوند.
 $f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x$
 $f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = -\sin x, \quad f^{(7)}(x) = -\cos x$
 به همین ترتیب هر چهار مشتق تکرار می شود. پس مشتق های مرتبه زوج شامل $\sin x$ هستند و مشتق های مرتبه فرد شامل $\cos x$ هستند. اگر دقیق تر بگوییم، برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم.

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \quad \text{و} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \quad (۸)$$

لذا

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{و} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

چون $f^{(2k)}(0) = 0$ است، پس تمام ضرایب های x های با توان زوج در سری تیلور برای $\sin x$ صفر هستند. پس از توان های زوج صرف نظر می کنیم و سری تیلور برای $\sin x$ به صورت زیر می نویسیم.

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

برای این که نشان دهیم سری تیلور برای هر x به طرف $\sin x$ همگرا است، نشان می دهیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

از فرمول (۸) بدون در نظر گرفتن عدد صحیح n یا اعداد x و t_k ، نتیجه می گیریم که

$$|f^{(n+1)}(t_k)| \leq 1$$

است. پس بر اساس (۷) داریم.

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t_k)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (9)$$

بر اساس مثال ۷ بخش ۱.۷ نتیجه می شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$$

لذا $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است برای تمام x ها. در نتیجه (۶) می گوید سری تیلور برای تابع سینوس به طرف $\sin x$ همگرا است برای تمام x ها.

از شماره (۹) نتیجه می گیریم که

$$|r_n(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

است برای تمام x ها در $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. اگر $n = 10$ در نظر بگیریم، متوجه می شویم که

$$|r_{10}(x)| \leq 0.0000004$$

است برای تمام x ها در $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. پس برای پیدا کردن مقادیر x در $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ با دقت پنج رقم اعشاری، کافی است مقادیر دهمین چند جمله ای تیلور را حساب کنیم، یعنی

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

به همین طریق می توان نشان داد که

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

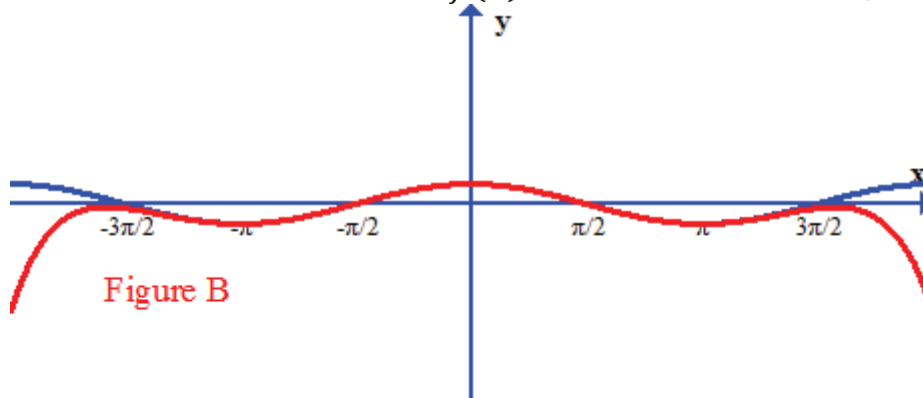
خطای تقریبی شماره (۹) برای کسینوس هم معتبر است. لذا می توان جدول مقادیر $\cos x$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ با دقت پنج رقم اعشاری با استفاده از دهمین چند جمله ای تیلور برای $\cos x$ تهیه کرد.

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

در تصویر B نمودار قرمز رنگ، نمودار

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

است، و نمودار آبی رنگ، نمودار $f(x) = \cos x$ است.

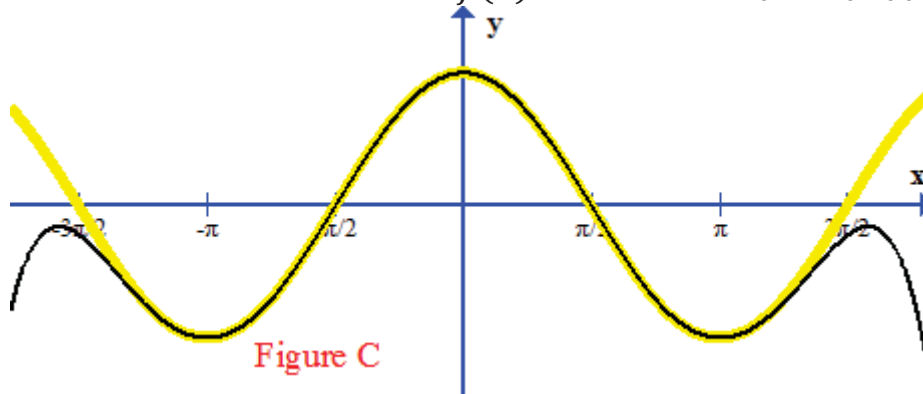


در تصویر B هم ملاحظه می کنید هر دو نمودار در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کاملاً روی هم منطبق هستند.

در تصویر C نمودار سیاه رنگ مربوط به

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

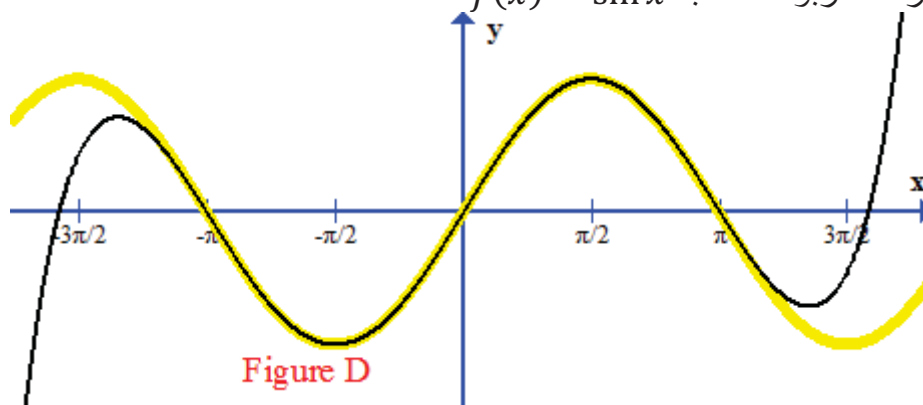
است و نمودار زرد رنگ مربوط به $f(x) = \cos x$ است.



در تصویر D نمودار سیاه رنگ مربوط است به

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

و نمودار زرد رنگ مربوط است به $f(x) = \sin x$



احتیاط - تصور نکنید سری تیلور برای تمام تابع ها که دارای بی‌نهایت مشتق در 0 هستند ، پس در بازه بازی که شامل صفر است ، به طرف تابع همگرا است. مثال خلاف تصور ، مثال زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} , & x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

بر اساس تعریف f در بالا ، $f(0) = 0$ و با استفاده از قانون لا پیتال $f'(0) = 0$ است.

به مثال ۵ بخش ۲.۱۳ کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم مراجعه کنید.

با کوشش زیاد می توان نشان داد که f دارای مشتق تمام مرتبه ها در صفر است و

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{برای تمام } x$$

در نتیجه سری تیلور برای f صفر است ، این یعنی سری تیلور f برای $x \neq 0$ به طرف $f(x)$ همگرا نیست.

سری تیلور در یک عدد اختیاری Taylor Series about an Arbitrary Point

اگر یک تابع f قرار است یک سری تیلور

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (۱۰)$$

داشته باشد ، پس f باید مشتق هایی در صفر و در نتیجه در یک بازه باز در همسایگی صفر داشته باشد.

چون $\ln x$ در یک بازه باز اطراف صفر تعریف شده نیست ، پس $\ln x$ یک سری تیلور به شکل

شماره (۱۰) برای $f(x) = \ln x$ ندارد. اما در شماره (۲) یک سری تیلور برای $\ln(1+x)$ ارائه شد.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} , \quad -1 < x < 1 \quad (۱۱)$$

حال اگر $0 < x < 2$ باشد ، پس $-1 < x-1 < 1$ است ، پس بر اساس (۱۱) داریم.

$$\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \quad 0 < x < 2 \quad (12)$$

سری شماره (۱۲) هم یک سری توانی است، اما بجای x داریم $x-1$ ، و مرکز بازه همگرایی آن بجای صفر، یک است.

بطور کلی، مایل هستیم بدانیم آیا امکان دارد یک تابع را به صورت سری توانی زیر بنویسیم؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (13)$$

در سری شماره (۱۳) عدد a می تواند هر عدد ثابتی باشد. تمام نتایجی که برای سری های توانی معمولی بدست آوردیم، برای سری های نوع شماره (۱۳) هم صادق است. بطور کلی اگر f تمام مشتق های مرتبه بالا در a داشته باشد، پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (14)$$

را سری تیلور f در عدد a می نامند. **Taylor Series of f about the Number a .** چند جمله ای n ام تیلور برای f مطابق زیر تعریف می شود.

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

و باقیمانده n ام تیلور مربوط به f در a مطابق زیر تعریف می شود.

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

در بخش ۱.۱ قضیه تیلور در صفر آوردیم. اینک همان قضیه در یک عدد اختیاری a می آوریم.

قضیه تیلور در یک عدد اختیاری Taylor Theorem about an Arbitrary Number

فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح نامنفی باشد، و فرض می‌کنیم $f^{(n+1)}(x)$ وجود داشته باشد برای هر x در یک بازه باز I که شامل a است. برای هر $x \neq a$ در I ، یک عدد دقیقاً بین a و x وجود دارد، بطوری‌که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (15)$$

و

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (16)$$

تساوی (۱۵) فرمول تیلور Taylor Formula نامیده می‌شود و (۱۶) فرمول باقیمانده لاگرانژ Lagrange Remainder Formula می‌نامند.

اثبات

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ دارای نمایش سری توانی در a باشد. یعنی بتوانیم تابع را به صورت زیر بنویسیم.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n \quad (17)$$

باز فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق‌های مرتبه بالا باشد. اگر تابع $f(x)$ دو فرض گفته شده بالا را نداشته باشد، پس نمی‌توانیم آن تابع را به صورت سری تیلور بنویسیم. حالا اگر تابع ما دو فرض بالا را شامل باشد، لازم است مشخص کنیم c_n کدام هستند. ابتدا مقدار تساوی شماره (۱۷) را برای $x = a$ محاسبه می‌کنیم. پس داریم.

$$f(a) = c_0$$

زیرا تمام جمله‌ها در فرمول (۱۷) صفر هستند، بجز جمله اول یعنی c_0

حالا از طرفین فرمول (۱) مشتق می‌گیریم، پس داریم.

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \quad (18)$$

حالا $x = a$ در شماره (۱۸) قرار می‌دهیم. تمام جمله‌ها بجز جمله اول صفر هستند، پس داریم.

$$f'(a) = c_1$$

این ایده را ادامه می‌دهیم و مشتق مرتبه دوم می‌گیریم، یعنی از دو طرف شماره (۱۸) مشتق می‌گیریم.

$$f''(x) = 2c_2 + 3(2)c_3(x-a) + 4(3)c_4(x-a)^2 + \dots \quad (19)$$

باز $x = a$ را جانشین می‌کنیم، تمام جمله‌ها بجز جمله اول صفر هستند. پس داریم.

$$f''(a) = 2c_2 \quad \text{یا} \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

مشتق مرتبه سوم می‌گیریم. پس شماره (۱۹) می‌شود.

$$f'''(x) = 3(2)c_3 + 4(3)(2)c_4(x-a) + \dots \quad (20)$$

باز $x = a$ را در شماره (۲۰) می گذاریم. پس داریم.

$$f'''(a) = 3(2)c_3 \quad \text{یا} \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3(2)} = \frac{f'''(a)}{3!}$$

مشتق مرتبه چهارم می گیریم. پس شماره (۲۰) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$f^{(4)}(x) = 4(3)(2)c_4 + 5(4)(3)(2)c_5(x-a) \dots \quad (21)$$

باز $x = a$ را در شماره (۲۱) می گذاریم. شماره (۲۱) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$f^{(4)}(a) = 4(3)(2)c_4 \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4(3)(2)} = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}$$

بطور کلی داریم.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

پس

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

سری تیلور به طرق مختلف اثبات شده است، که اکثراً پیچیده و درک آنها کمی مشکل است. این یکی از همه ساده تر است.

مثال ۲ - چند جمله ای زیر را به صورت چند جمله ای بر حسب $(x-2)$ بنویسید.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 1$$

پاسخ

می خواهیم $f(x)$ را به صورت شماره (۱۴) بنویسیم با $a = 2$ ، و برای این کار باید مشتق های f در ۲ حساب کنیم.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \quad f(2) = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 11 \quad f'(2) = -1$$

$$f''(x) = 12x - 18 \quad f''(2) = 6$$

$$f^{(3)}(x) = 12 \quad f^{(3)}(2) = 12$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad f^{(n)}(2) = 0 \quad \text{برای } n \geq 4$$

پس

$$f(x) = 1 + (-1)(x-2) + \frac{6}{2!}(x-2)^2 + \frac{12}{3!}(x-2)^3$$

$$= 1 - (x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

مثال ۳ - یک سری تیلور برای $\sin x$ در $\frac{\pi}{6}$ پیدا کنید و نشان دهید که آن سری برای تمام x ها به طرف $\sin x$ همگرا است.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = \sin x$ باشد. می خواهیم $f(x)$ را به صورت شماره (۱۴) بنویسیم با $a = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\sin x & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{1}{2} \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

چون $f^{(4)}(x) = f(x)$ است، پس نتیجه می گیریم که

$$|f^{(n+1)}(t_x)| \leq 1 \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

با این اطلاعات می توانیم شماره (۱۶) را بکار ببریم، پس داریم

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \right| \leq \left| \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \quad (22)$$

با کمی تغییر نتیجه مثال ۷ بخش ۱.۷ نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n}{n!} = 0$$

یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

در نتیجه سری تیلور برای f به طرف f همگرا است. علاوه بر این

$$f^{(r_n)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad f^{(r_n+1)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(r_n+2)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad f^{(r_n+3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} * \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots$$

مثال ۴- با استفاده از نتیجه مثال ۳ مقدار تقریب $\sin \frac{\sqrt{3}\pi}{36}$ را با خطای کمتر از 3×10^{-6} بدست آورید.

پاسخ

با استفاده از ماشین حساب

$$\left| r_n \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{36} \right) \right| \leq 3 \times 10^{-6}$$

است برای $n \geq 3$.

$$p_3 \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{36} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{36} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{36} \right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{\pi}{36} \right)^3 \approx 0.573575$$

تمرینات ۱.۹

در تمرینات زیر ، سومین چند جمله ای تیلور تابع داده شده در a پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x) = x^4 - x + 2; a = -1$$

$$۲) \quad f(x) = \sqrt{x}; a = 4$$

$$۳) \quad g(x) = \cos x; a = \frac{\pi}{4}$$

$$۴) \quad k(x) = \csc x; a = \frac{\pi}{4}$$

در تمرینات زیر یک سری تیلور برای f در a پیدا کنید. در هر مورد ، نشان دهید ، سری تیلوری که پیدا کرده اید به طرف f همگرا است. برای این کار نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است ، برای تمام x ها.

$$۵) \quad f(x) = 4x^2 - 2x + 1; a = 0, -3$$

$$۶) \quad f(x) = \cos x; a = 0$$

$$۷) \quad f(x) = \sin x; a = \frac{\pi}{3}$$

$$۸) \quad f(x) = e^x; a = -2$$

در تمرینات زیر یک سری تیلور برای تابع داده شده در a پیدا کنید.

$$۹) \quad f(x) = \cos x^2; a = 0$$

$$۱۰) \quad f(x) = \ln(1 - 2x); a = 0$$

پاسخ تمرینات ۱.۹

در تمرینات زیر ، سومین چند جمله ای تیلور تابع داده شده در a پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x) = x^4 - x + 2; a = -1$$

$$f(x) = x^4 - x + 2, \quad f(-1) = 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 1, \quad f'(-1) = -5$$

$$f''(x) = 12x^2, \quad f''(-1) = 12$$

$$f^{(3)}(x) = 24x, \quad f^{(3)}(-1) = -24$$

$$p_3(x) = 4 - 5(x+1) + \frac{12}{2!}(x+1)^2 - \frac{24}{3!}(x+1)^3$$

$$= 4 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3$$

$$۲) \quad f(x) = \sqrt{x}; a = ۴$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f(۴) = ۲$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(۴) = \frac{1}{۴}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{۴x^{3/2}} \quad , \quad f''(۴) = -\frac{1}{۳۲}$$

$$f^{(۳)}(x) = \frac{3}{۸x^{5/2}} \quad , \quad f^{(۳)}(۴) = \frac{3}{۲۵۶}$$

$$\begin{aligned} p_۳(x) &= ۲ + \frac{1}{۴}(x - ۴) - \frac{1}{۳۲} * \frac{1}{۲!}(x - ۴)^۲ + \frac{3}{۲۵۶} * \frac{1}{۳!}(x - ۴)^۳ \\ &= ۲ + \frac{1}{۴}(x - ۴) - \frac{1}{۶۴}(x - ۴)^۲ + \frac{1}{۵۱۲}(x - ۴)^۳ \end{aligned}$$

$$۳) \quad g(x) = \cos x; a = \frac{\pi}{۴}$$

$$g(x) = \cos x \quad , \quad g\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$g'(x) = -\sin x \quad , \quad g'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$g''(x) = -\cos x \quad , \quad g''\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$g^{(۳)}(x) = \sin x \quad , \quad g^{(۳)}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{aligned} p_۳(x) &= \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) - \frac{\sqrt{۲}}{۲} * \frac{1}{۲!}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)^۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} * \frac{1}{۳!}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)^۳ \\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) - \frac{\sqrt{۲}}{۴}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)^۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)^۳ \end{aligned}$$

$$۴) \quad k(x) = \csc x; a = \frac{\pi}{۲}$$

$$k(x) = \csc x, \quad k\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$$

$$k'(x) = -\csc x * \cot x, \quad k'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = 0$$

$$k''(x) = \csc x * \cot^2 x + \csc^3 x, \quad k''\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$$

$$k^{(۳)}(x) = -\csc x * \cot^3 x - ۵ \csc^3 x * \cot x, \quad k^{(۳)}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = 0$$

$$p_۳(x) = ۱ + \frac{۱}{۲!} \left(x - \frac{\pi}{۲}\right)^2 = ۱ + \frac{۱}{۲} \left(x - \frac{\pi}{۲}\right)^2$$

در تمرینات زیر یک سری تیلور برای f در a پیدا کنید. در هر مورد، نشان دهید، سری تیلوری که پیدا کرده اید به طرف f همگرا است. برای این کار نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است، برای تمام x ها.

$$۵) \quad f(x) = ۴x^۳ - ۲x + ۱; a = 0, -۳$$

$$f(x) = ۴x^۳ - ۲x + ۱, \quad f(0) = ۱, \quad f(-۳) = ۴۳$$

$$f'(x) = ۱۲x^2 - ۲, \quad f'(0) = -۲, \quad f'(-۳) = -۲۶$$

$$f''(x) = ۲۴x, \quad f''(0) = ۰, \quad f''(-۳) = -۷۲$$

$$f^{(n)}(x) = ۰, \quad f^{(n)}(0) = ۰, \quad f^{(n)}(-۳) = ۰, \quad \text{برای } n \geq ۳$$

پس سری تیلور حول ۰ مطابق زیر است

$$f(x) = ۱ - ۲x + \frac{۱۲}{۲!} x^2 = ۱ - ۲x + ۶x^2, \quad r_n(x) = ۰, \quad \text{برای } n \geq ۳$$

سری تیلور حول -۳ مطابق زیر است.

$$f(x) = ۴۳ - ۲۶(x + ۳) + \frac{۱۲}{۲!} (x + ۳)^2$$

$$= ۴۳ - ۲۶(x + ۳) + ۶(x + ۳)^2, \quad r_n(x) = ۰ \quad \text{برای } n \geq ۳$$

و تمام x ها

$$۶) \quad f(x) = \cos x; a = 0$$

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(۳)}(x) = \sin x, \quad f^{(۴)}(x) = \cos x$$

$$f^{(۲k)}(x) = (-1)^k \cos x \quad \text{و} \quad f^{(۲k+۱)}(x) = (-1)^{k+۱} \sin x$$

پس

$$f^{(۲k)}(0) = (-1)^k \quad \text{و} \quad f^{(۲k+۱)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 0$$

سری تیلور حول 0 مطابق زیر است.

$$1 - \frac{1}{۲!}x^۲ + \frac{1}{۴!}x^۴ - \frac{1}{۶!}x^۶ + \dots + (-1)^n \frac{1}{(۲n)!}x^{۲n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(۲n)!} x^{۲n}$$

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+۱)}(t_x)}{(n+۱)!} x^{n+۱} \right| \leq \frac{|x|^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

و بر اساس مثال ۷ بخش ۱.۷ برای هر x داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+۱}}{(n+۱)!} = 0$$

لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0$$

است برای تمام x ها، لذا $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است، برای تمام x ها.

$$۷) \quad f(x) = \sin x; a = \frac{\pi}{۳}$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(۳)}(x) = -\cos x, \quad f^{(۴)}(x) = \sin x$$

$$f^{(۲k)}(x) = (-1)^k \sin x \quad \text{و} \quad f^{(۲k+۱)}(x) = (-1)^k \cos x$$

پس داریم

$$f^{(۲k)}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = (-1)^k \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad f^{(۲k+۱)}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = (-1)^k \frac{1}{۲}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 0$$

سری تیلور حول $\frac{\pi}{۳}$ مطابق زیر بدست می آید.

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{1}{۲} \left(x - \frac{\pi}{۳}\right) - \frac{\sqrt{۳}}{۲} * \frac{1}{۲!} \left(x - \frac{\pi}{۳}\right)^۲ - \frac{1}{۲} * \frac{1}{۳!} \left(x - \frac{\pi}{۳}\right)^۳ + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left[\frac{\sqrt{3}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \right]$$

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{\left|x - \frac{\pi}{3}\right|^{n+1}}{(n+1)!}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|x - \frac{\pi}{3}\right|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0$ است و لذا $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است برای تمام x ها.

$$۸) \quad f(x) = e^x; a = -2$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \text{و} \quad f^{(k)}(-2) = e^{-2} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 0$$

پس سری تیلور حول -2 مطابق زیر است.

$$e^{-2} + e^{-2}(x+2) + e^{-2} * \frac{1}{2!}(x+2)^2 + e^{-2} * \frac{1}{3!}(x+2)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2}}{n!} (x+2)^n$$

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} (x+2)^{n+1} \right| \leq \frac{1+e^x}{(n+1)!} |x+2|^{n+1}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+e^x}{(n+1)!} |x+2|^{n+1} = 0$$

است، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0$ است، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ است برای تمام x ها.

در تمرینات زیر یک سری تیلور برای تابع داده شده در a پیدا کنید.

۹) $f(x) = \cos x^2; a = 0$

$$\cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

۱۰) $f(x) = \ln(1 - 2x); a = 0$

$$\ln(1 - 2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-2x)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

۱.۱۰ - تمرینات دوره ای فصل اول

در تمرینات ۲ و ۱ مجموعه جزئی اولین سه جمله دنباله داده شده را بنویسید.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} n^{2^n}$$

$$۲) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n+2}$$

در تمرینات ۴ و ۳ مجموعه جزئی جمله n ام یک سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ داده شده است. مشخص کنید آیا سری همگرا است و یا واگرا، اگر همگرا است مقدار سری را پیدا کنید.

$$۳) s_n = \frac{5 + 8n^2}{2 - 7n^2}$$

$$۴) s_n = \frac{n^2}{5 + 2n}$$

برای تمرینات ۶ و ۵ نشان دهید که، سری واگرا است.

$$۵) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3ne^n}{n^2 + 1}$$

$$۶) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{6 + 8n + 9n^2}{3 + 2n + n^2}$$

برای هر کدام از تمرینات ۹ - ۷ مشخص کنید آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا. توضیح دهید چرا.

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$$

$$۸) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 4}$$

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

۱۰ - برای چه مقداری از p سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^2}$ همگرا است؟

۱۱- می خواهیم با استفاده از مجموع ده جمله اول سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+3}}$ مقدار تقریبی مجموع این سری را پیدا کنیم. نشان دهید خطای این تقریب کمتر از $\frac{1}{3000}$ است. برای این کار این سری را با مجموع $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ مقایسه کنید.

۱۲- آیا سری زیر همگرا است و یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+1)!}{(3n)!}$$

۱۳- آیا سری زیر مطلقاً همگرا است، مشروط همگرا است و یا واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

۱۴- شعاع همگرایی سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^{3n}}{n^2 + 1}$$

۱۵- دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n}$$

آیا این دنباله همگرا است؟ اگر همگرا است، حد آن چه مقدار است؟

۱۶- مقدار سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}}$$

۱۷- آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n \sqrt{n+3}}$$

۱۸- آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos n}{e^n}$$

۱۹- آیا سری زیر مطلقاً همگرا است، مشروط همگرا است، یا واگرا است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

۲۰ - آیا سری زیر مطلقاً همگرا است ، مشروط همگرا است ، یا واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{\pi^n}$$

پاسخ تمرینات

در تمرینات ۱ و ۲ مجموعه جزئی اولین سه جمله دنباله داده شده را بنویسید.

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} n 2^n$$

پاسخ

$$s_1 = (1)2^1 = 2$$

$$s_2 = (1)2^1 + (2)2^2 = 10$$

$$s_3 = (1)2^1 + (2)2^2 + (3)2^3 = 34$$

$$۲) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n+2}$$

پاسخ

$$s_3 = \frac{2(3)}{3+2} = \frac{6}{5}$$

$$s_4 = \frac{2(3)}{3+2} + \frac{2(4)}{4+2} = \frac{38}{15}$$

$$s_5 = \frac{2(3)}{3+2} + \frac{2(4)}{4+2} + \frac{2(5)}{5+2} = \frac{416}{105}$$

در تمرینات ۳ و ۴ مجموعه جزئی جمله n ام یک سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ داده شده است. مشخص کنید آیا سری همگرا است و یا واگرا، اگر همگرا است مقدار سری را پیدا کنید.

$$۳) s_n = \frac{5 + 8n^2}{2 - 7n^2}$$

پاسخ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 8n^2}{2 - 7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^2} + \frac{8n^2}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{7n^2}{n^2}} = -\frac{8}{7}$$

پس، سری به طرف $-\frac{8}{7}$ همگرا است.

$$۴) \quad s_n = \frac{n^2}{5 + 2n}$$

پاسخ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5 + 2n} = \infty$$

پس ، سری واگرا است.

برای تمرینات ۶ و ۵ نشان دهید که ، سری واگرا است.

$$۵) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3ne^n}{n^2 + 1}$$

پاسخ

توجه داشته باشید که از ما خواسته نشده است که آیا سری همگرا است و یا واگرا ، بلکه گفته شده است که نشان دهید ، سری واگرا است. در این حالت از آزمون واگرایی استفاده می کنیم. یعنی باید نشان دهیم که حد سری یا وجود ندارد و یا صفر نیست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3ne^n}{n^2 + 1} = \infty \neq 0$$

پس ، سری واگرا است.

$$۶) \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{6 + 8n + 9n^2}{3 + 2n + n^2}$$

پاسخ

توجه داشته باشید که از ما خواسته نشده است که آیا سری همگرا است و یا واگرا ، بلکه گفته شده است که نشان دهید ، سری واگرا است. در این حالت از آزمون واگرایی استفاده می کنیم. یعنی باید نشان دهیم که حد سری یا وجود ندارد و یا صفر نیست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 8n + 9n^2}{3 + 2n + n^2} = 9 \neq 0$$

پس سری ، واگرا است.

برای هر کدام از تمرینات ۹ - ۷ مشخص کنید آیا سری داده شده همگرا است و یا واگرا. توضیح دهید چرا.

$$۷) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$$

پاسخ
می دانیم که

$$\frac{n^3}{n^5 + 3} < \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2} \quad \text{برای تمام } n \text{ ها}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک p سری است با $p = 2 > 1$ و لذا همگرا است، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$ هم همگرا است. بر اساس آزمون مقایسه.

$$۸) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 4}$$

پاسخ
می دانیم که

$$\frac{3^n}{4^n + 4} < \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{برای تمام } n \text{ ها}$$

پس چون $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ یک سری هندسی با $r = \frac{3}{4} < 1$ و همگرا است، لذا بر اساس آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 4}$ هم همگرا است.

$$۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

پاسخ
با استفاده از آزمون ریشه داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

پس بر اساس آزمون ریشه، سری داده شده مطلقاً همگرا است.

۱۰- برای چه مقداری از p سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ همگرا است؟

پاسخ

با استفاده از مقایسه حد داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^p}{2+n^3}}{\frac{1}{n^{3-p}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2+n^3} = \frac{1}{2}$$

پس سری داده شده همگرا است اگر فقط و فقط $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ همگرا باشد، این هنگامی اتفاق می افتد که $1 < 3-p < \infty$ باشد، یعنی هنگامی که $p < 2$ باشد. لذا سری داده شده همگرا است هنگامی که $p < 2$ باشد.

۱۱- می خواهیم با استفاده از مجموع ده جمله اول سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+3}$ مقدار تقریبی مجموع این سری را

پیدا کنیم. نشان دهید خطای این تقریب کمتر از $\frac{1}{3000}$ است. برای این کار این سری را با مجموع $\frac{1}{n^4}$ مقایسه کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$\frac{1}{n^4+3} < \frac{1}{n^4} \quad \text{برای تمام } n \text{ ها}$$

است. پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

است.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{3x^3} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{3000}$$

پس ملاحظه می کنید خطا کمتر از $\frac{1}{3000}$ است.

۱۲ - آیا سری زیر همگرا است و یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+1)!}{(3n)!}$$

پاسخ

با استفاده از آزمون نسبت داریم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!(n+1)!}{(3n)!}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2)!}{(3n+3)!} * \frac{(3n)!}{n!(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{27n^3 + 54n^2 + 33n + 6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{27 + \frac{54}{n} + \frac{33}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = 0 < 1 \end{aligned}$$

پس بر اساس آزمون نسبت، سری داده شده مطلقاً همگرا است.

۱۳ - آیا سری زیر مطلقاً همگرا است، مشروط همگرا است و یا واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$$

چون تابع کسینوس یک تابع پیوسته است، پس جمله های زیر

$$(-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

به طرف صفر نمی روند، پس برا اساس آزمون و گرای، این سری واگرا است.

۱۴ - شعاع همگرایی سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^{3n}}{n^4 + 1}$$

پاسخ

با استفاده از آزمون نسبت داریم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3 x^{3n+3}}{(n+1)^4 + 1}}{\frac{n^3 x^{3n}}{n^4 + 1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n^4 + 1)(n+1)^3 x^3}{n^3((n+1)^4 + 1)} \right| \\ &= |x|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + 1)(n+1)^3}{n^3((n+1)^4 + 1)} = |x|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + \dots}{n^4 + \dots} = |x|^3 \end{aligned}$$

اگر $|x| < 1$ باشد، $|x|^3 < 1$ است، پس شعاع همگرایی ۱ است.

۱۵ - دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n}$$

آیا این دنباله همگرا است؟ اگر همگرا است، حد آن چه مقدار است؟

پاسخ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}((-1)^n + n)}{\frac{1}{n}((-1)^n - n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n} + 1}{\frac{(-1)^n}{n} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

پس، دنباله داده شده به طرف -1 همگرا است.

۱۶ - مقدار سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}}$$

پاسخ

جمله ها را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$\frac{1 + 2^n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

اگر اندیس سیگما را یکی به عقب بر گردانیم، سمت راست تساوی بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هر دو سری بدست آماده، سری های هندسی هستند. پس می توان مقادیر آنها را پیدا کرد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

۱۷ - آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n\sqrt{n+3}}$$

پاسخ

مقایسه حد با $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+5}{n\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)\sqrt{n}}{n\sqrt{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} + 5n^{1/2}}{\sqrt{n^3 + 3n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}}(n^{3/2} + 5n^{1/2})}{\frac{1}{n^{3/2}}\sqrt{n^3 + 3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^3}(n^3 + 3n^2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}} = 1 \end{aligned}$$

لذا چون $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ که یک p سری است با $p = \frac{1}{2} < 1$ و واگرا است، پس بر اساس آزمون مقایسه حد، سری داده شده واگرا است.

۱۸ - آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos n}{e^n}$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$|3 + \cos n| \leq 4$$

است برای تمام n ها. پس

$$\left| \frac{3 + \cos n}{e^n} \right| = \frac{|3 + \cos n|}{e^n} \leq \frac{4}{e^n} = 4 \left(\frac{1}{e} \right)^n$$

است برای تمام n ها. چون $\frac{1}{e} < 1$ است، پس سری $\sum 4 \left(\frac{1}{e} \right)^n$ همگرا است، پس بر اساس آزمون مقایسه سری $\sum \left| \frac{3 + \cos n}{e^n} \right|$ هم همگرا است. و لذا سری $\sum \frac{3 + \cos n}{e^n}$ مطلقاً همگرا است.

۱۹ - آیا سری زیر مطلقاً همگرا است، مشروط همگرا است، یا واگرا است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

پاسخ

جمله های $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ نزولی هستند و به طرف صفر می روند. امتحان کنید. پس آزمون سری های متناوب

می گوید سری داده شده همگرا است. بر این که نشان دهیم این سری مطلقاً همگرا نیست، کافی است نشان دهیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

واگرا است. برای این کار آزمون مقایسه حد با سری $\sum \frac{1}{n}$ انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2 + 1}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} n}{\frac{1}{n} \sqrt[n]{n^2 + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2} (n^2 + 1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

چون حد صفر نیست، آزمون مقایسه حد می گوید $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 1}}$ واگرا است.

۲۰ - آیا سری زیر مطلقاً همگرا است، مشروط همگرا است، یا واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{\pi^n}$$

پاسخ

با استفاده از آزمون نسبت داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{\pi^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n!}{\pi^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\pi} = \infty$$

پس بر اساس آزمون نسبت، سری داده شده، واگرا است.

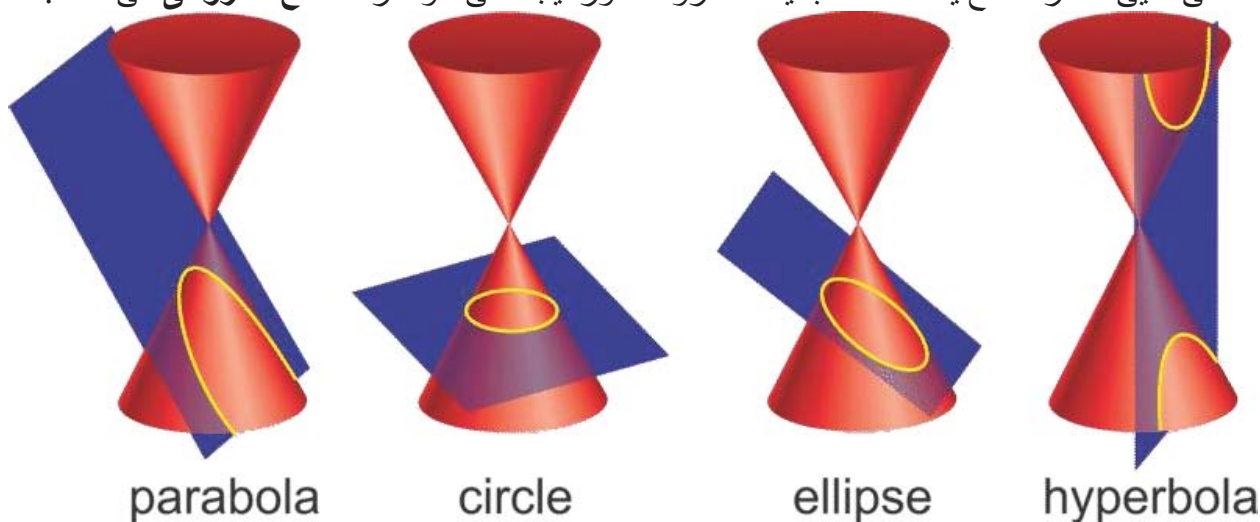
جلد سوم حسابان

فصل دوم مقاطع مخروطی

Conic Sections

مقاطع مخروطی یکی از اشکال شناخته شده هستند که از زمان آپولونیوس Apollonius مورد علاقه مخصوص ریاضی دانان بوده است. او که در قرن سوم قبل از میلاد میزیسته است، هشت رساله در مورد مقاطع مخروطی نوشت و بین ریاضی دانان آن عصر، به عنوان هندسه دان بزرگ شناخته می شد.

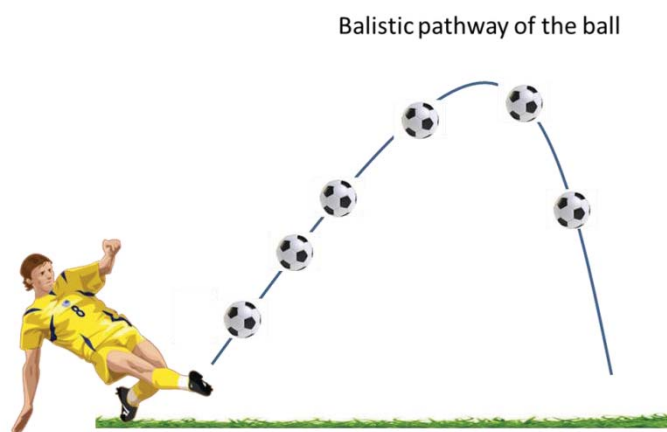
منحنی هایی که از تقاطع یک صفحه با یک مخروط مدور ایجاد می شوند را **مقاطع مخروطی** می نامند.



این که صفحه با مخروط چگونه تلاقی کند، مقطع بدست آمده سهمی، دایره، بیضی و یا هذلولی است.

۲.۱ - سهمی The Parabola

مثلا مسیری که توپ فوتبال طی می کند، یک منحنی سهمی است.



تعریف سهمی - فرض می‌کنیم l یک خط ثابت روی صفحه و P یک نقطه ثابت روی l باشد. مجموعه نقاط روی صفحه که از l و P به یک فاصله باشند، سهمی می‌نامند. خط l را **خط هادی** **Directrix** و نقطه P را **کانون Focus** می‌نامند.

Equal Distances: مساوی مسافت های



از تعریف سهمی و هندسه مسطحه، چنین نتیجه می‌شود که یک سهمی همیشه نسبت به خطی که از کانون می‌گذرد و بر خط هادی عمود است، قرینه است. این خط را **محور Axis** سهمی می‌نامند. طبق تعریف، نقطه روی محور و نیمه راه کانون و خط هادی را راس **Vertex** سهمی می‌نامند. گفته می‌شود که سهمی در **محل متعارف Standard Position** است، اگر راس آن روی مبدا مختصات و محور آن، یا محور x و یا محور y باشد. تصویر A

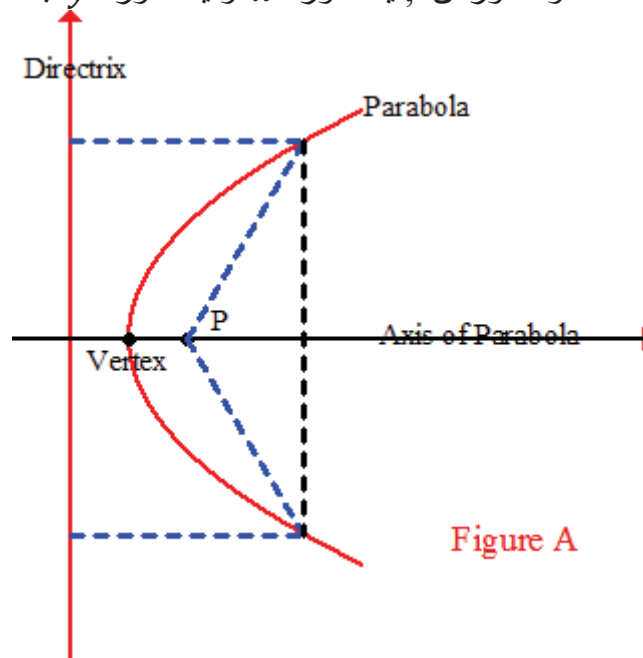
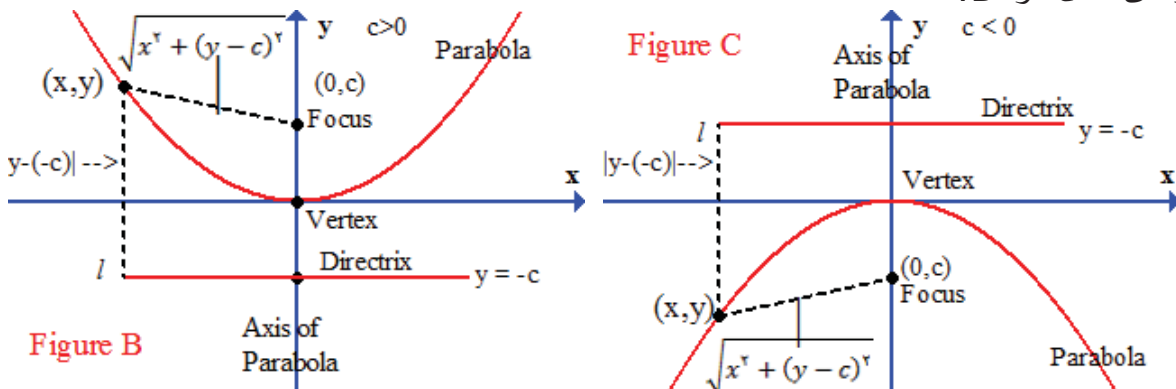


Figure A

سهمی ها در مکان متعارف Parabolae in Standard Position

حالا می خواهیم یک معادله یا تساوی برای یک سهمی در مکان متعارف پیدا کنیم. اگر محور سهمی محور y باشد، پس کانون آن نقطه $(0, c)$ ، $c \neq 0$ است و خط هادی خط $y = -c$ است. تصویرهای B و C .



طبق تعریف، یک نقطه (x, y) روی سهمی است اگر فقط و فقط فاصله بین (x, y) و خط l مساوی فاصله (x, y) تا $(0, c)$ باشد. یعنی

$$|y - (-c)| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}$$

$$\sqrt{(y + c)^2} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

چون عبارت های داخل رادیکال ها نا منفی هستند. پس می توان نوشت.

$$(y + c)^2 = x^2 + (y - c)^2$$

یا

$$y^2 + 2cy + c^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

اگر ساده کنیم، داریم.

$$x^2 = 4cy \quad (1)$$

اگر معادله (۱) را برای y حل کنیم، داریم.

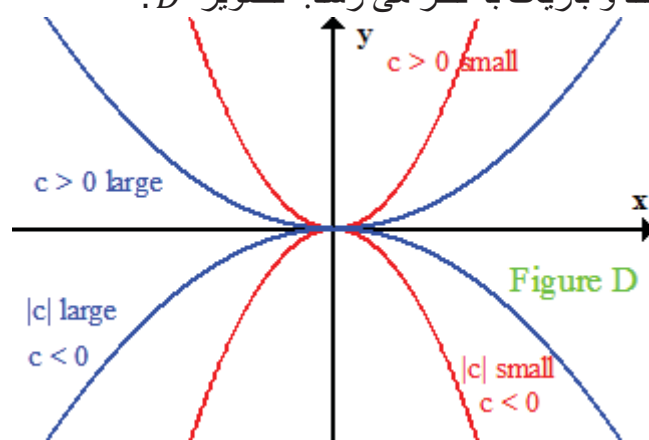
$$y = \frac{x^2}{4c}$$

مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2c} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2c}$$

پس سهمی توصیف شده در (۱) فرو رفتگی یا تعقر به طرف بالا دارد، اگر $c > 0$ باشد و تعقر یا فرو رفتگی به طرف پایین دارد اگر $c < 0$ باشد. اگر $|c|$ بزرگ باشد، کانون و خط هادی زیاد از

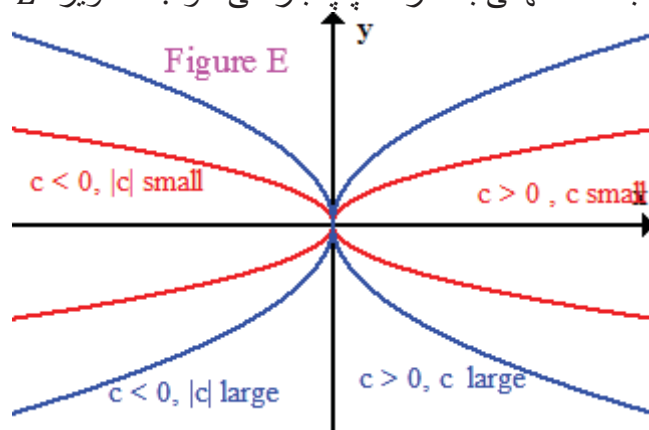
هم فاصله دارند و سهمی عریض به نظر می رسد و اگر $|c|$ کوچک باشد، کانون و خط هادی به هم نزدیک هستند و سهمی بلند و باریک به نظر می رسد. تصویر D .



حال اگر فرض کنیم محور سهمی، محور x باشد، پس کانون آن $(c, 0)$ است. و خط هادی آن خط $x = -c$ است. جای x و y را تعویض می کنیم و مشتق می گیریم. پس داریم.

$$y^2 = 4cx$$

در این حالت، سهمی نسبت به محور x قرینه است. اگر $c > 0$ باشد، سهمی به طرف راست باز می شود. و اگر $c < 0$ باشد، سهمی به طرف چپ باز می شود. تصویر E



در ذیل دو شکل سهمی در مکان متعارف خلاصه می کنیم.

$$x^2 = 4cy \begin{cases} \text{کانون } (0, c) \\ \text{خط هادی } y = -c \\ \text{قرینه نسبت به محور } y \end{cases} \quad (2)$$

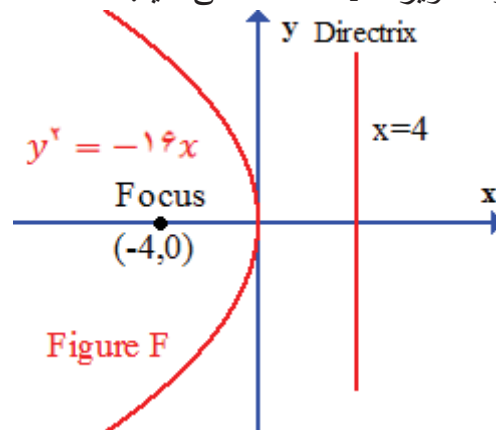
$$y^2 = 4cx \begin{cases} \text{کانون } (c, 0) \\ \text{خط هادی } x = -c \\ \text{قرینه نسبت به محور } x \end{cases} \quad (3)$$

البته توجه دارید که

$$2|c| = \text{فاصله از کانون تا خط هادی}$$

مثال ۱ - کانون و خط هادی سهمی $y^2 = -16x$ را پیدا کنید و آنرا رسم نمایید.
پاسخ

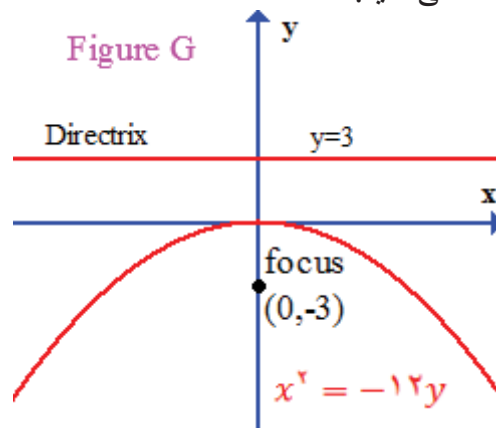
معادله داده شده به صورت $y^2 = 4cx$ است، با $c = -4$. پس کانون نقطه $(-4, 0)$ است و خط هادی $x = 4$. نمودار سهمی در تصویر F ملاحظه می کنید.



مثال ۲ - یک سهمی دارای کانون $(0, -3)$ و خط هادی $y = 3$ است. معادله سهمی را پیدا کنید و آنرا رسم کنید.

پاسخ

فرمولی که باید بکار ببریم $x^2 = 4cy$ است، با $c = -3$. پس معادله سهمی $x^2 = -12y$ است. نمودار آن در تصویر G ملاحظه می کنید.



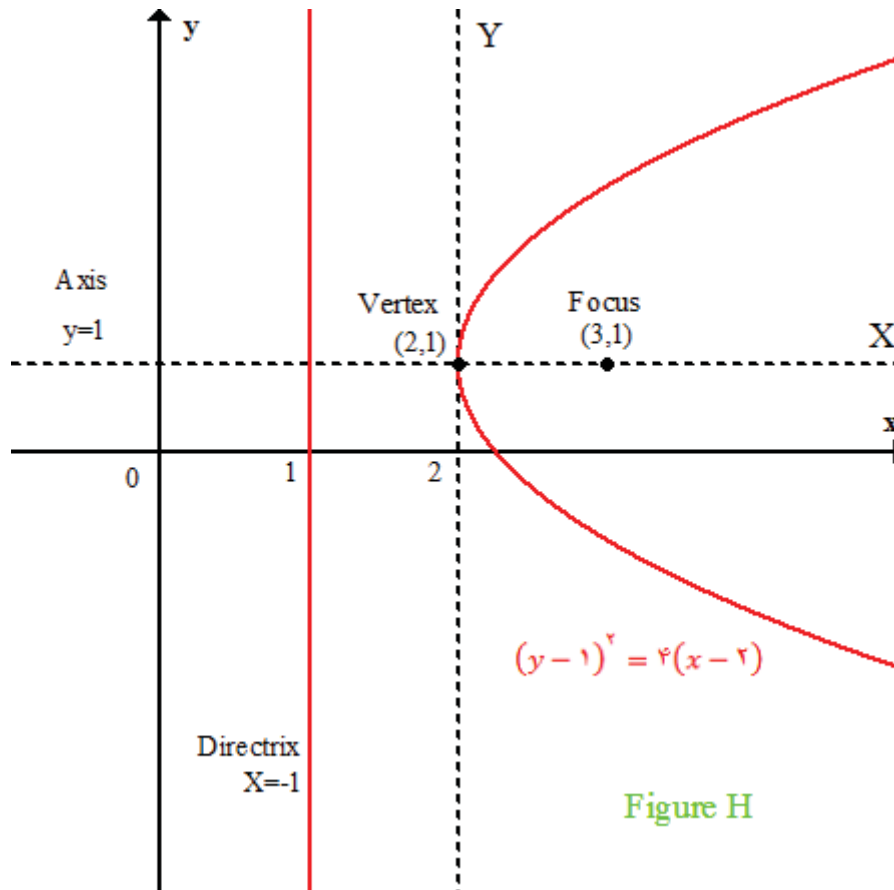
مثال ۳ - یک معادله برای سهمی که کانون آن $(3, 1)$ و خط هادی آن $x = 1$ است پیدا کنید و سپس آنرا رسم نمایید.

پاسخ

توجه: محورهای مختصات را با xy نشان می دهیم. می توان محورهای مختصات را جابجا کرد در این صورت محورهاهای جدید را با XY نشان می دهیم.

چون محور سهمی خطی است که از کانون $(3, 1)$ می گذرد و بر خط هادی $x = 1$ عمود است، پس می دانیم که محور سهمی خط $y = 1$ است. چون راس سهمی، دقیقاً وسط کانون و خط هادی و روی

محور قرار دارد، پس راس سهمی نقطه $(2, 1)$ است. لذا مبدا محورهای مختصات XY نقطه $(2, 1)$ است. تصویر H



اگر سهمی را در مکان متعارف روی سیستم XY قرار دهیم، کانون سهمی $(1, 0)$ در سیستم XY خواهد بود. و خط هادی $X = -1$ است. بر اساس فرمول (۳) معادله سهمی در محورهای مختصات XY عبارت است از $Y^2 = 4X$. در نتیجه می توانیم سهمی را رسم کنیم. تصویر H چون $X = x - 2$ و $Y = y - 1$ است، معادله سهمی در سیستم xy مطابق زیر است.

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

اگر معادله بالا را بسط دهیم، داریم.

$$y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$$

اگر $A = 0$ یا $C = 0$ اما، نه هر دو، پس معادله کلی سهمی مطابق زیر است.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

با کامل کردن مربع، می توانیم راس، کانون، خط هادی و محور را پیدا کنیم.

مثال ۴ - نشان دهید که $x^2 + 2x - 6y - 17 = 0$ معادله یک سهمی است. نمودار آنرا رسم کنید و کانون، خط هادی و محور آنرا مشخص کنید.

پاسخ

با کامل کردن مربع روی x داریم.

$$x^2 + 2x + 1 - 6y - 17 = 1$$

$$(x + 1)^2 = 6y + 18$$

$$(x + 1)^2 = 6(y + 3)$$

در سیستم جابجا شده XY که مبدا مختصات آن $(-1, -3)$ است، داریم $X = x + 1$ و

$$Y = y + 3$$

پس معادله به صورت زیر است.

$$X^2 = 6Y$$

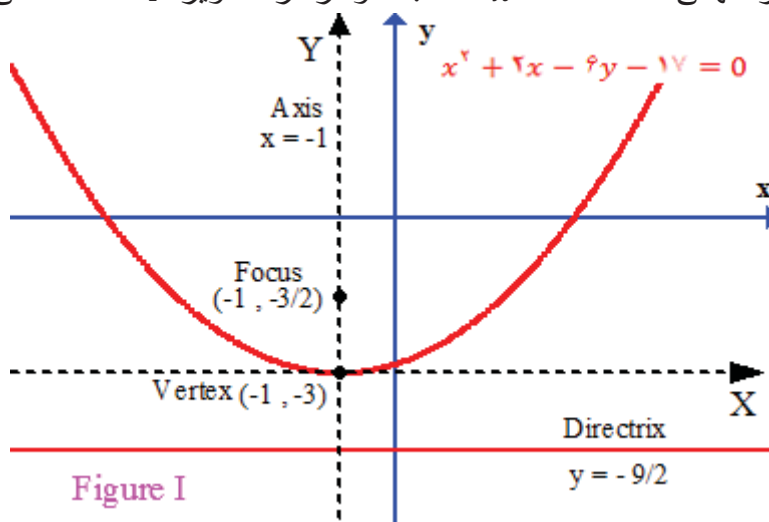
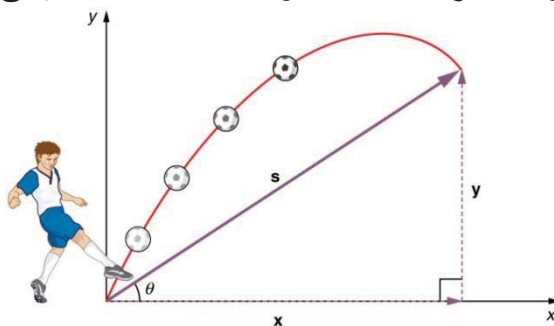
با استفاده از فرمول (۲) ملاحظه می کنید که کانون $(0, \frac{3}{2})$ است و خط هادی $Y = -\frac{3}{2}$ است درسیستم XY . لذا در سیستم xy کانون $(-1, -\frac{3}{2})$ و خط هادی $y = -\frac{9}{2}$ و راس سهمی $(-1, -3)$ و محور سهمی خط $x = -1$ است. نمودار در تصویر I ملاحظه می کنید.

Figure I

کاربرد های سهمی Applications of Parabolas

کاربرد های تئوریک و عملی سهمی زیاد است، در ذیل چند نمونه از آنها را می آوریم.

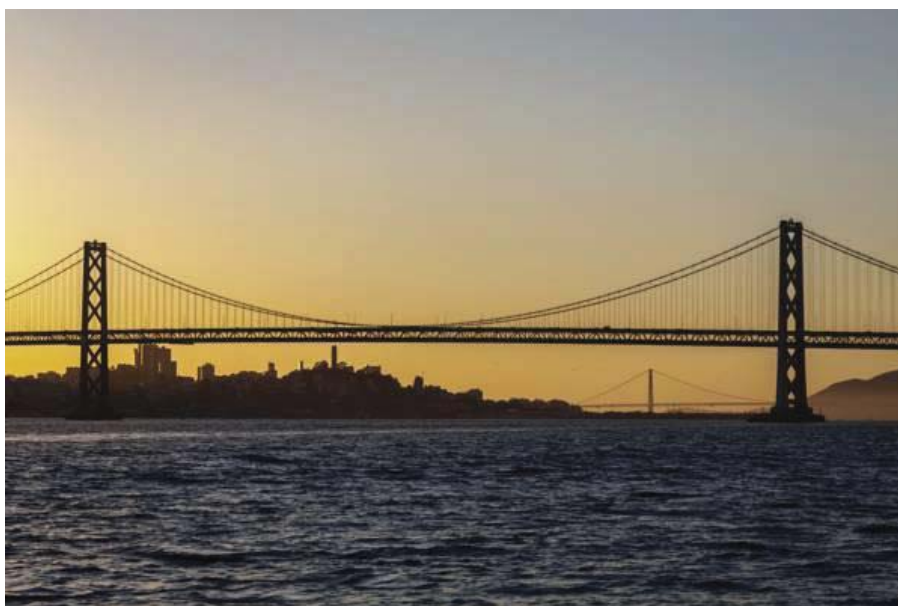
- ۱ - هنگامی که یک شی فقط تحت تاثیر نیروی جاذبه حرکت می کند و در نهایت به زمین بر خورد می کند، مسیر آن به شکل سهمی است و اگر عمودی حرکت کند، مسیر نزدیک به شکل سهمی است. پس مسیروتوپ گلف، بیسبال، و فوتبال اگر اصطکاک هوا نباشد، به شکل سهمی است.



۲ - بعضی از آئینه ها که از داوران یک سهمی حول محورش بدست می آید . این نوع آئینه ها را آئینه های سهمی شکل می نامند. مانند چراغ جلو اتومبیل. در چراغ اتومبیل ، نوری که از لامپ که در کانون قرار دارد منتشر می شود ، به موازات محور منعکس می شود. همچنین در تلسکوپ منعکس کننده و دیش ماهواره.



۳ - پل های معلق یا آویزان



تمرینات ۲.۱

در تمرینات زیر معادله یک سهمی با مشخصات داده شده پیدا کنید.

۱ - کانون $(-2, 0)$ و خط هادی $x = 2$

۲ - کانون $(0, -6)$ و خط هادی $y = 6$

۳ - کانون $(0, 0)$ و خط هادی $x = 5$

۴ - کانون $(1, 0)$ و خط هادی $x = -2$

۵ - کانون $(3, 3)$ و راس $(3, 2)$

۶ - سهمی در مکان متعارف، قرینه نسبت به محور x و از نقطه $(-1, 1)$ عبور می کند.

۷ - سهمی مجموعه نقاط (x, y) است بطوریکه فاصله هر نقطه از $(3, 4)$ مساوی است با فاصله آن نقطه تا خط $y = 2$

در تمرینات زیر نمودار سهمی که معادله آن داده شده است را رسم کنید. و کانون، راس، خط هادی و محور آنرا مشخص کنید.

۹) $y^2 = 3x$

۱۰) $x^2 = y$

۱۱) $(x - 1)^2 = y + 2$

۱۲) $(x - 2)^2 = 3(y - 3)$

در تمرینات زیر یک سیستم XY پیدا کنید که در آن سهمی با معادله داده شده در مکان متعارف قرار گیرد. نمودار آنرا هم را رسم کنید.

۱۳) $x^2 - 6x - 2y + 1 = 0$

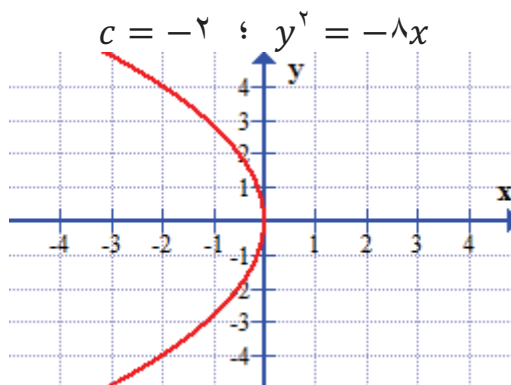
۱۴) $3y^2 - 5x + 3y - \frac{17}{4} = 0$

۱۵) $4y^2 - \sqrt{2}x + 2y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

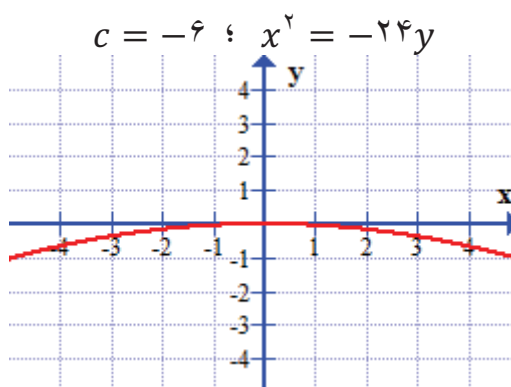
پاسخ تمرینات ۲.۱

در تمرینات زیر معادله یک سهمی با مشخصات داده شده پیدا کنید.

- ۱ - کانون $(-2, 0)$ و خط هادی $x = 2$
پاسخ

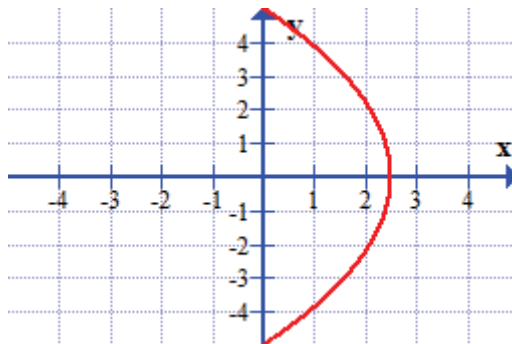


- ۲ - کانون $(0, -6)$ و خط هادی $y = 6$
پاسخ

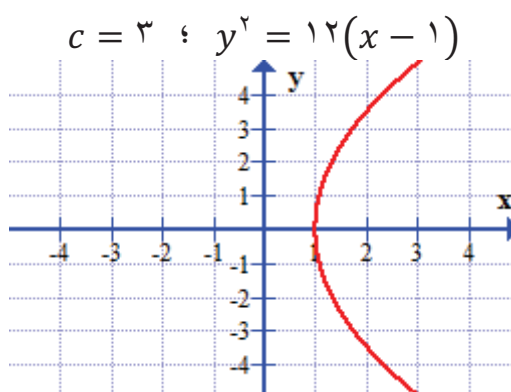


- ۳ - کانون $(0, 0)$ و خط هادی $x = 5$
پاسخ

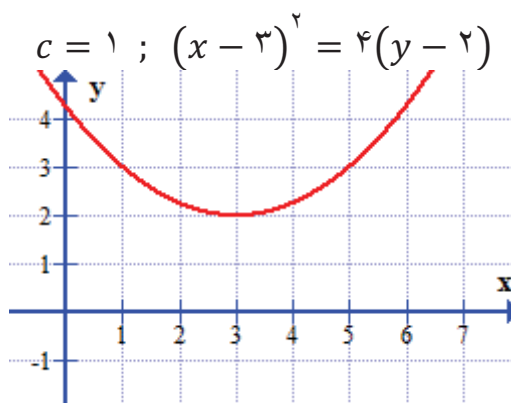
$$\text{راس} = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ ؛ } c = -\frac{5}{2} \text{ ؛ } y^2 = -1 \circ \left(x - \frac{5}{2}\right)$$



۴ - کانون $(1, 0)$ و خط هادی $x = -2$
پاسخ

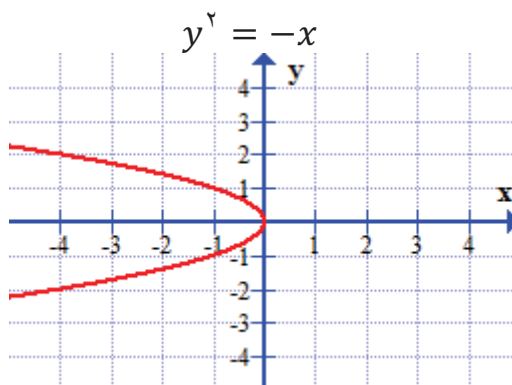


۵ - کانون $(3, 3)$ و راس $(3, 2)$
پاسخ



۶ - سهمی در مکان متعارف ، قرینه نسبت به محور x و از نقطه $(-1, 1)$ عبور می کند.
پاسخ

$$y^2 = 4cx \text{ و } 1^2 = 4c(-1) \text{ ، پس } c = -\frac{1}{4}$$



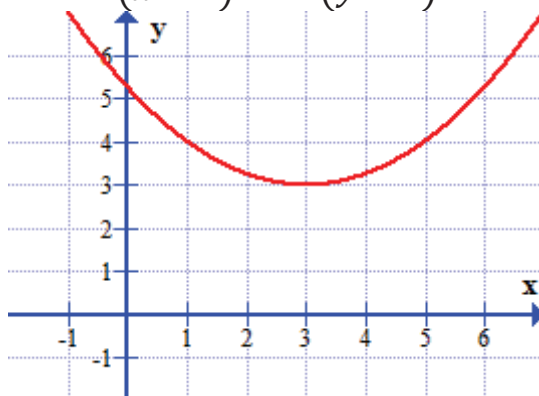
۷ - سهمی مجموعه نقاط (x, y) است بطوریکه فاصله هر نقطه از $(3, 4)$ مساوی است با فاصله آن نقطه تا خط $y = 2$
پاسخ

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = |y-2|$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (y-2)^2$$

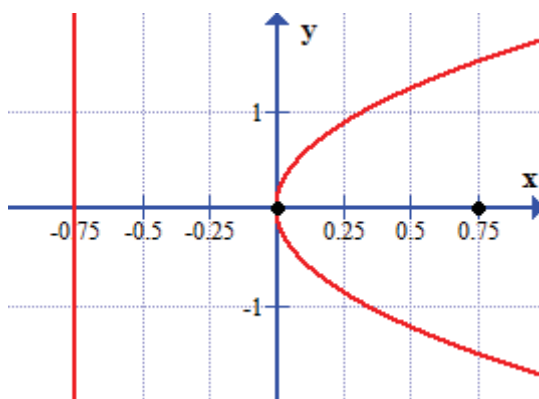
$$(x-3)^2 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4$$

$$(x-3)^2 = 4(y-3)$$



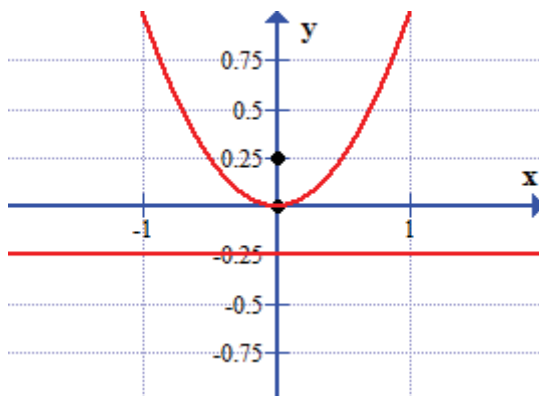
در تمرینات زیر نمودار سهمی که معادله آن داده شده است رسم کنید. و کانون، راس، خط هادی و محور آنرا مشخص کنید.

۹) $y^2 = 3x$



$x = -\frac{3}{4}$ خط هادی، راس $(0, 0)$ ، کانون $(\frac{3}{4}, 0)$ ، $c = \frac{3}{4}$
محور $y = 0$

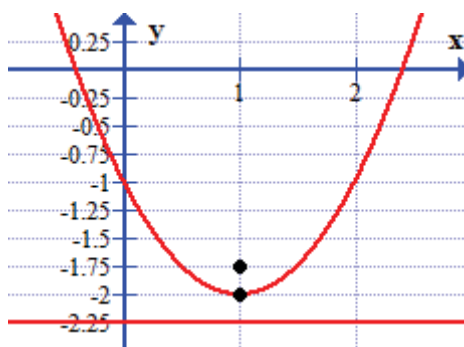
$$۱۰) x^2 = y$$



$y = -\frac{1}{4}$ خط هادی ، $(0,0)$ رأس ، $(0, \frac{1}{4})$ کانون ، $c = \frac{1}{4}$

$x = 0$ محور

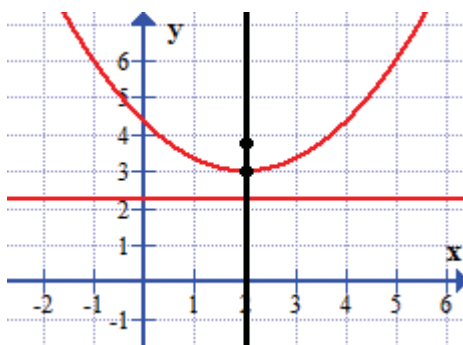
$$۱۱) (x-1)^2 = y+2$$



$y = -\frac{9}{4}$ خط هادی ، $(1, -2)$ رأس ، $(1, -\frac{7}{4})$ کانون ، $c = \frac{1}{4}$

$x = 1$ محور

$$۱۲) (x-2)^2 = 3(y-3)$$



$y = \frac{9}{4}$ خط هادی ، $(2, 3)$ رأس ، $(2, \frac{15}{4})$ کانون ، $c = \frac{3}{4}$ ، $x = 2$ محور

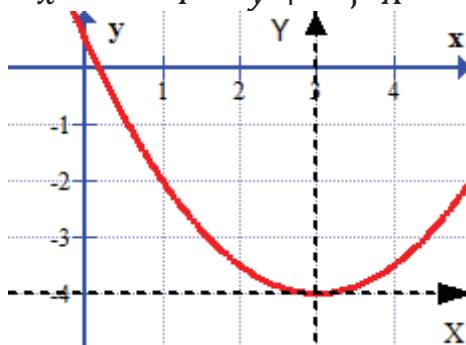
در تمرینات زیر یک سیستم XY پیدا کنید که در آن سهمی با معادله داده شده در مکان متعارف قرار گیرد. نمودار آنرا هم رسم کنید.

$$۱۳) x^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$

$$0 = x^2 - 6x - 2y + 1 = (x^2 - 6x + 9) - 2y + 1 - 9$$

$$= (x - 3)^2 - 2(y + 4)$$

$$X = x - 3, Y = y + 4; X^2 = 2Y$$

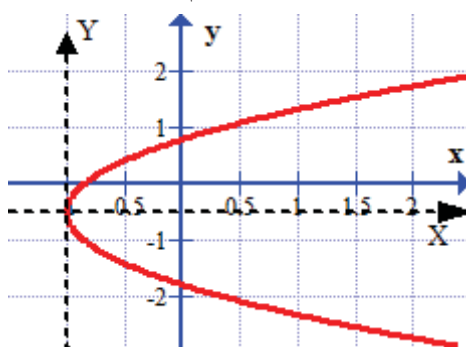


$$۱۴) 3y^2 - 5x + 3y - \frac{17}{4} = 0$$

$$0 = 3y^2 - 5x + 3y - \frac{17}{4} = \left(3y^2 + 3y + \frac{3}{4}\right) - 5x - \frac{17}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(x + 1\right)$$

$$X = x + 1; Y = y + \frac{1}{2}; 3Y^2 = 5X \text{ یا } Y^2 = \frac{5}{3}X$$



$$۴y^۲ - \sqrt{۲}x + ۲y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱ \quad (۱۵)$$

اگر

$$۴y^۲ - \sqrt{۲}x + ۲y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱$$

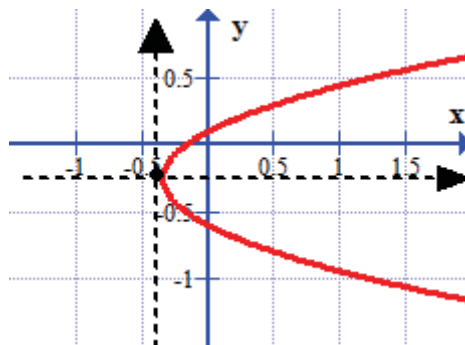
باشد، پس

$$۴\left(y^۲ + \frac{۱}{۴}y + \frac{۱}{۱۶}\right) = \sqrt{۲}x + \frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱ + \frac{۱}{۴}$$

است. بطوری که

$$۴\left(y + \frac{۱}{۴}\right)^۲ = \sqrt{۲}\left(x + \frac{۱}{۴}\right) - \frac{۳}{۴} = \sqrt{۲}\left(x + \frac{۱}{۴} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\right)$$

$$X = x + \frac{۱}{۴} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۸} \quad ; \quad Y = y + \frac{۱}{۴} \quad ; \quad ۴Y^۲ = \sqrt{۲}X \quad \text{یا} \quad Y^۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}X$$



بیضی The Ellipse

گرچه یونانیان بیضی را می شناختند ، اما بوسیله کپلر Kepler مورد توجه بیشتری قرار گرفت. او کشف کرد که سیارات در مدار های بیضی شکل بدور خورشید می چرخاند.

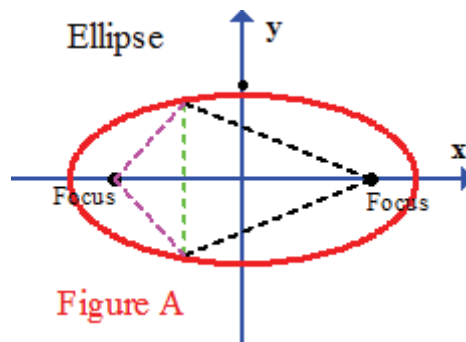
تعریف

فرض می کنیم P_1 و P_2 دو نقطه روی صفحه باشد، و فرض می کنیم k عددی باشد بزرگ تر از فاصله بین P_1 و P_2 . مجموعه نقاط P روی صفحه بطوری که داشته باشیم

$$|P_1P| + |P_2P| = k$$

بیضی می نامند. نقاط P_1 و P_2 را کانون های Foci بیضی می نامند.

به عبارت ساده تر: حاصل جمع فاصله هر نقطه روی محیط بیضی با دو کانونش مقداری است ثابت. تصویر A را ملاحظه کنید.



بر اساس تعریف و هندسه مسطحه ، ملاحظه می کنید که بیضی نسبت به خطی که از دو کانون می گذرد ، قرینه است. نقطه میانی بین دو کانون را مرکز **Center** بیضی می نامند. می گوئیم بیضی در مکان متعارف است اگر مرکز آن روی مبدا مختصات و کانون ها یا روی محور x و یا روی محور

y باشند. تصویر B

اگر کانون ها یک نقطه باشند ، و یا به عبارت دیگر کانون ها روی هم قرار گیرند ، در این صورت دایره خواهیم داشت.

بیضی ها در مکان متعارف Ellipses in Standard Position

حالا می خواهیم یک معادله برای بیضی در مکان متعارف پیدا کنیم. اگر کانون ها نقاط $(-c, 0)$ و $(c, 0)$ باشند و $c > 0$ ، تصویر B، پس مسافت بین کانون ها $2c$ است. برای آسان بودن کار فرض می کنیم $k = 2a$ باشد. بر اساس فرضی که کردیم $2a = k > 2c$ است. پس بر اساس تعریف مسافت ، یک نقطه مانند (x, y) روی بیضی است اگر فقط و فقط داشته باشیم

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

ریشه می گیریم و جمله های مشابه را حذف می کنیم ، پس داریم

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

مجددا ریشه می گیریم.

$$a^2 - 2cxa^2 + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

که می توان نوشت

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (1)$$

حالا اگر

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (2)$$

قرار دهیم

پس $0 < b \leq a$ است ، و شماره (۱) را بر a^2b^2 تقسیم می کنیم. پس داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

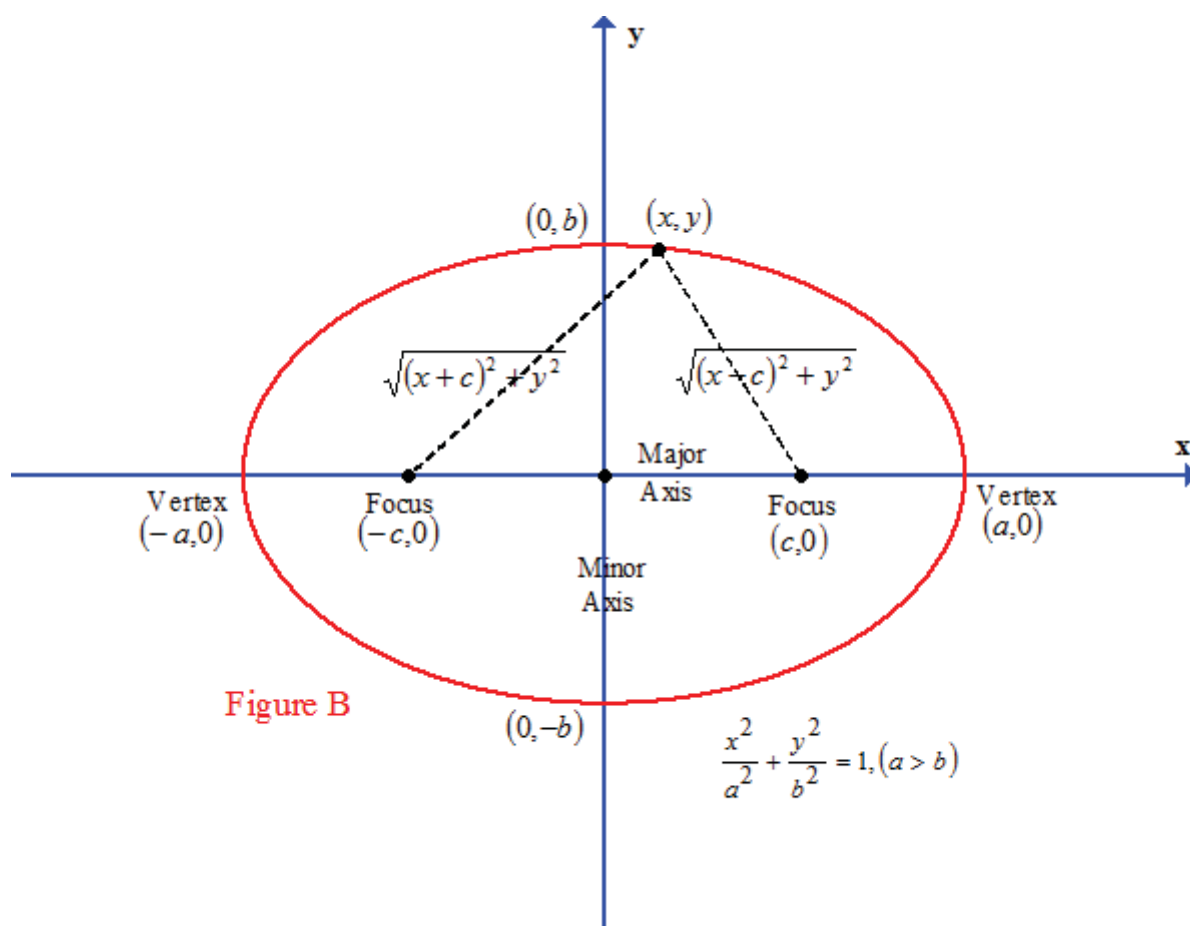


Figure B

پس هر نقطه روی بیضی باید معادله شماره (۳) را برقرار کند. می توان نشان داد هر نقطه روی بیضی ، معادله (۳) را برقرار می کند.

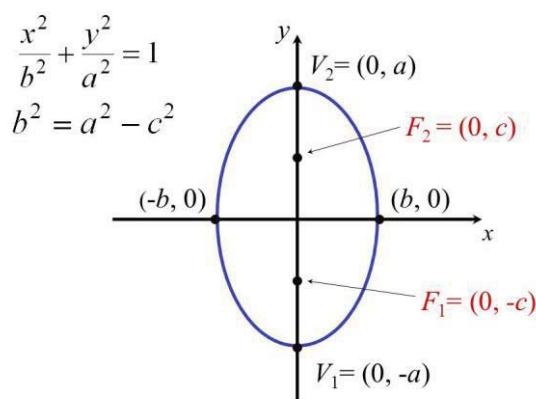
لذا شماره (۳) معادله یک بیضی است با کانون های $(-c, 0)$ و $(c, 0)$ و $k = 2a$.
 از شماره (۳) نتیجه می گیریم که مکان بر خورد بیضی با محور x نقاط a و $-a$ است. و مکان برخورد بیضی با محور y نقاط b و $-b$ است. نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ را راس های Vertices بیضی می نامیم. پاره خط بین $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ را محور بزرگ تر Major Axis و پاره خط بین $(0, b)$ و $(0, -b)$ را محور کوچک تر Minor Axis بیضی می نامیم. تصویر B .
 برای تایید این که نمودار تصویر B نمایش معادله (۳) است، اولاً مشاهده می کنیم که

$$-a \leq x \leq a \quad -b \leq y \leq b$$

است برای هر نقطه (x, y) روی بیضی. ثانیاً، از شماره (۳) در می یابیم که بیضی نسبت به محور های x و y و مبدا مختصات قرینه است. این یعنی اگر آن قسمت از بیضی که بالای محور x قرار دارد پیدا کنیم، می توانیم از روی قرینه قسمت زیرین محور x را پیدا کنیم.
 اگر کانون های بیضی روی محور y باشد، یعنی در نقاط $(0, c)$ و $(0, -c)$ ، و $c \geq 0$ ، می توانیم با تعویض x و y در شماره (۳) معادله زیر را بدست آوریم.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b \quad (4)$$

نمودار بیضی شماره (۴) را در تصویر C ملاحظه می کنید.
 تصویر C



در ذیل خلاصه دو شکل بیضی را برای مراجعه بعدی می آوریم.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a \geq b > 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ با } (c, 0) \text{ و } (-c, 0) \text{ کانون ها} \\ (a, 0) \text{ و } (-a, 0) \text{ راس ها} \\ \text{قرینه نسبت به محور های } x \text{ و } y \text{ و مبدا} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (a \geq b > 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ با } (0, c) \text{ و } (0, -c) \text{ کانون ها} \\ (0, a) \text{ و } (0, -a) \text{ راس ها} \\ \text{قرینه نسبت به محور های } x \text{ و } y \text{ و مبدا} \end{array} \right. \quad (6)$$

اعداد a ، b ، c دارای خصوصیات هندسی زیر هستند.

$$(۷) \quad \text{طول محور بزرگ تر} = 2a$$

$$(۸) \quad \text{طول محور کوچک تر} = 2b$$

$$(۹) \quad \text{فاصله بین کانون ها} = 2c$$

مثال ۱ - بیضی زیر را رسم کنید و کانون ها را مشخص نمایید.

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

پاسخ

هر دو طرف معادله را بر ۸ تقسیم می کنیم. پس داریم.

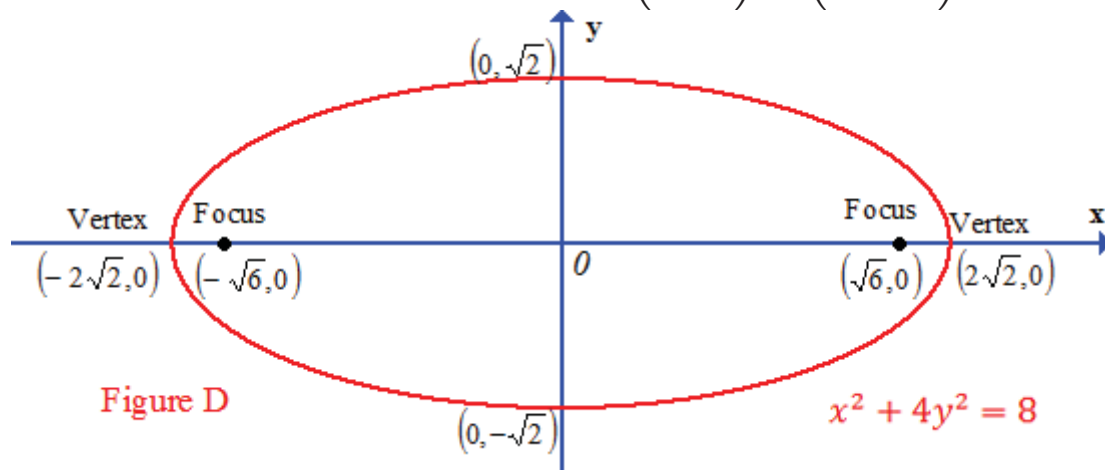
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

چون $8 > 2$ است، پس معادله داده شده به شکل شماره (۵) است، با $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و

$b = \sqrt{2}$. لذا کانون ها روی محور x هستند. برای پیدا کردن مختصات کانون ها داریم.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}$$

پس کانون ها نقاط $(\sqrt{6}, 0)$ و $(-\sqrt{6}, 0)$ هستند. نمودار در تصویر D ملاحظه می کنید.



مثال ۲- بیضی زیر را رسم کنید. و کانون ها و راس های آنرا مشخص کنید.

$$3x^2 + y^2 = 3$$

پاسخ

طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$$

این بیضی شکل فرمول شماره (۶) است، با $a = \sqrt{3}$ و $b = 1$. پس کانون ها و محور بزرگ تر روی محور y قرار دارند. چون $a = \sqrt{3}$ است، پس راس ها $(0, \sqrt{3})$ و $(0, -\sqrt{3})$ هستند و چون

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$$

پس کانون ها $(0, \sqrt{2})$ و $(0, -\sqrt{2})$ هستند. نمودار بیضی در تصویر E ملاحظه می کنید.

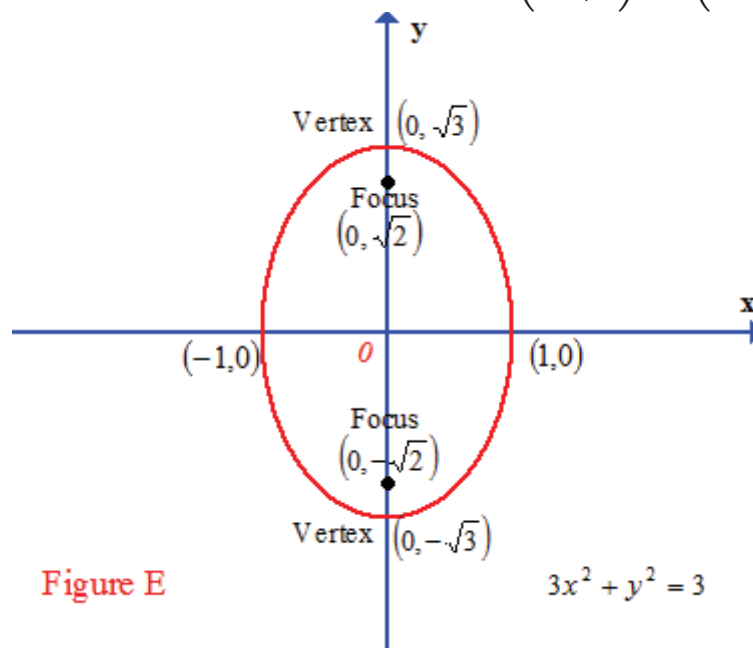
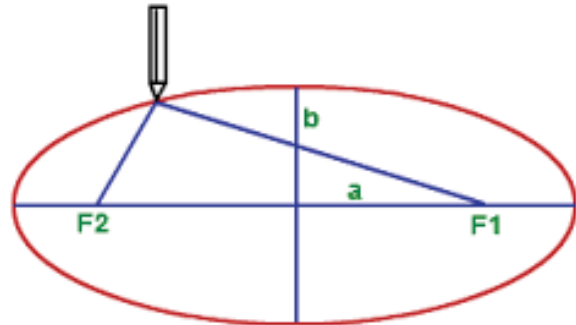
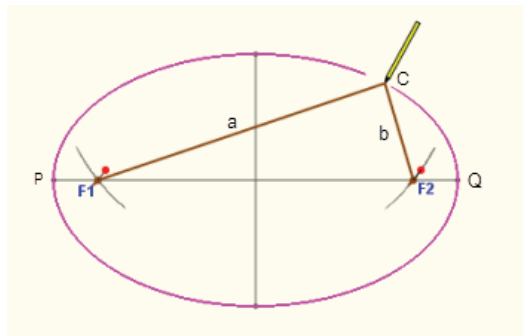


Figure E

اگر کانون ها و طول محور بزرگ تر یعنی $2a$ معلوم باشد، می توان فوراً بیضی را رسم کنیم. برای این کار یک میخ یا چیزی شبیه آن روی هر کدام از کانون ها بگذارید سپس هر دو انتهای یک ریسمان به طول $2a$ به میخ ها گره بزنید و سپس یک مداد را به ریسمان متصل کنید و آنرا کاملاً بکشید و روی کاغذ بچرخانید. تصویر F

تصویر F



جابجایی بیضی ها Translation of Ellipses

هنگامی که بیضی در مکان متعارف نیست ، باز هم می توانیم یک معادله برای آن بدست آوریم. برای این کار ، مشخصات مرکز و دیگر نقاط لازم را بدست می آوریم و سپس محور های مختصات را تغییر مکان می دهیم.

مثال ۳ - یک معادله برای یک بیضی پیدا کنید که کانون های آن $(2, -1)$ و $(2, 7)$ و طول محور بزرگ تر آن ۱۲ باشد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

پاسخ

چون کانون ها $(2, 7)$ و $(2, -1)$ روی محور بزرگ تر قرار دارند ، پس محور بزرگ تر روی خط $x = 2$ قرار دارد. مرکز بیضی وسط دو کانون است و لذا نقطه $(2, 3)$ مرکز بیضی است. در سیستم XY با مبدا $(2, 3)$ ، بیضی در مکان متعارف است با محور بزرگ تر ، روی محور Y . پس معادله شکل زیر را دارد.

$$\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$$

چون براساس فرض مساله ، طول محور بزرگ تر ۱۲ است ، پس بر اساس (7) داریم $2a = 12$ و یا $a = 6$. چون فاصله بین دو کانون ۸ است ، بر اساس (9) نتیجه می گیریم $2c = 8$ و یا $c = 4$. در نتیجه بر اساس (6) داریم

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$$

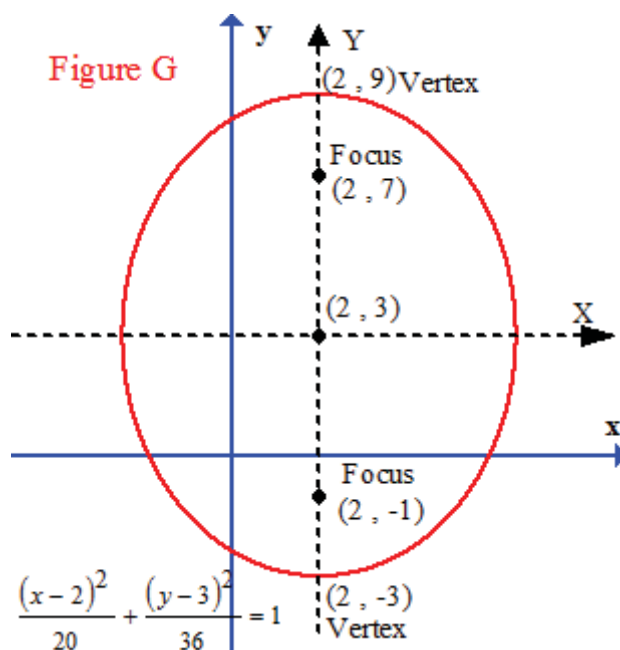
لذا معادله بیضی در سیستم XY مطابق زیر است.

$$\frac{X^2}{20} + \frac{Y^2}{36} = 1$$

این یعنی در سیستم xy معادله بیضی مطابق زیر است.

$$\frac{(x - 2)^2}{20} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1$$

نمودار بیضی در تصویر G ملاحظه می کنید.



یک معادله به شکل زیر

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

که در آن A و C یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند، پس $AC > 0$ است، معادله یک بیضی است. می توانیم مرکز، راس ها و کانون های بیضی را با کامل کردن مربع ها و تغییر مکان محور های مختصات بدست آوریم.

مثال ۴ - نشان دهید که معادله زیر، معادله یک بیضی است، آنرا راسم کنید.

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y = 11$$

پاسخ

با کامل کردن مربع ها، داریم.

$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 9 + 16 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

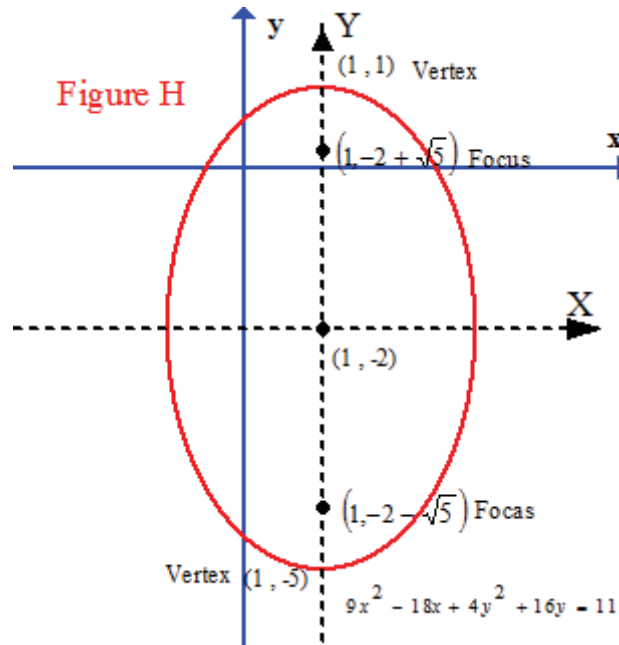
در سیستم XY با مبدا $(1, -2)$ معادله به صورت زیر است.

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$$

این معادله یک بیضی است با راس های $(0, 3)$ و $(0, -3)$ و کانون های $(0, \sqrt{5})$ و $(0, -\sqrt{5})$

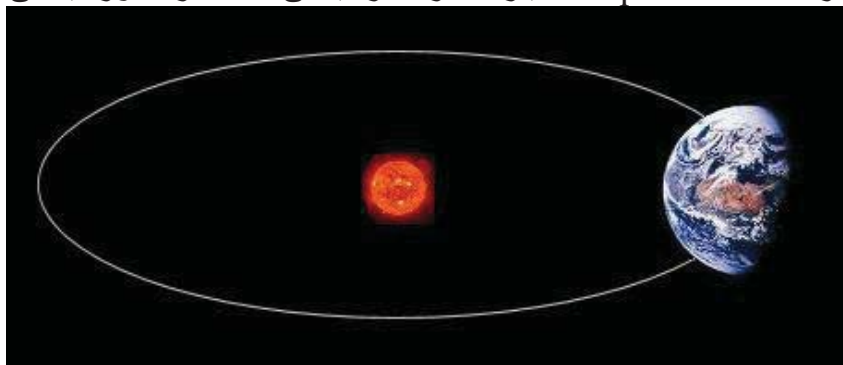
$(0, -\sqrt{5})$ در سیستم XY . لذا در سیستم xy مرکز بیضی $(1, -2)$ ، راس ها $(1, -5)$ و

$(1, 1)$ و کانون ها $(1, -2 + \sqrt{5})$ و $(1, -2 - \sqrt{5})$ است. نمودار بیضی در تصویر H ملاحظه می کنید.



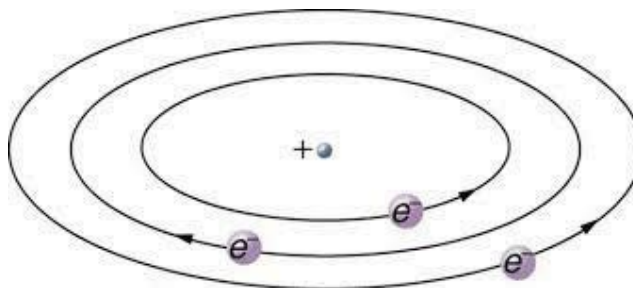
کاربرد های بیضی Applications of Ellipses

۱ - طبق قانون کپلر 's Law سیارات در مدار بیضی شکل گرد خورشید می چرخند.



Earth revolving around the sun

۲ - الکترون ها در مدار های بیضی شکل اطراف هسته می چرخند.



۳ - در معماری کاربرد دارد.



Bridge with elliptical

تمرینات ۲.۲

در تمرینات زیر معادله بیضی با خصوصیات داده شده بنویسید و سپس آنرا راسم کنید.

- ۱ - کانون ها $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ و راس ها $(3, 0)$ و $(-3, 0)$ هستند.
 - ۲ - کانون ها $(2, 1)$ و $(2, -1)$ هستند و طول محور بزرگ تر ۴ است.
 - ۳ - کانون ها $(4, \pi)$ و $(-4, \pi)$ هستند و طول محور کوچک تر ۹ است.
 - ۴ - راس ها $(0, 16)$ و $(0, -16)$ هستند و بیضی از $(2\sqrt{3}, 4)$ می گذرد.
 - ۵ - کانون ها $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و راس ها $(-1, 0)$ و $(5, 0)$ هستند.
 - ۶ - مرکز $(6, 1)$ ، یکی از کانون ها $(3, 1)$ ، و یکی از راس ها $(10, 1)$ است.
 - ۷ - بیضی از نقاط $(-1, 1)$ و $(\frac{1}{3}, -2)$ عبور می کند و در مکان متعارف قرار دارد.
 - ۸ - محور بزرگ تر از $(3, -4)$ تا $(3, 4)$ امتداد دارد و بیضی از مبدا مختصات عبور می کند.
 - ۹ - محور کوچک تر از $(1, 0)$ تا $(5, 0)$ امتداد دارد و بیضی از نقطه $(4, 2\sqrt{3})$ عبور می کند.
- در تمرینات زیر کانون ها و راس های بیضی که معادله آن داده شده پیدا کنید.

$$۱۰) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$۱۱) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$$۱۲) \frac{x^2}{3} + y^2 = 3$$

$$۱۳) 4x^2 + y^2 = 1$$

$$۱۴) 25(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$$

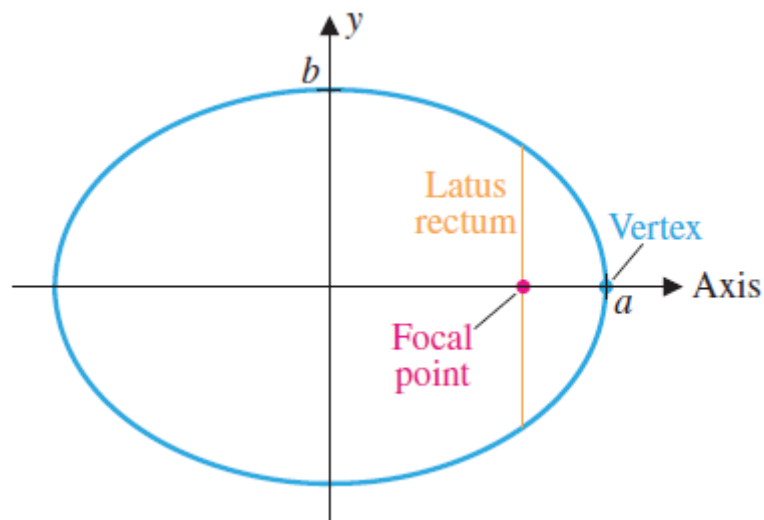
در تمرینات زیر نشان دهید که معادله دادن شده ، معادله یک بیضی است. آنرا رسم کنید ، و کانون ها ، مرکز و راس های آنرا مشخص کنید.

۱۵) $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = 1$

۱۶) $x^2 - 8x + 2y^2 + 12 = 0$

۱۷) $x^2 + 2x + 2y^2 + 4y = 1$

۱۸ - پاره خطی که از یکی از کانون های بیضی می گذرد و عمود بر محور بزرگ تر است و نقاط انتهایی آن روی بیضی قرار دارند وتر کانونی **Latus Rectum** نامیده می شود. نشان دهید که طول وتر کانونی بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مساوی است با $\frac{2b^2}{a}$ ، تصویر زیر وتر کانونی بیضی را نشان می دهد.

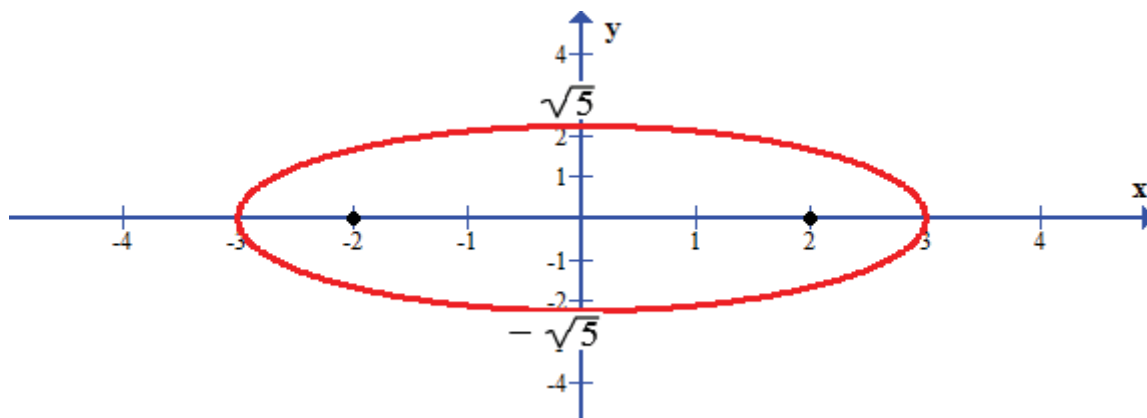


پاسخ تمرینات ۲.۲

در تمرینات زیر معادله بیضی با خصوصیات داده شده بنویسید و سپس آنرا رسم کنید.

۱ - کانون ها $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ و راس ها $(3, 0)$ و $(-3, 0)$ هستند.

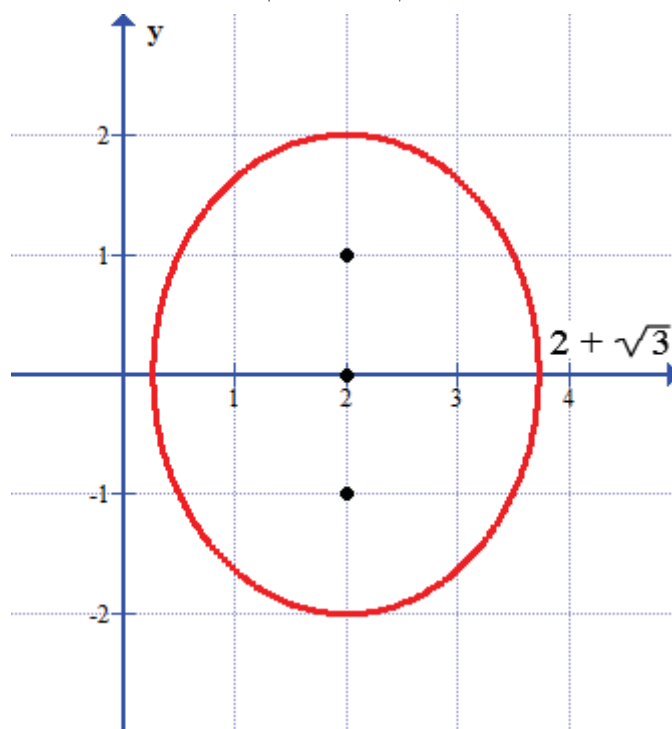
$$a = 3, c = 2, b = \sqrt{5}, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$



۲ - کانون ها $(2, 1)$ و $(2, -1)$ هستند و طول محور بزرگ تر ۴ است.

$$a = 2, c = 1, b = \sqrt{3}, \quad \text{مرکز } (2, 0)$$

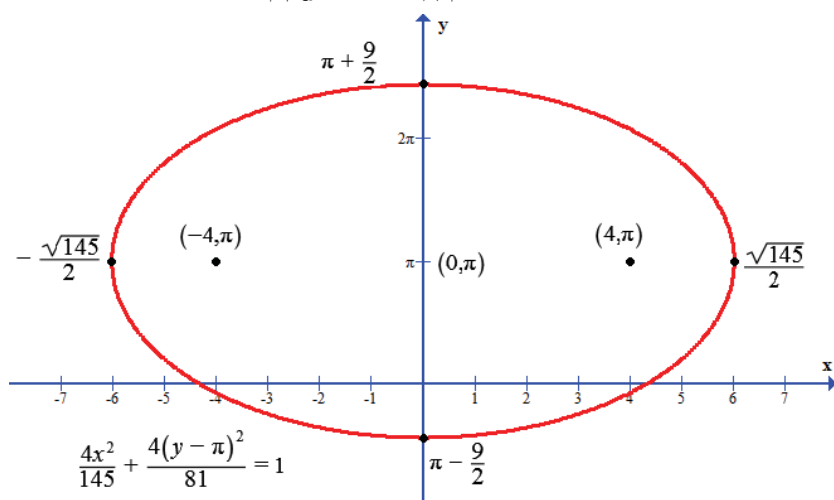
$$\frac{(x - 2)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$



۳ - کانون ها $(-4, \pi)$ و $(4, \pi)$ هستند و طول محور کوچک تر ۹ است.

$$\text{مرکز } (0, \pi), \quad b = \frac{9}{2}, \quad c = 4, \quad a = \sqrt{\frac{81}{4} + 16} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\frac{4x^2}{145} + \frac{4(y - \pi)^2}{81} = 1$$



۴- راس ها $(0, 16)$ و $(0, -16)$ هستند و بیضی از $(2\sqrt{3}, 4)$ می گذرد.

$$a = 16, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{256} = 1$$

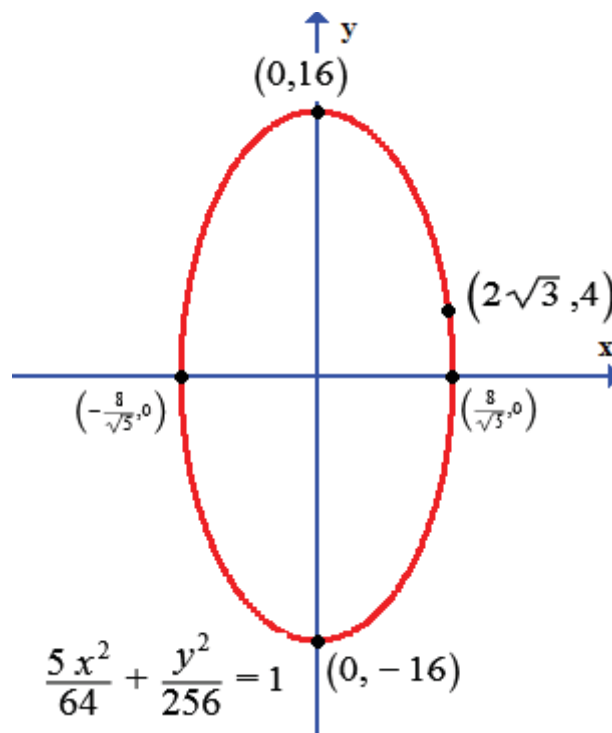
چون $(2\sqrt{3}, 4)$ روی بیضی قرار دارد، پس می توان نوشت.

$$\frac{12}{b^2} + \frac{16}{256} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{12}{b^2} = \frac{15}{16}$$

$$b^2 = 12 \left(\frac{16}{15} \right) = \frac{64}{5}$$

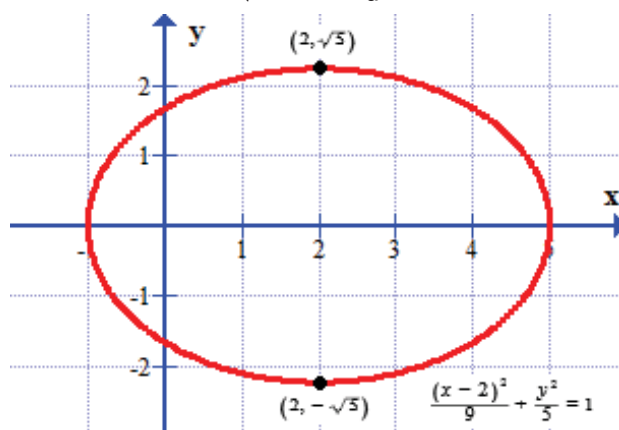
پس معادله بیضی می شود

$$\frac{5x^2}{64} + \frac{y^2}{256} = 1$$



۵ - کانون ها $(0,0)$ و $(4,0)$ و راس ها $(-1,0)$ و $(5,0)$ هستند.
 $a = 3$ ، $c = 2$ ، $b = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ مرکز $(2,0)$

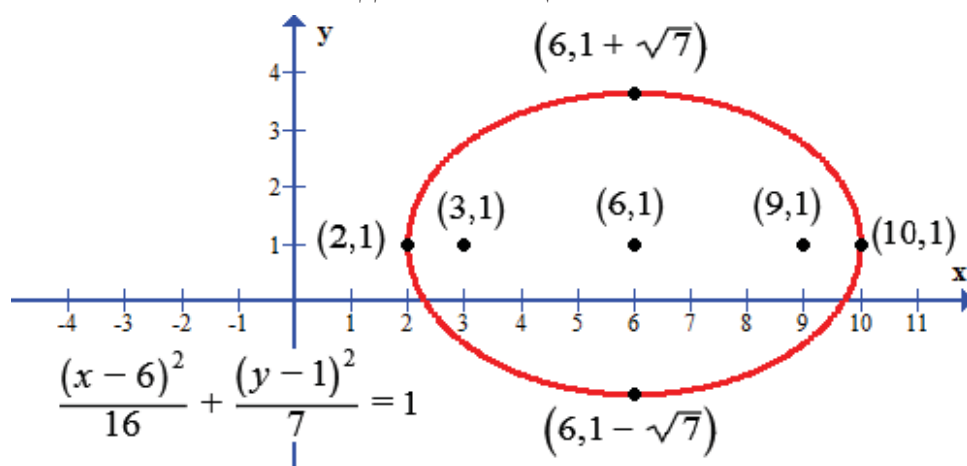
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$



۶ - مرکز $(6, 1)$ ، یکی از کانون ها $(3, 1)$ ، و یکی از راس ها $(1, 1)$ است.

$$a = 4 \quad , \quad c = 3 \quad , \quad b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$



۷ - بیضی از نقاط $(-1, 1)$ و $(\frac{1}{4}, -2)$ عبور می کند و در مکان متعارف قرار دارد.

فرض می کنیم معادله بیضی $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ باشد. چون $(-1, 1)$ روی بیضی است، پس می توان

نوشت $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 1$ و چون $(\frac{1}{4}, -2)$ روی بیضی است، پس می توان نوشت

$$\frac{1}{4p^2} + \frac{4}{q^2} = 1$$

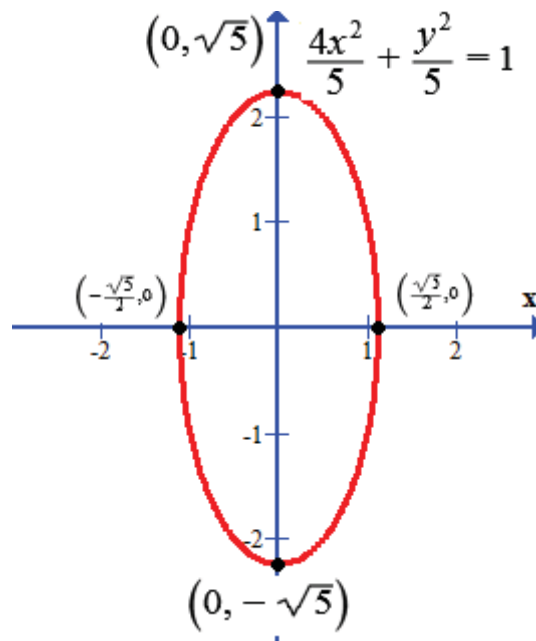
$$\frac{1}{p^2} = 4 - \frac{16}{q^2}$$

پس داریم

$$1 - \frac{1}{q^2} = \frac{1}{p^2} = 4 - \frac{16}{q^2}$$

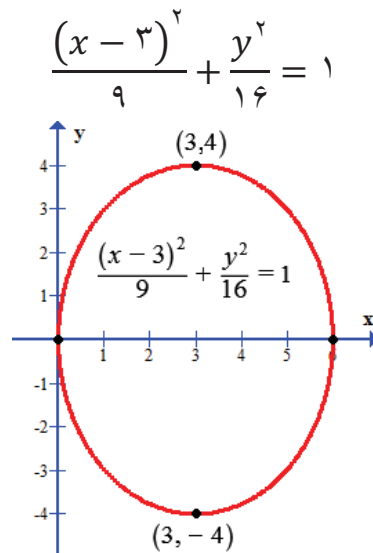
پس $\frac{15}{q^2} = 3$ است، لذا $q = \sqrt{5}$ است و در نتیجه $p = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است. معادله بیضی مطابق زیر است.

$$\frac{4x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1$$



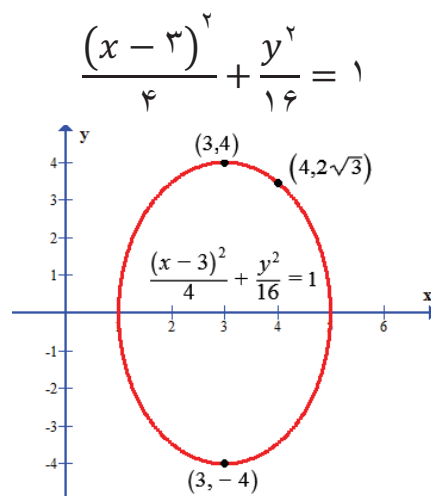
۸ - محور بزرگ تر از $(3, -4)$ تا $(3, 4)$ امتداد دارد و بیضی از مبدا مختصات عبور می کند.
 $a = 4$ ، مرکز $(3, 0)$

یک معادله بیضی به شکل $\frac{(x-3)^2}{b^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ است. و چون $(0,0)$ روی بیضی است ، پس داریم
 $\frac{9}{b^2} + \frac{0}{16} = 1$ است. لذا $b = 3$ است. و معادله بیضی مطابق زیر است.



۹ - محور کوچک تر از $(1, 0)$ تا $(5, 0)$ امتداد دارد و بیضی از نقطه $(4, 2\sqrt{3})$ عبور می کند.
 $b = 2$ ، مرکز $(3, 0)$

یک معادله بیضی، به شکل $\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ است. چون $(4, 2\sqrt{3})$ روی بیضی قرار دارد ، پس داریم $\frac{1}{a^2} + \frac{12}{4} = 1$ لذا $a = 4$ است و معادله بیضی به شکل زیر است.



در تمرینات زیر کانون ها و راس های بیضی که معادله آن داده شده پیدا کنید.

$$۱۰) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = ۱$$

$$a = ۵, b = ۳, c = \sqrt{25 - 9} = ۴$$

$(0, ۵)$ و $(0, -۵)$ راس ها ، $(0, ۴)$ و $(0, -۴)$ کانون ها

$$۱۱) \frac{x^2}{۶۴} + \frac{y^2}{۴۹} = ۱$$

$$a = ۸, b = ۷, c = \sqrt{۶۴ - ۴۹} = \sqrt{۱۵}$$

$(۸, 0)$ و $(-۸, 0)$ راس ها ، $(\sqrt{۱۵}, 0)$ و $(-\sqrt{۱۵}, 0)$ کانون ها

$$۱۲) \frac{x^2}{۳} + y^2 = ۳$$

معادله به صورت زیر است.

$$\frac{x^2}{۹} + \frac{y^2}{۳} = ۱$$

پس

$$a = ۳, b = \sqrt{۳}, c = \sqrt{۹ - ۳} = \sqrt{۶}$$

$(۳, 0)$ و $(-۳, 0)$ راس ها ، $(\sqrt{۶}, 0)$ و $(-\sqrt{۶}, 0)$ کانون ها

$$۱۳) ۴x^2 + y^2 = ۱$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1} = ۱$$

$$a = ۱, b = \frac{1}{2}, c = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(0, ۱)$ و $(0, -۱)$ راس ها ، $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ کانون ها

$$۱۴) \quad ۲۵(x+۱)^2 + (y-۳)^2 = ۱$$

$$\frac{(x+۱)^2}{\frac{۱}{۲۵}} + \frac{(y-۳)^2}{۱} = ۱$$

$$a = ۱, \quad b = \frac{۱}{۵}, \quad c = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۲۵}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

در تمرینات زیر نشان دهید که معادله دادن شده، معادله یک بیضی است. آنرا رسم کنید، و کانون ها، مرکز و راس های آنرا مشخص کنید.

$$۱۵) \quad x^2 + ۲y^2 - ۲x - ۴y = ۱$$

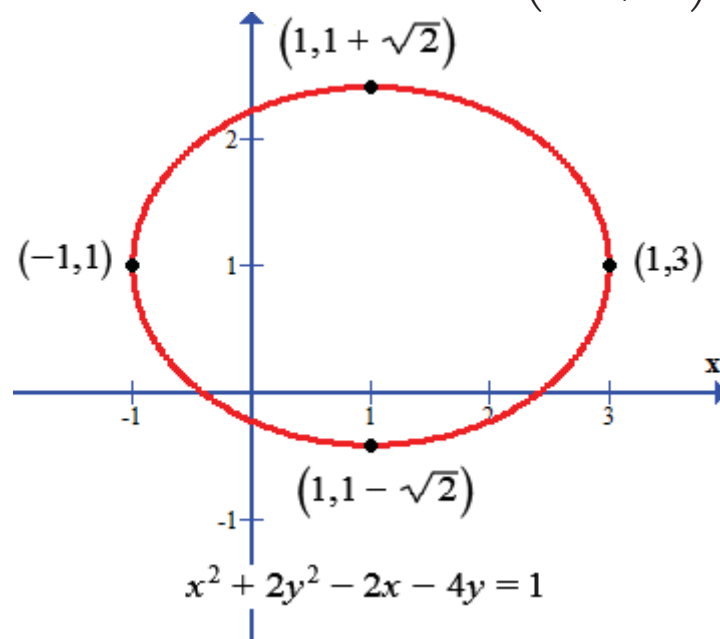
$$(x^2 - ۲x + ۱) + ۲(y^2 - ۲y + ۱) = ۴$$

$$(x-۱)^2 + ۲(y-۱)^2 = ۴$$

$$\frac{(x-۱)^2}{۴} + \frac{(y-۱)^2}{۲} = ۱$$

$$a = ۲, \quad b = \sqrt{۲}, \quad c = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲}$$

کانون ها، $(۱ - \sqrt{۲}, ۱)$ و $(۱ + \sqrt{۲}, ۱)$ ، راس ها، $(-۱, ۱)$ و $(۳, ۱)$ ، مرکز $(۱, ۱)$



$$۱۶) x^2 - 8x + 2y^2 + 12 = 0$$

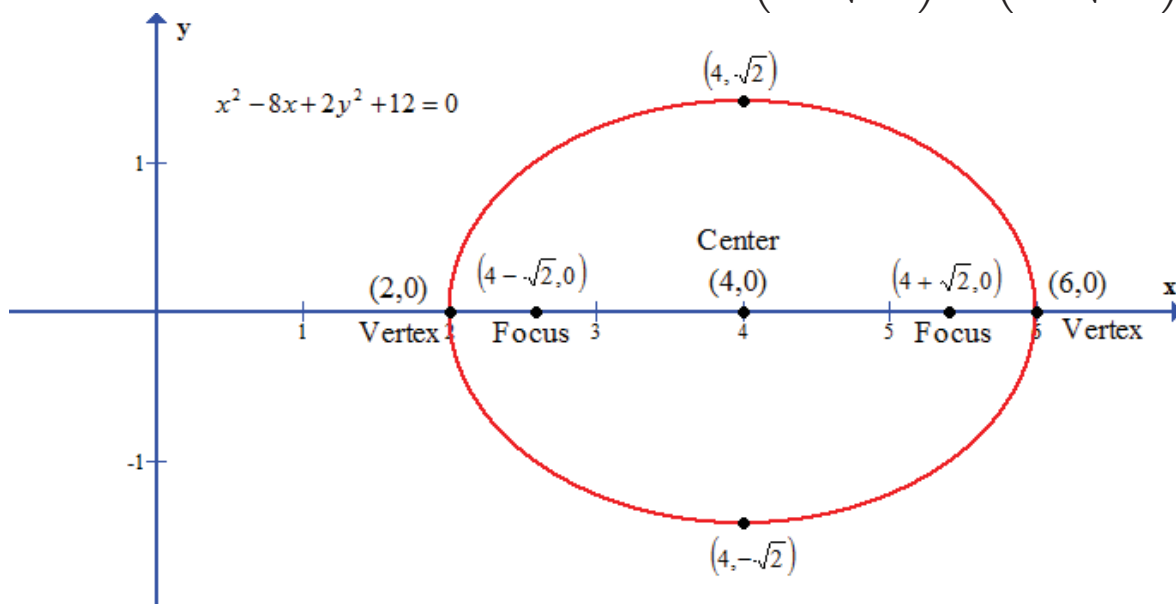
$$(x^2 - 8x + 16) + 2y^2 = 16 - 12 = 4$$

$$(x - 4)^2 + 2y^2 = 4$$

$$\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

مرکز $(4, 0)$ ، کانون ها $(4 - \sqrt{2}, 0)$ و $(4 + \sqrt{2}, 0)$ ، راس ها $(2, 0)$ و $(6, 0)$



$$۱۷) x^2 + 2x + 2y^2 + 4y = 1$$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) = 4$$

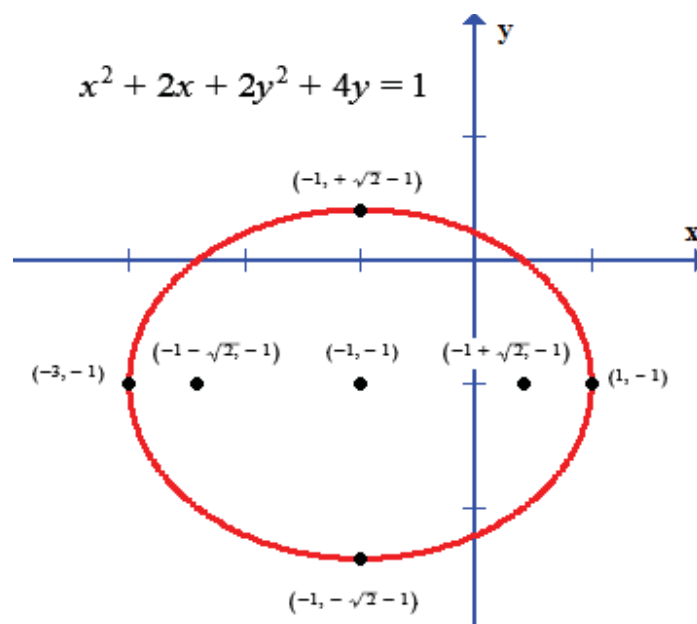
$$(x + 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 4$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{2} = 1$$

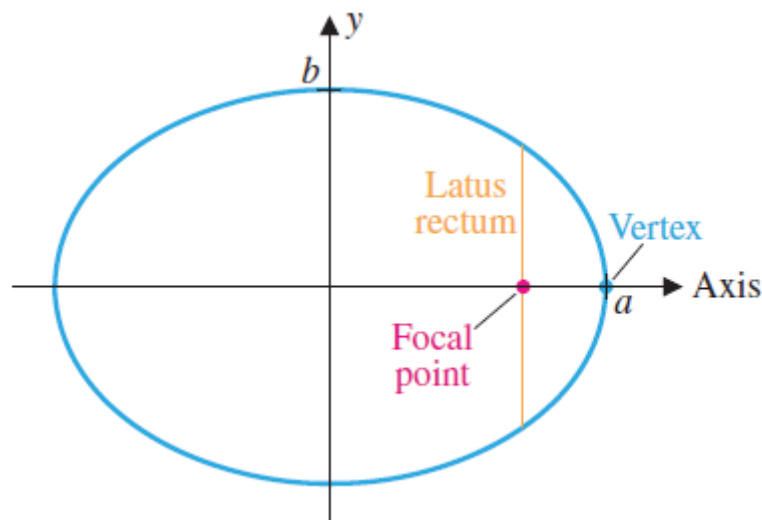
$$a = 2, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

مرکز $(-1, -1)$ ، راس ها $(-3, -1)$ و $(1, -1)$

، کانون ها $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ و $(-1 + \sqrt{2}, -1)$



۱۸ - پاره خطی که از یکی از کانون های بیضی می گذرد و عمود بر محور بزرگ تر است و نقاط انتهایی آن روی بیضی قرار دارند وتر کانونی **Latus Rectum** نامیده می شود. نشان دهید که طول وتر کانونی بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مساوی است با $\frac{2b^2}{a}$ ، تصویر زیر وتر کانونی بیضی را نشان می دهد.



فرض می کنیم (c, y) روی بیضی باشد. اگر $y > 0$ باشد ، پس

$$y = b \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a}$$

اما اگر $y < 0$ باشد ، پس

$$y = -b \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = -\frac{b^2}{a}$$

لذا طول وتر کانونی مطابق زیر بدست می آید.

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

۲.۳ - هذلولی The Hyperbola

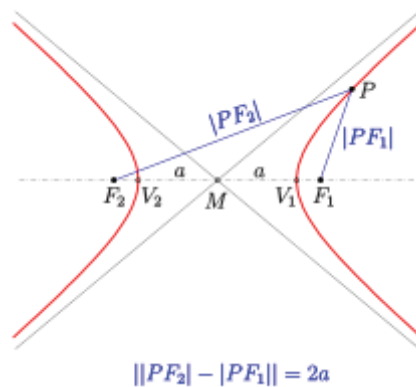
تعریف Definition

فرض می کنیم P_1 و P_2 دو نقطه متمایز روی صفحه باشد، و فرض می کنیم k یک عدد مثبت کوچک تر از فاصله بین P_1 و P_2 باشد. پس مجموعه تمام نقاط P روی صفحه بطوری

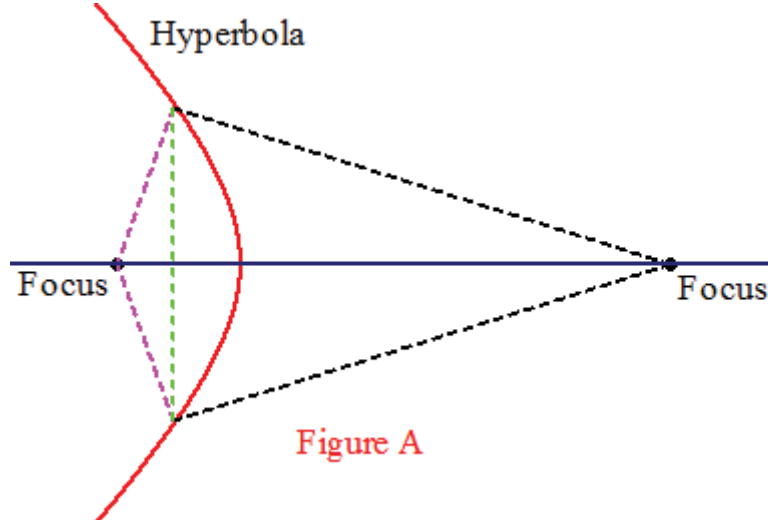
$$||P_1P| - |P_2P|| = k$$

باشد، هذلولی نامیده می شود. نقاط P_1 و P_2 کانون های **Foci** هذلولی نامیده می شوند

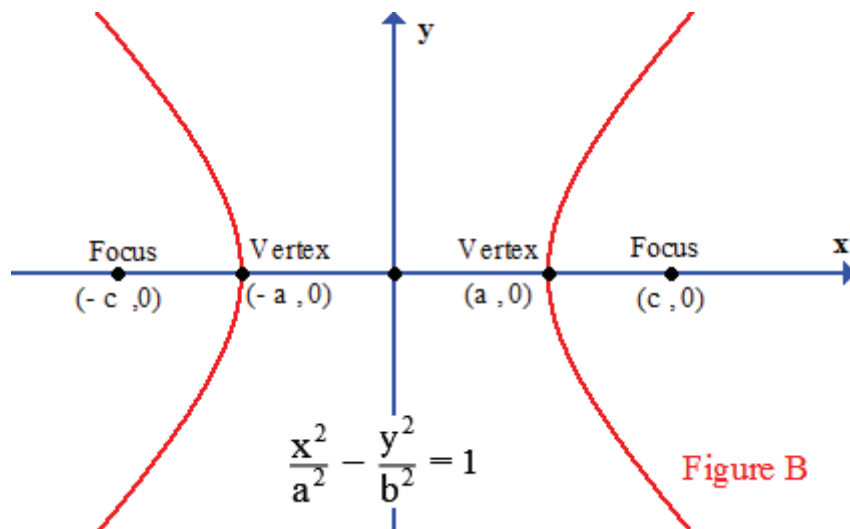
به عبارت دیگر یک هذلولی عبارت است از یک مجموعه نقاط، بطوری که برای هر نقطه P در این مجموعه، قدر مطلق تفاضل فواصل $|PF_1|$ ، $|PF_2|$ نسبت به دو نقطه ثابت F_1 ، F_2 مقداری است ثابت، F_1 ، F_2 کانون های هذلولی نامیده می شوند. تصویر زیر، در تصویر زیر $2a$ فاصله بین دو راس هذلولی است.



هذلولی هم مانند بیضی نسبت به خطی که از دو کانون می گذرد، قرینه است. تصویر A.



این خط محور اصلی **Principal Axis** هذلولی است و نقطه میانی بین دو کانون، مرکز **Center** هذلولی است. تصویر B.



نقاط بر خورد هذلولی و محور اصلی را راس های **Vertices** هذلولی ، و پاره خط بین دو راس را **محور کانونی Transverse Axis** هذلولی می نامند. می گوئیم هذلولی در **مکان متعارف Standard Position** است اگر مرکز آن روی مبدا مختصات و کانون ها یا روی محور x و یا روی محور y باشد.

هذلولی ها در مکان متعارف Hyperbolas in Standard Position

فرض می کنیم کانون های یک هذلولی در مکان متعارف ، در نقاط $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ قرار داشته باشند و $c > 0$ باشد. بطوری که فاصله بین دو کانون $2c$ است. اگر فرض کنیم $k = 2a$ باشد ، پس بر اساس فرض که کردیم ، $2a = k < 2c$ است ، بطوری که $a < c$ خواهد بود. بر اساس تعریف ، یک نقطه (x, y) روی هذلولی است اگر فقط و فقط

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

باشد. با انجام عملیات جبری همانند آنچه در مورد بیضی انجام دادیم ، می توانیم معادله بالا را تغییر دهیم و یک معادله برای هذلولی مطابق زیر پیدا کنیم.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

با توجه به معادله شماره (۱) ملاحظه می شود که این هذلولی محور y را قطع نمی کند. و محل تلاقی آن با محور x نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ است. علاوه بر این $|x| \geq a$ است برای هر نقطه (x, y) روی هذلولی ، و هذلولی نسبت به محور های مختصات و مبدا مختصات قرینه است. برای $y > 0$ داریم.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$$

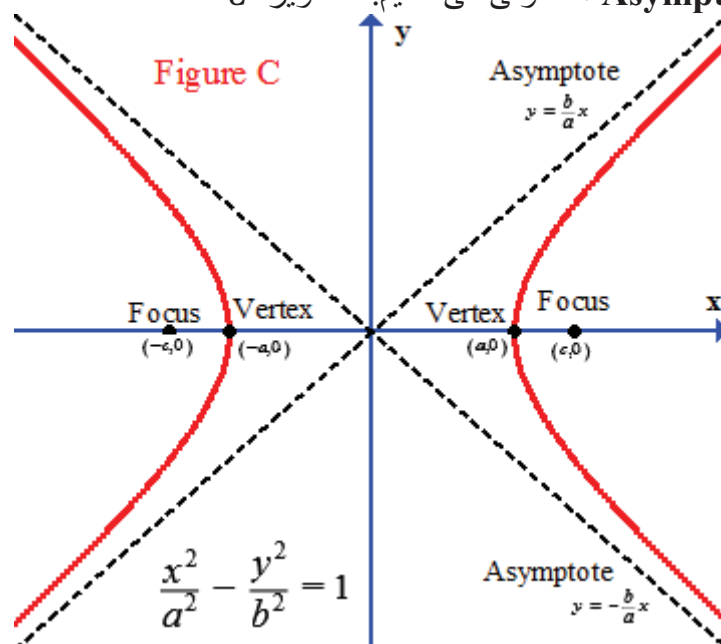
پس آن قسمت از هذلولی که برای آن $y > 0$ است، تعقر به طرف پایین دارد. برای رسم دقیق آن قسمت از هذلولی که دور از مرکز قرار دارد، با استفاده از فرمول (۲) و مثال ۳ بخش ۳.۷ مبحث حد در بینهایت کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم، نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{b}{a}x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) = 0$$

است. این یعنی هذلولی به خط $y = \left(\frac{b}{a}\right)x$ نزدیک می شود هنگامی که x به بی نهایت نزدیک می شود. چون هذلولی نسبت به محور x قرینه است، پس هذلولی به خط $y = -\left(\frac{b}{a}\right)x$ هم نزدیک می شود. ما خط های

$$y = \frac{b}{a}x \text{ و } y = -\frac{b}{a}x \quad (۳)$$

را خطوط مجانب Asymptotes هذلولی می نامیم. تصویر C

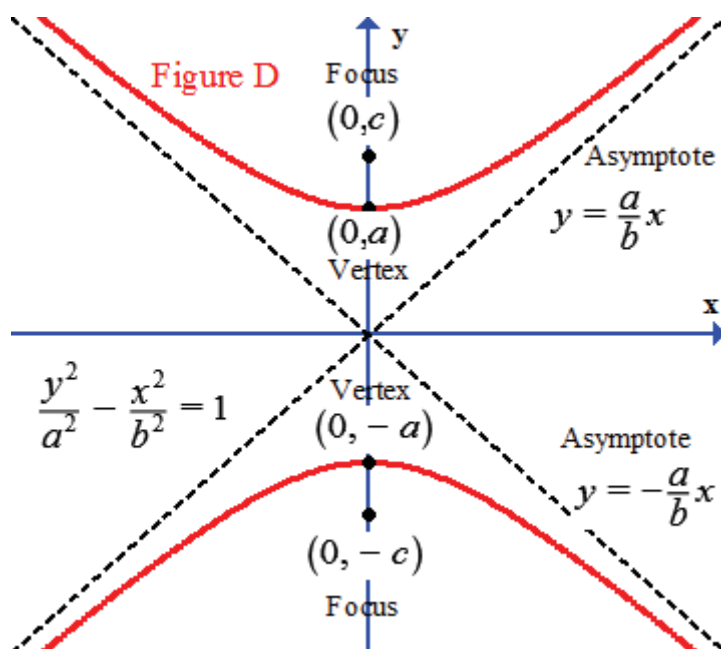


حالا فرض کنید کانون های هذلولی در نقاط $(0, c)$ و $(0, -c)$ روی محور y قرار داشته باشند. و باز فرض می کنیم $k = 2a$ باشد. پس معادله هذلولی می شود

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (۴)$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (۵)$$

در این حالت خطوط مجانب خطوط $y = \frac{a}{b}x$ و $y = -\frac{a}{b}x$ هستند. تصویر D



در زیر مثال شماره ۳ بخش ۳.۷ کتاب حساب دیفرانسیل آرمان برای یاد آوری ذکر می کنیم.

مثال ۳- فرض کنید $a > 0$ باشد. نصیح دهید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = 0$$

است.

پاسخ

ابتدا عبارت داخل پرانتز را باز نویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} - x &= (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{\frac{-a^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

چون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-a^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1} = \frac{0}{\sqrt{1 - 0} + 1} = 0$$

است، پس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = 0$$

در ذیل دو شکل معادله هذلولی در مکان متعارف ملاحظه می کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{کانون ها } (c, 0) \text{ و } (-c, 0), \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{راس ها } (a, 0) \text{ و } (-a, 0) \\ \text{خطوط جانبی } y = \frac{b}{a}x \text{ و } y = -\frac{b}{a}x \\ \text{قرینه نسبت به محورهای مختصات و مبدا مختصات} \end{array} \right. \quad (۶)$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{کانون ها } (0, c) \text{ و } (0, -c), \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{راس ها } (0, a) \text{ و } (0, -a) \\ \text{خطوط جانبی } y = \frac{a}{b}x \text{ و } y = -\frac{a}{b}x \\ \text{قرینه نسبت به محورهای مختصات و مبدا مختصات} \end{array} \right. \quad (۷)$$

اعداد a و c تفسیر های هندسی زیر را دارند.

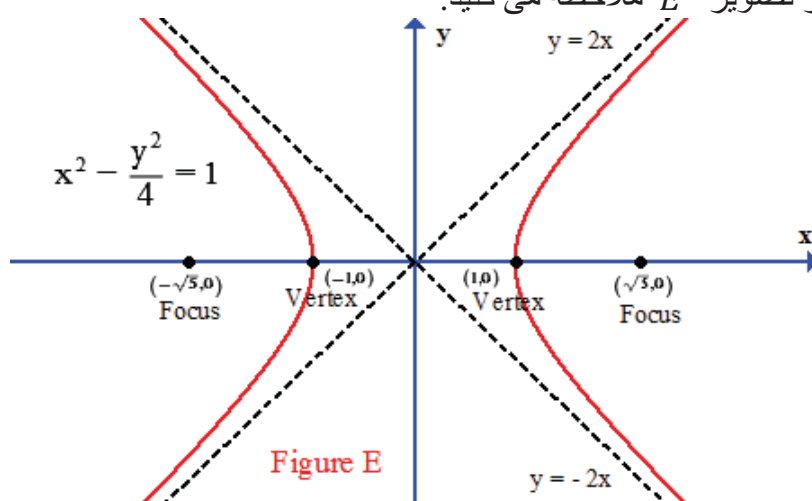
$$\left. \begin{array}{l} 2a = \text{طول محور کانونی} \\ 2c = \text{فاصله بین کانون ها} \end{array} \right\} \quad (۸)$$

مثال ۱ - کانون ها و خطوط مجانب هذلولی زیر را پیدا کنید. و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

پاسخ

معادله، شکل شماره (۶) است، با $a = 1$ و $b = 2$. لذا $c = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. در نتیجه کانون ها $(\sqrt{5}, 0)$ و $(-\sqrt{5}, 0)$ هستند. علاوه بر این خطوط مجانب $y = 2x$ و $y = -2x$ هستند. نمودار هذکولی در تصویر E ملاحظه می کنید.



مثال ۲ - کانون ها و خطوط مجانب هذلولی زیر را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا راسم کنید.

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

پاسخ

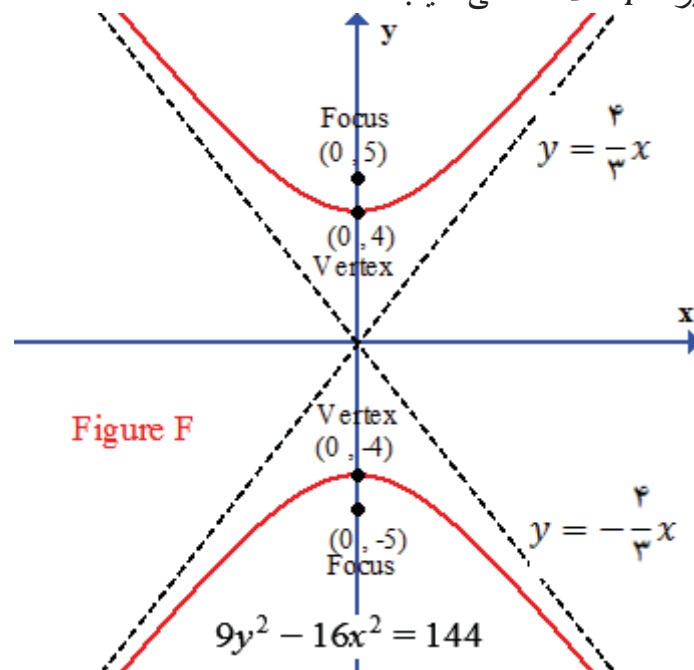
طرفین معادله را بر ۱۴۴ تقسیم می کنیم.

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

معادله بدست آماده به شکل شماره (۷) است، با $a = 4$ و $b = 3$. لذا $c = \sqrt{16 + 9} = 5$.

بنا بر این، کانون ها $(0, 5)$ و $(0, -5)$ هستند و خطوط مجانب $y = \frac{4}{3}x$ و $y = -\frac{4}{3}x$

هستند. نمودار در تصویر F ملاحظه می کنید.



مثال ۳ - یک مدادله برای هذلولی پیدا کنید که کانون های آن $(-2, 9)$ و $(-2, -1)$ و طول محور کانونی آن ۶ باشد. سپس نمودار آنرا راسم کنید.

پاسخ

محور اصلی $x = -2$ و مرکز هذلولی، یعنی نقطه میانی بین دو کانون $(-2, 4)$ است. چون فاصله بین دو کانون $2c$ است، پس $c = 5$ است. در سیستم XY با مبدا $(-2, 4)$ ، هذلولی در مکان متعارف است با کانون های $(0, 5)$ و $(0, -5)$ و با محور کانونی روی محور Y . در نتیجه معادله هذلولی در سیستم XY مطابق زیر است.

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$$

برای پیدا کردن a ملاحظه می کنید که محور کانونی دارای طول ۶ است، پس بر اساس (۸) داریم $2a = 6$ و یا $a = 3$ است. حالا b را پیدا می کنیم.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

در نتیجه معادله هذلولی در سیستم XY مطابق زیر است.

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{16} = 1$$

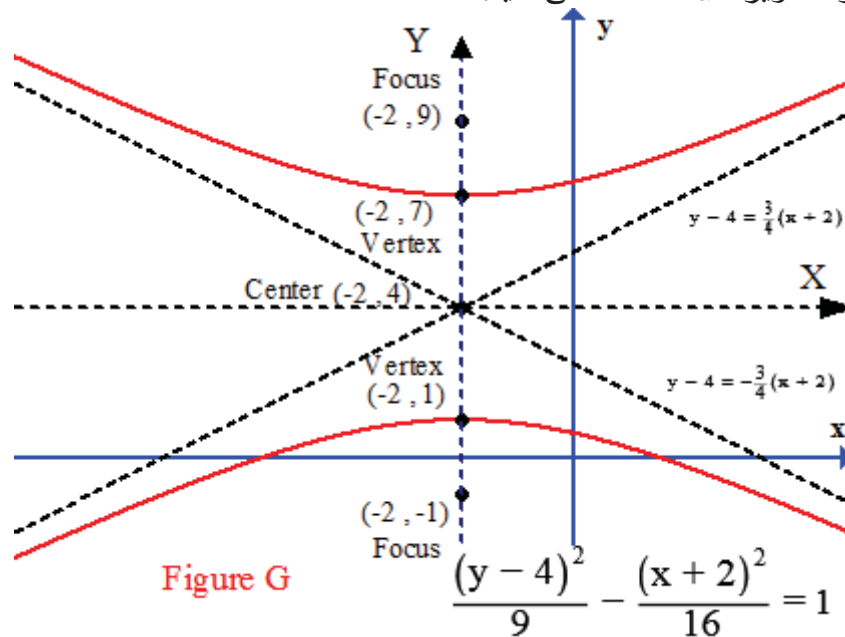
با خطوط مجانب $Y = \frac{3}{4}X$ و $Y = -\frac{3}{4}X$ معادله هذلولی در سیستم xy مطابق زیر است.

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

و خطوط مجانب در سیستم xy مطابق زیر است.

$$y-4 = \frac{3}{4}(x+2) \quad \text{و} \quad y-4 = -\frac{3}{4}(x+2)$$

نمودار هذلولی در تصویر G ملاحظه می کنید.



هر معادله ای به شکل

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

در صورتی که A و C علامت های مخالف داشته باشند، یعنی $AC < 0$ ، معادله یک هذلولی است. بعد از کامل کردن مربع ها و جا بجا کردن محور های مختصات، می توانیم هذلولی را رسم کنیم.

مثال ۴ - نشان دهید که

$$16x^2 - y^2 - 32x - 6y = 57$$

معادله یک هذلولی است و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

با کامل کردن مربع ها داریم.

$$16(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 6y + 9) = 57 + 16 - 9 = 64$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

پس معادله در سیستم XY با مبدا $(1, -3)$ مطابق زیر است.

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{64} = 1$$

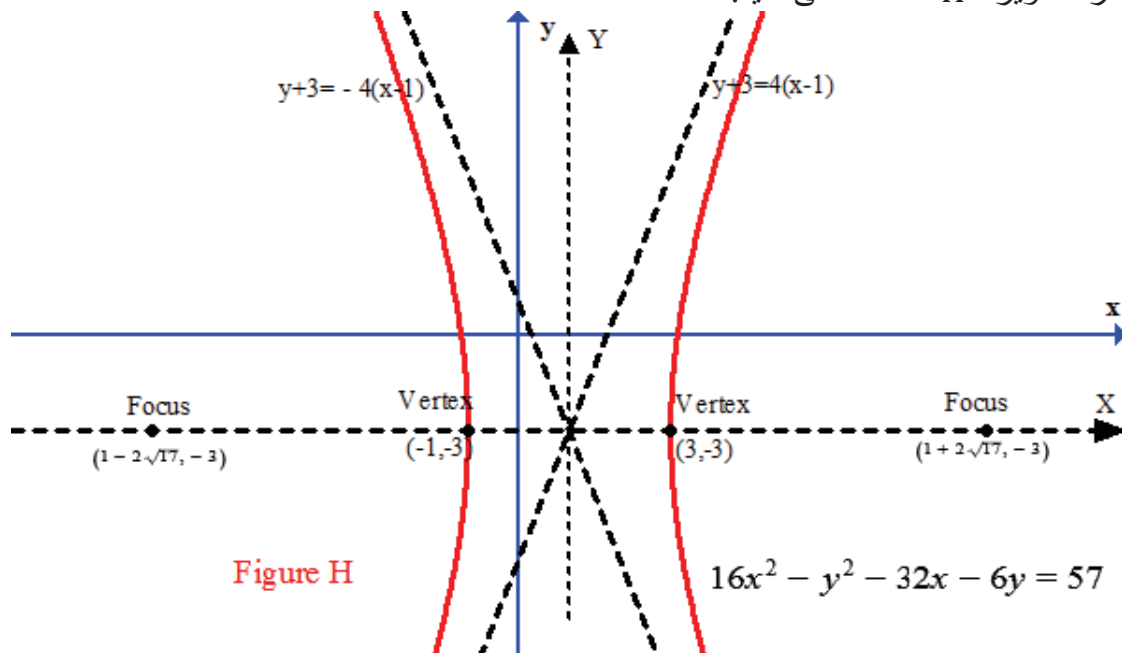
این معادله به شکل شماره (۶) است، با $a = 2$ و $b = 8$ و

$$c = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$$

پس معادله نمودار یک هذلولی است. کانون ها $(2\sqrt{17}, 0)$ و $(-2\sqrt{17}, 0)$ در سیستم XY .علاوه بر این خطوط مجانب $Y = 4X$ و $Y = -4X$ هستند. در سیستم xy داریم کانون ها

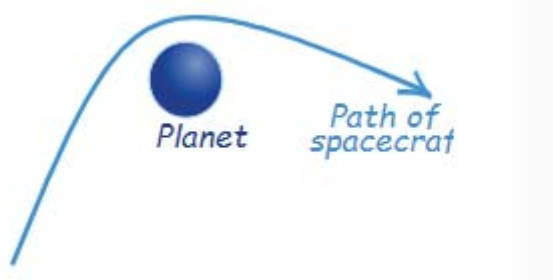
$$\left(1 + 2\sqrt{17}, -3\right) \text{ و } \left(1 - 2\sqrt{17}, -3\right) \text{ و خطوط مجانب عبارتند از}$$

$$y + 3 = 4(x - 1) \text{ و } y + 3 = -4(x - 1)$$

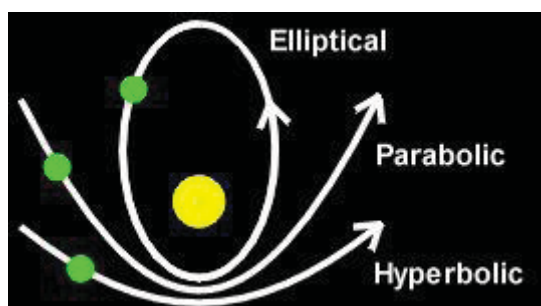
نمودار در تصویر H ملاحظه می کنید.

کاربرد های هذلولی Applications of Hyperbolas

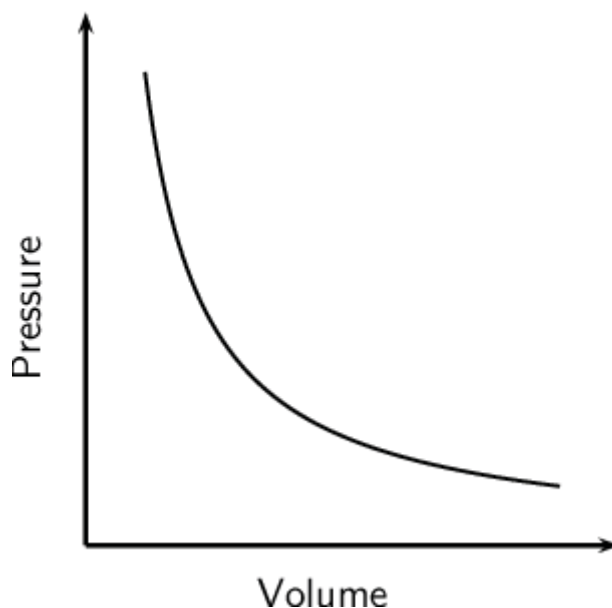
۱ - مسیر حرکت فضا پیما ها هذلولی شکل است.



۲ - هنگامی که یک سیاره شتاب می گیرد ، مسیر آن از بیضی شکل و سهمی شکل به طرف هذلولی شکل تغییر می کنند.



۳ - قانون بویل Boyle's law طبق قانون بویل حجم گاز و فشار آن رابطه عکس دارند و نمودار آن به شکل هذلولی است.



تمرینات ۲.۳

در تمرینات زیر معادله هذلولی با مشخصات داده شده پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

۱ - کانون ها $(9, 0)$ و $(-9, 0)$ و راس ها $(4, 0)$ و $(-4, 0)$ هستند.

۲ - کانون ها $(0, 1)$ و $(0, -1)$ و راس ها $(0, \frac{1}{3})$ و $(0, -\frac{1}{3})$ هستند.

۳ - کانون ها $(0, 5)$ و $(0, -5)$ هستند و طول محور کانونی ۶ است.

۴ - کانون ها $(0, 10)$ و $(0, -10)$ و خطوط مجانب $y = 3x$ و $y = -3x$ هستند.

۵ - کانون ها $(0, 9)$ و $(0, -1)$ و خطوط مجانب $y = \frac{4}{3}x + 4$ و $y = -\frac{4}{3}x + 4$ هستند.

۶ - هذلولی از نقاط $(\sqrt{20}, 8)$ و $(\sqrt{8}, 4)$ می گذرد و در مکان متعارف قرار دارد.

در تمرینات زیر کانون ها ، راس ها و خطوط مجانب هذلولی داده شده را پیدا کنید.

$$۷) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$۸) \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$$

$$۹) \quad y^2 - 9x^2 = 25$$

$$۱۰) \quad 4x^2 - y^2 = 25$$

$$۱۱) \quad \frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{144} = 1$$

در تمرینات زیر نشان دهید که معادله داده شده ، معادله یک هذلولی است. نمودار آنرا رسم کنید و مرکز و راس ها و خطوط مجانب را مشخص کنید.

$$۱۲) \quad x^2 - y^2 + 6x + 12y = 36$$

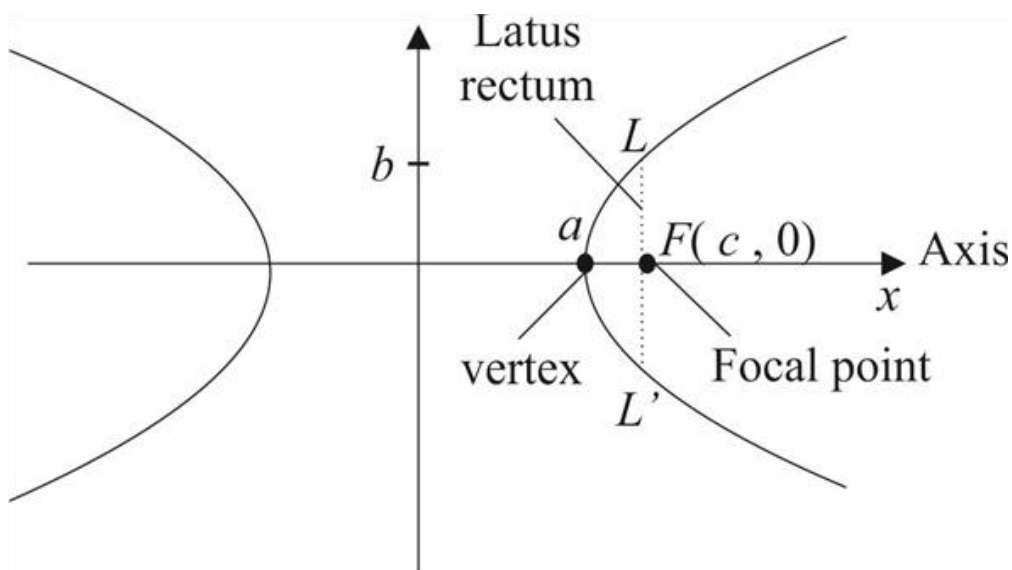
$$۱۳) \quad 4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68$$

$$۱۴) \quad x^2 + 2\sqrt{2}x - y^2 + 2\sqrt{2}y = 1$$

۱۵ - پاره خطی که از یک کانون هذلولی می گذرد و عمود بر محور اصلی است و دو نقطه انتهایی آن روی هذلولی است ، وتر کانونی **Latus Rectum** نامیده می شود. نشان دهید اگر معادله هذلولی مطابق زیر باشد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

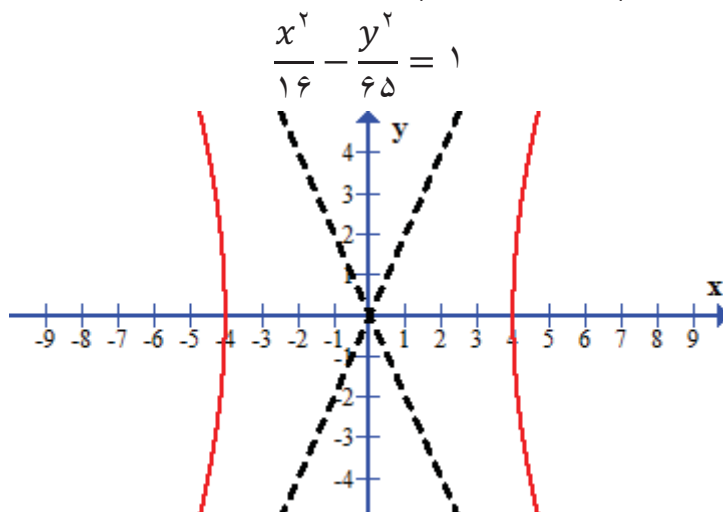
پس طول وتر کانونی $\frac{2b^2}{a}$ است.



پاسخ تمرینات ۲.۳

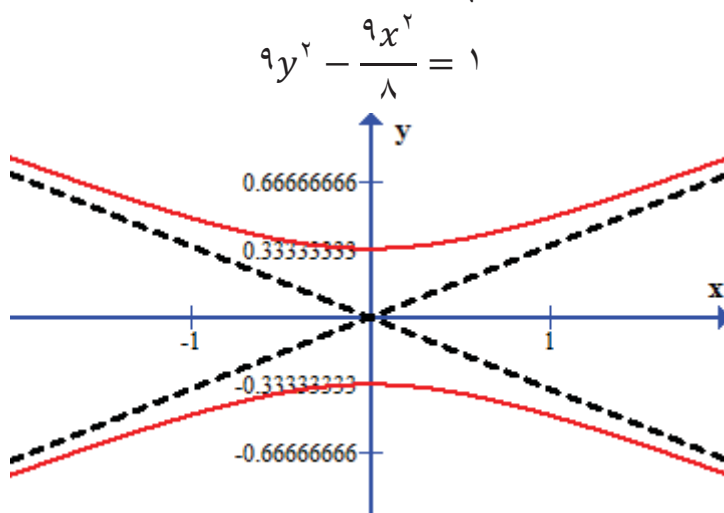
در تمرینات زیر معادله هذلولی با مشخصات داده شده پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.
 ۱ - کانون ها $(9, 0)$ و $(-9, 0)$ و راس ها $(4, 0)$ و $(-4, 0)$ هستند.

$$a = 4, c = 9, b = \sqrt{81 - 16} = \sqrt{65}$$



۲ - کانون ها $(0, 1)$ و $(0, -1)$ و راس ها $(0, \frac{1}{3})$ و $(0, -\frac{1}{3})$ هستند.

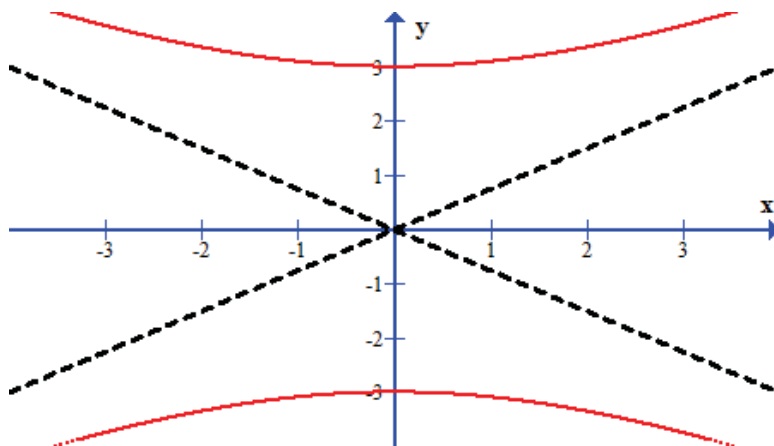
$$a = \frac{1}{3}, c = 1, b = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



۳ - کانون ها $(0, 5)$ و $(0, -5)$ هستند و طول محور کانونی ۶ است.

$$a = 3, c = 5, b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$



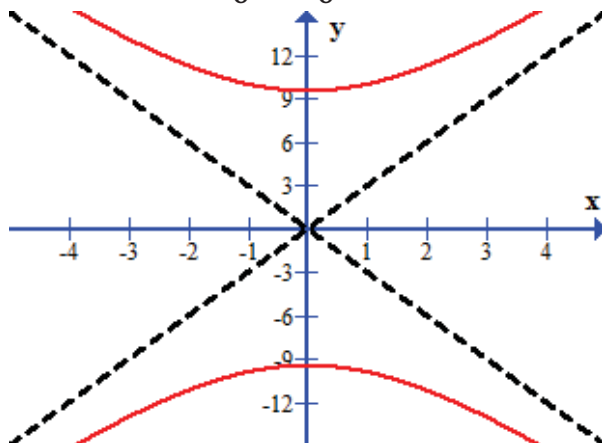
۴ - کانون ها $(0, 10)$ و $(0, -10)$ و خطوط مجانب $y = 3x$ و $y = -3x$ هستند.

چون $y = \pm 3x$ خطوط مجانب هستند پس داریم $\frac{a}{b} = 3$ و یا $a = 3b$.

از طرف دیگر داریم $c = 10$ پس $100 = c^2 = (3b)^2 + b^2 = 10b^2$ است، لذا $b = \sqrt{10}$

$$a = 3\sqrt{10} \text{ و}$$

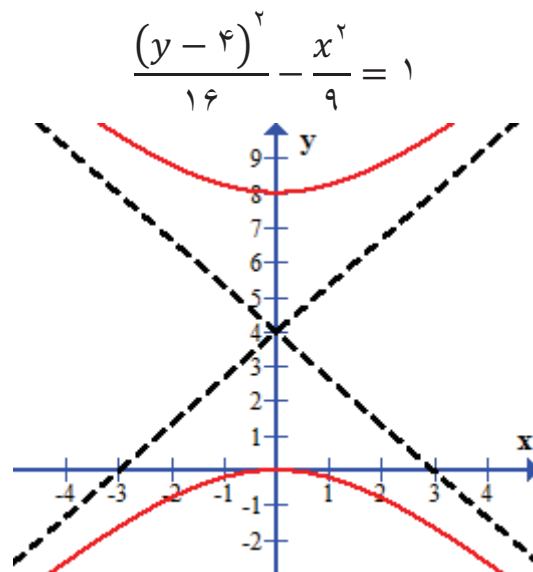
$$\frac{y^2}{90} - \frac{x^2}{10} = 1$$



۵ - کانون ها $(0, 9)$ و $(0, -1)$ و خطوط مجانب $y = \frac{4}{3}x + 4$ و $y = -\frac{4}{3}x + 4$ هستند. مرکز $(0, 4)$ و $c = 5$ است. چون $y = \pm \frac{4}{3}x + 4$ خطوط مجانب هستند، پس $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ و یا $a = \frac{4}{3}b$ است، لذا داریم.

$$25 = \left(\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 = \frac{25b^2}{9}$$

پس $a = 4$ و $b = 3$ است. و در نهایت.

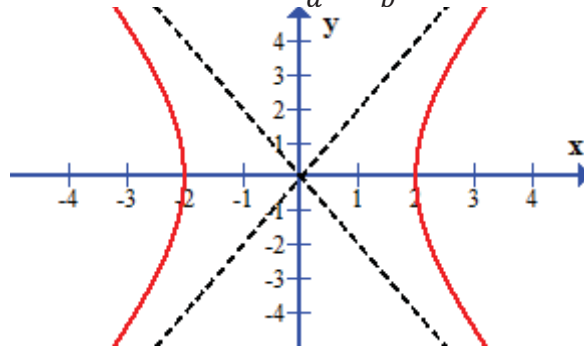


۶ - هذلولی از نقاط $(\sqrt{20}, 8)$ و $(\sqrt{8}, 4)$ می گذرد و در مکان متعارف قرار دارد.

اگر معادله هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد، پس داریم $\frac{8}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 = \frac{20}{a^2} - \frac{64}{b^2}$ بطوری که $\frac{12}{a^2} = \frac{48}{b^2}$ است. لذا $a^2 = \frac{1}{4}b^2$ است. پس داریم $1 = \frac{8}{\frac{1}{4}b^2} - \frac{16}{b^2} = \frac{32}{b^2} - \frac{16}{b^2} = \frac{16}{b^2}$ بطوری که $b = 4$ و $a = 2$ است و در نهایت، معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

اما اگر معادله هذلولی $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ باشد، پس داریم $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 = \frac{64}{a^2} - \frac{20}{b^2}$ بطوری که $\frac{16}{b^2} - \frac{8}{a^2} = 1$ است. در این صورت داریم $\frac{16}{4b^2} - \frac{8}{b^2} = 1$ است. اما این غیر ممکن است. زیرا هیچ معادله ای به شکل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ وجود ندارد که فرض های مساله را برقرار کند.



در تمرینات زیر کانون ها، راس ها و خطوط مجانب هذلولی داده شده را پیدا کنید.

$$۷) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$a = 3$ ، $b = 4$ ، $c = 5$ ، راس ها $(-3, 0)$ و $(3, 0)$

خطوط مجانب $y = \pm \frac{4}{3}x$ ، کانون ها $(-5, 0)$ و $(5, 0)$

$$۸) \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$$

$a = 5$ ، $b = 7$ ، $c = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$ ، خطوط مجانب $y = \pm \frac{7}{5}x$

کانون ها $(-\sqrt{74}, 0)$ و $(\sqrt{74}, 0)$ ، راس ها $(-5, 0)$ و $(5, 0)$

$$۹) \quad y^2 - 9x^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$a = 5, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c = \sqrt{25 + \frac{25}{9}} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{کانون ها، } (0, 5) \text{ و } (0, -5) \text{ راس ها}$$

$$\left(0, -\frac{5\sqrt{10}}{3}\right) \text{ و } \left(0, \frac{5\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$y = \pm 3x \text{ خطوط مجانب}$$

$$۱۰) \quad 4x^2 - y^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = 5, \quad c = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{کانون ها، } \left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ و } \left(-\frac{5}{2}, 0\right) \text{ راس ها}$$

$$\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}, 0\right) \text{ و } \left(-\frac{5\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

$$y = \pm 2x \text{ خطوط مجانب}$$

$$۱۱) \quad \frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{144} = 1$$

$$\text{مرکز } (-3, -1), \quad a = 5, \quad b = 12, \quad c = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$(10, -1) \text{ و } (-16, -1) \text{ کانون ها، } (2, -1) \text{ و } (-8, -1) \text{ راس ها}$$

$$y + 1 = \frac{12}{5}(x + 3) \text{ و } y + 1 = -\frac{12}{5}(x + 3) \text{ خطوط مجانب}$$

در تمرینات زیر نشان دهید که معادله داده شده، معادله یک هذلولی است. نمودار آنرا رسم کنید و مرکز و راس ها و خطوط مجانب را مشخص کنید.

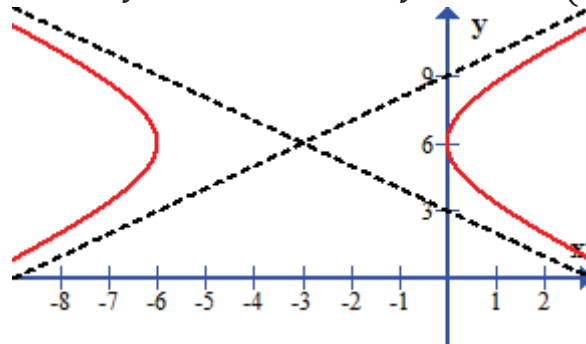
$$۱۲) x^2 - y^2 + 6x + 12y = 36$$

$$(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 12y + 36) = 9$$

$$(x + 3)^2 - (y - 6)^2 = 9$$

$$\frac{(x + 3)^2}{9} - \frac{(y - 6)^2}{9} = 1$$

$a = 3 = b$ ، مرکز $(-3, 6)$ ، راس ها $(-6, 6)$ و $(0, 6)$
خطوط مجانب $y - 6 = x + 3$ و $y - 6 = -(x + 3)$



$$۱۳) 4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68$$

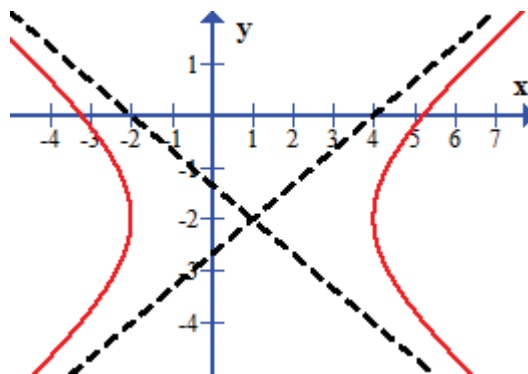
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) = 36$$

$$4(x - 1)^2 - 9(y + 2)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

مرکز $(1, -2)$ ، $a = 3$ ، $b = 2$ ، راس ها $(4, -2)$ و $(-2, -2)$

خطوط مجانب $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$ و $y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$



$$۱۴) x^2 + 2\sqrt{2}x - y^2 + 2\sqrt{2}y = 1$$

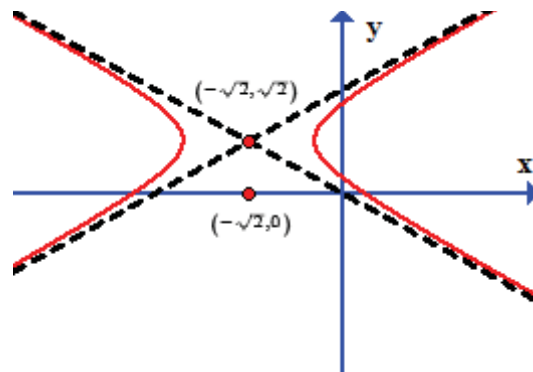
$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2) - (y^2 - 2\sqrt{2}y + 2) = 1$$

$$(x + \sqrt{2})^2 - (y - \sqrt{2})^2 = 1$$

$$\text{مرکز } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) , a = 1 = b$$

$$\text{راس ها } (-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}) \text{ و } (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$$

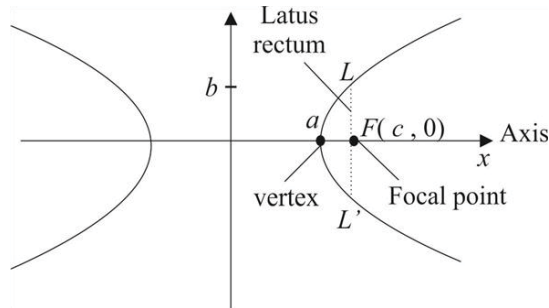
$$\text{خطوط مجانب } y - \sqrt{2} = x + \sqrt{2} \text{ و } y - \sqrt{2} = -(x + \sqrt{2})$$



۱۵ - پاره خطی که از یک کانون هذلولی می‌گذرد و عمود بر محور اصلی است و دو نقطه انتهایی آن روی هذلولی است، وتر کانونی **Latus Rectum** نامیده می‌شود. نشان دهید اگر معادله هذلولی مطابق زیر باشد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پس طول وتر کانونی $\frac{2b^2}{a}$ است.



پاسخ

فرض می‌کنیم (c, y) روی هذلولی باشد. اگر $y > 0$ باشد، پس

$$y = b \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \frac{b^2}{a}$$

است. اگر $y < 0$ باشد، پس

$$y = -b \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = -\frac{b^2}{a}$$

است. لذا طول وتر کانونی مطابق زیر است.

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

جلد سوم حسابان

فصل سوم

بردار ها ، خط ها و سطح ها

Vectors, Lines and Planes

بسیاری از کمیت ها Quantities فقط اندازه Magnitude دارند ، پس می توان آنها را با اعداد نشان داد. مثلا ، جرم ، قیمت ، سود ، سرعت Speed ، مساحت ، طول ، حجم. اما بسیاری از کمیت ها هم هستند که هم اندازه دارند و هم جهت. مهمترین مثال ، تندی Velocity است که نه تنها شامل سرعت است بلکه شامل جهت حرکت هم می باشد. کمیت هایی که هم اندازه دارند و هم جهت ، از نظر ریاضی با بردار نشان داده می شوند.

در این فصل در مورد بردار ها و خطوط و سطح ها در فضا صحبت می کنیم.

۳.۱ - بردار ها در سیستم دو بعدی Vectors in Two Dimensional System

بردار را معمولا با حرف V نشان می دهیم. برداری که در تصویر A ملاحظه می کنید در سیستم دو بعدی xy است.

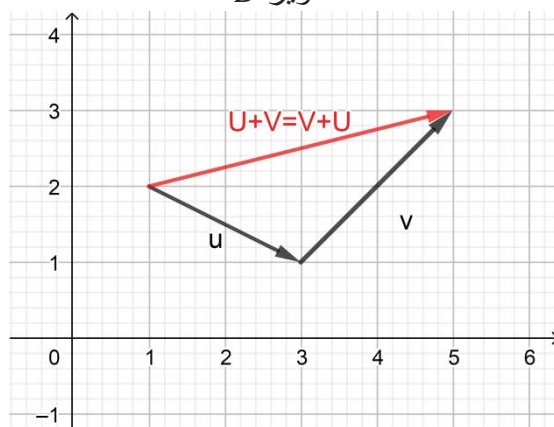


همان طور که گفته شد ، بردار اندازه **Magnitude** و جهت **Direction** دارد. طول خط ، اندازه بردار را نشان می دهد ، و نوک پیکان ، جهت بردار را نشان می دهد.

می توان دو بردار را با هم جمع کرد. برای این کار راس یکی را به انتهای دیگری متصل می کنیم.

تصویر B

تصویر B



مثلا یک هوا پیمای که در جهت شمال پرواز می کند ، اما باد در جهت شمال غربی می وزد ، را در نظر بگیرید. دو بردار یعنی **تندی Velocity** هوا پیمای و تندی باد نتیجه می شود جهت هوا پیمای کمی تغییر کند و اگر شما از رو زمین نگاه می کنید ، به نظر می رسد که هوا پیمای کمی منحرف می شود. تصویر C

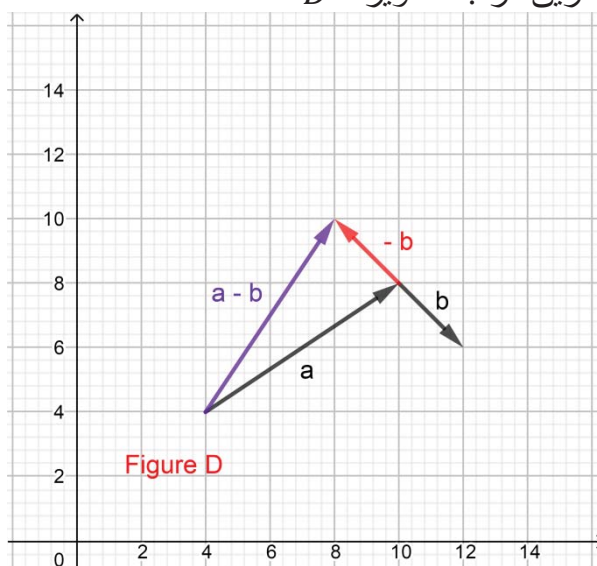
تصویر C



ممکن است لغزش هوا پیمای را آن گونه که در بالا توصیف شد ، ندیده باشید و یا آن گونه قابل مشاهده نباشد. اما پرواز پرندگان را هنگامی که باد تند می وزد و تلاش آنها را در مقابل باد شدید مشاهده کرده اید.

شتاب Acceleration و نیرو Force نمونه های دیگر بردار هستند.

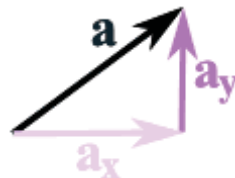
می توان دو بردار را از هم تفریق کرد. تصویر D



همان طور که در تصویر D ملاحظه می کنید، برای این که b را از a کم کنیم، ابتدا جهت b را معکوس می کنیم، و سپس مطابق معمول آن دو را با هم جمع می کنیم.

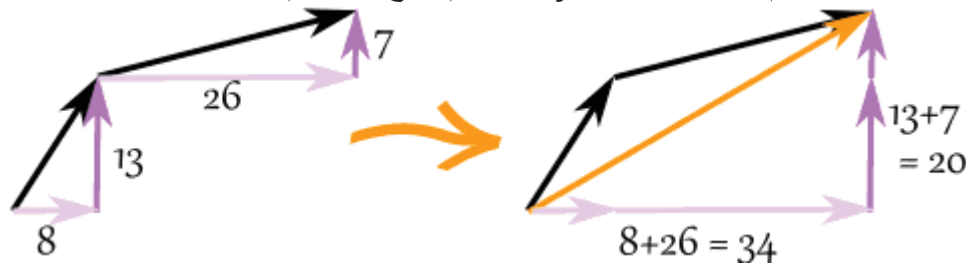
محاسبه Calculation

حالا ببینیم عمل جمع را چگونه انجام می دهیم. متداول ترین طریق این است که بردار ها را به مولفه های x و y تفکیک کنیم. در تصویر زیر بردار a را به مولفه های a_x و a_y تفکیک کرده ایم.



جمع کردن بردار ها Adding Vectors

حالا قسمت های x را با هم و قسمت های y را با هم جمع می کنیم.



در تصویر بالا بردار $(8, 13)$ و بردار $(26, 7)$ با هم جمع کرده ایم، یعنی $8 + 26 = 34$ ، $13 + 7 = 20$ بهتر است بردار ها را با حروف برجسته **Bold** نشان دهیم.

مثال ۱ - دو بردار زیر را با هم جمع کنید.

$$a = (8, 13), \quad b = (26, 7)$$

پاسخ

$$c = a + b$$

$$c = (8, 13) + (26, 7) = (8 + 26, 13 + 7) = (34, 20)$$

تفریق بردار ها Subtracting Vectors

ابتدا برداری را که می خواهیم کسر کنیم، معکوس می کنیم و سپس با بردار دیگر جمع می کنیم.

مثال ۲ - $k = (4, 5)$ را از $v = (12, 2)$ کم کنید.

پاسخ

$$a = v + -k$$

$$a = (12, 2) + -(4, 5) = (12, 2) + (-4, -5) = (12 - 4, 2 - 5) = (8, -3)$$

اندازه یک بردار Magnitude of a Vector

اندازه یک بردار را با نماد قدر مطلق و یا برای این که با قدر مطلق اشتباه نشود با دو خط عمودی در دو طرف آن نشان داده می شود.

$\|a\|$ یا $|a|$ برای محاسبه اندازه بردار ، از قضیه فیثاغورث استفاده می کنیم.

$$\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال ۳ - اندازه $b = (6, 8)$ را پیدا کنید.
پاسخ

$$\|b\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

یک بردار با اندازه یک را بردار واحد Unit Vector می نامند.

بردار در مقابل کمیت عددی Vector vs Scalar

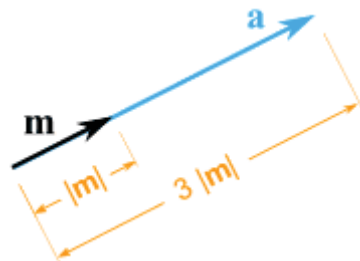
فراموش نشود که کمیت عددی Scalar فقط یک عدد است مانند ۲ و ۴۱- اما بردار هم اندازه دارد و هم جهت. و با حروف برجسته نشان داده می شود. مثلاً وقتی می نویسیم kb منظور ما این است که عدد k ضرب در بردار b .

ضرب کردن یک عدد در یک بردار Multiplying a Vector by a Scalar

هنگامی که یک بردار را در یک عدد ضرب می کنیم ، می گوئیم تغییر مقیاس یک بردار. یعنی یک بردار چه مقدار بزرگ و یا چه مقدار کوچک باشد.

مثلاً می گوئیم بردار $m = (7, 3)$ را در عدد ۳ ضرب کنید ، یعنی

$$a = 3m = (3 * 7, 3 * 3) = (21, 9)$$



در مثال بالا ، بردار همان جهت اولیه را دارد ، اما سه برابر بزرگ تر شده است. پس هنگام ضرب کردن یک عدد در یک بردار ، آن بردار را یا بزرگ تر می کنیم و یا کوچک تر.

ضرب کردن یک بردار در یک بردار Multiplying a Vector by a Vector

دو نوع ضرب یک بردار در یک بردار داریم. یکی ضرب نقطه ای و دیگری ضرب برداری یا ضرب برداری

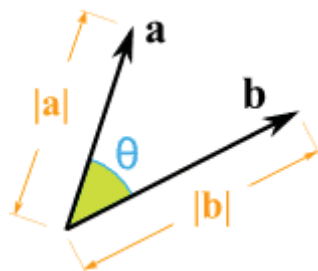
۱ - ضرب نقطه ای Dot Product

هنگامی که ضرب نقطه ای در مورد دو بردار انجام می دهیم ، نتیجه یک عدد Number است ، نه یک بردار . برای نشان دادن ضرب نقطه ای ، بین دو بردار یک نقطه می گذاریم. مانند

$$a \cdot b$$

نماد بالا یعنی ضرب نقطه ای a و b

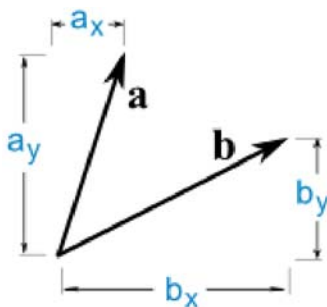
محاسبه ضرب نقطه ای دو بردار از دو طریق ممکن است.
طریق اول ضرب نقطه ای دو بردار



$$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos(\theta)$$

در فرمول بالا $|a|$ یعنی اندازه Magnitude یا طول Length بردار a
 $|b|$ یعنی اندازه Magnitude یا طول Length بردار b و θ زاویه بین a و b

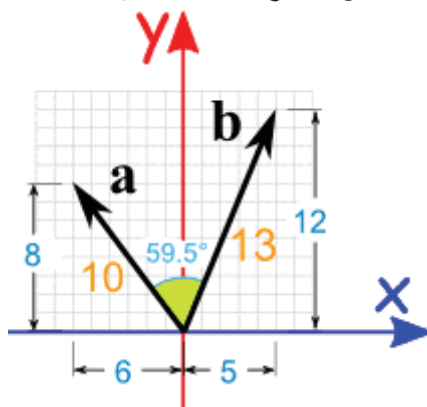
طریق اول ضرب نقطه ای دو بردار



$$a \cdot b = a_x \times b_x + a_y \times b_y$$

فرمول بالا یعنی مولفه x هر بردار را در هم ضرب و مولفه y هر بردار را در هم ضرب و سپس جمع می کنیم.
هر دو طریق کار می کنند.

مثال ۴- ضرب نقطه ای بردار های a و b را محاسبه کنید.



طریق اول

$$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos(\theta)$$

$$a \cdot b = 10 \times 13 \times \cos(59.5^\circ) = 10 \times 13 \times 0.5075$$

$$= 65/98 = 66$$

طریق دوم

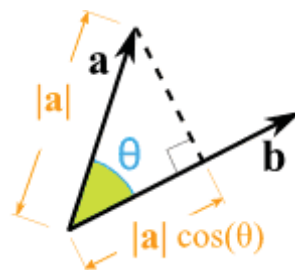
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x \times b_x + a_y \times b_y = -6 \times 5 + 8 \times 12 \\ &= -30 + 96 = 66 \end{aligned}$$

در هر دو طریق بعد از گرد کردن به یک نتیجه می‌رسیم.

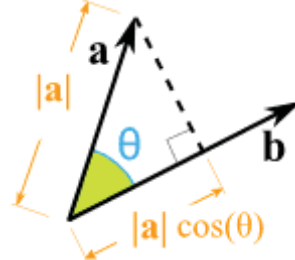
ملاحظه می‌کنید که برای a_x عدد -6 بکار بردیم، زیرا جهت این بردار در جهت منفی محور x است.

چرا $\cos(\theta)$

صحیح است که برای ضرب کردن دو بردار، طول آنها را در هم ضرب کنیم. اما این هنگامی صحیح است که هر دو بردار در یک جهت باشند. برای این که یک بردار را در جهت بردار دیگر قرار دهیم آنرا در $\cos \theta$ ضرب می‌کنیم.



با این کار مولفه a را به موازات مولفه b قرار می‌دهیم.

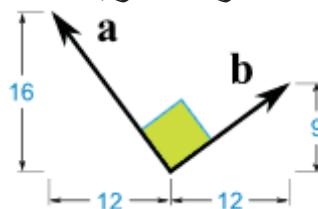


یا می‌توانیم مولفه b را به موازات مولفه a قرار دهیم. به تساوی زیر دقت کنید.

$$|a| \times |b| \times \cos(\theta) = |a| \times \cos(\theta) \times |b|$$

زوایای قائمه Right Angles

هنگامی که دو بردار نسبت به هم زاویه قائمه دارند، ضرب نقطه‌ای صفر است.

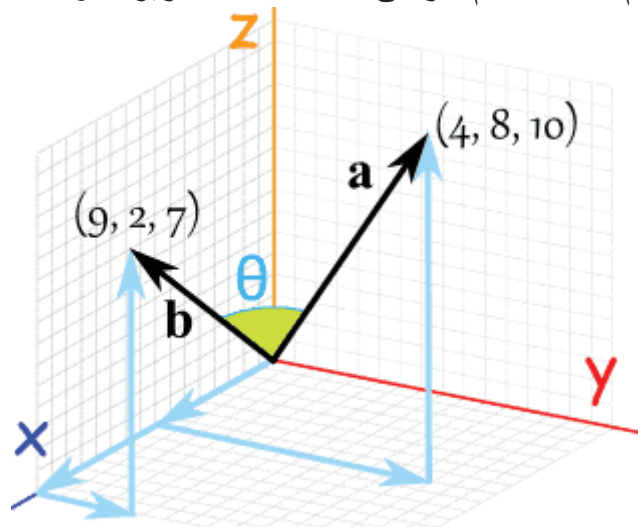


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(90^\circ)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times 0 = 0$$

ضرب نقطه ای برای سیستم سه بعدی هم کار می کند. مانند مثال زیر. مولفه z را فراموش نکنید.



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 9 \times 4 + 2 \times 8 + 7 \times 10$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 36 + 16 + 70$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y + a_z \times b_z$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 122$$

روش دیگر هم به همان طریق سیستم دو بعدی انجام می دهیم. باز هم فراموش نکنید که مولفه z را در نظر بگیرید. مثلاً برای پیدا کردن طول بردار ها مطابق زیر عمل می کنیم.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 64 + 100} = \sqrt{180}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{9^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{81 + 4 + 49} = \sqrt{134}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$$

از محاسبه بالا می دانیم که $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 122$ است. پس

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$$

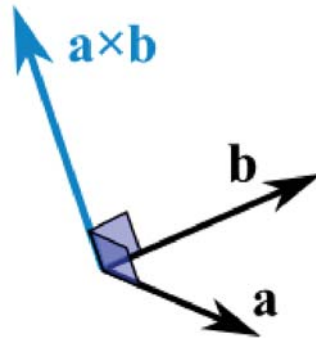
$$122 = \sqrt{180} \times \sqrt{134} \times \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{122}{\sqrt{180} \times \sqrt{134}} = 0.7855$$

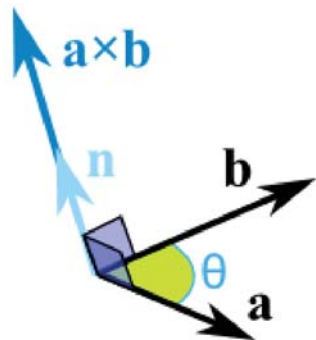
$$\theta = \cos^{-1}(0.7855) = 38.2^\circ$$

۲ - ضرب برداری یا ضربداری Cross Product

فراموش نشود. یک بردار اندازه “طول” و جهت دارد. حاصل ضرب برداری دو بردار، یک بردار دیگر است که نسبت به هر دو بردار، زاویه قائمه تشکیل می دهد. که در سیستم سه بعدی اتفاق می افتد.



اندازه یا طول ضرب برداری مساوی مساحت متوازی الاضایی است که دو بردار اولیه، دو ضلع آن را تشکیل می دهند. در تصویر بالا، بردار آبی رنگ حاصل ضرب برداری دو بردار a و b است. طول ضرب برداری صفر است اگر a و b در یک جهت و یا در جهت های مخالف باشند. و طول ضرب برداری به حد اکثر می رسد اگر دو بردار نسبت به هم زاویه قائمه تشکیل دهند.

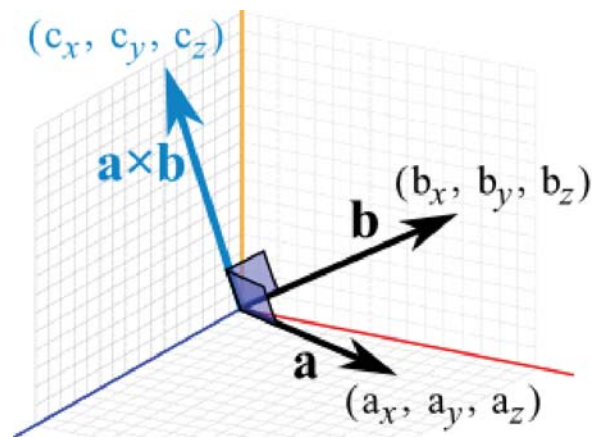
محاسبه ضرب برداری Calculation of Cross Product

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta) \mathbf{n}$$

در فرمول بالا $|\mathbf{a}|$ اندازه یا طول بردار $\mathbf{a}$ است. $|\mathbf{b}|$ اندازه یا طول بردار $\mathbf{b}$ است. θ زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. $\mathbf{n}$ بردار واحد است که هم بر $\mathbf{a}$ و هم بر $\mathbf{b}$ عمود است. پس طول ضرب برداری مساوی است با طول $\mathbf{a}$ ضرب در طول $\mathbf{b}$ ضرب در سینوس زاویه بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و سپس در $\mathbf{n}$ ضرب می کنیم تا مطمئن شویم حاصل ضرب بر هر دو بردار عمود است.

به طریق زیر هم می توان عمل کرد. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هر دو از راس $(0,0,0)$ شروع شوند، ضرب برداری مطابق زیر عمل می شود.

- $c_x = a_y b_z - a_z b_y$
- $c_y = a_z b_x - a_x b_z$
- $c_z = a_x b_y - a_y b_x$

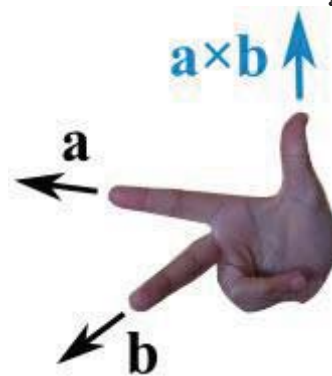


مثال ۵ - ضرب برداری $a = (2, 3, 4)$ و $b = (5, 6, 7)$ را محاسبه کنید.
پاسخ

- $c_x = a_y b_z - a_z b_y = 3 \times 7 - 4 \times 6 = -3$
- $c_y = a_z b_x - a_x b_z = 4 \times 5 - 2 \times 7 = 6$
- $c_z = a_x b_y - a_y b_x = 2 \times 6 - 3 \times 5 = -3$

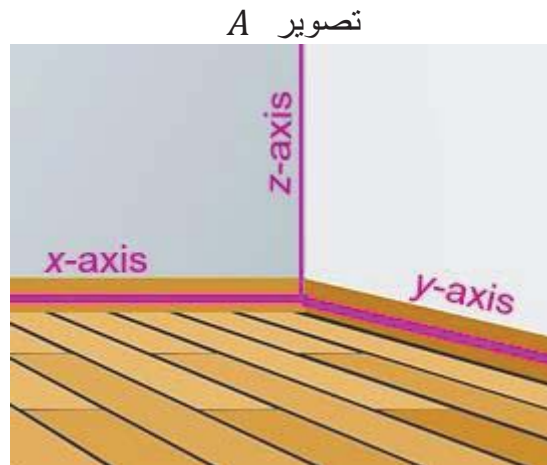
$$a \times b = (-3, 6, -3)$$

قانون دست راست Right Hand Rule

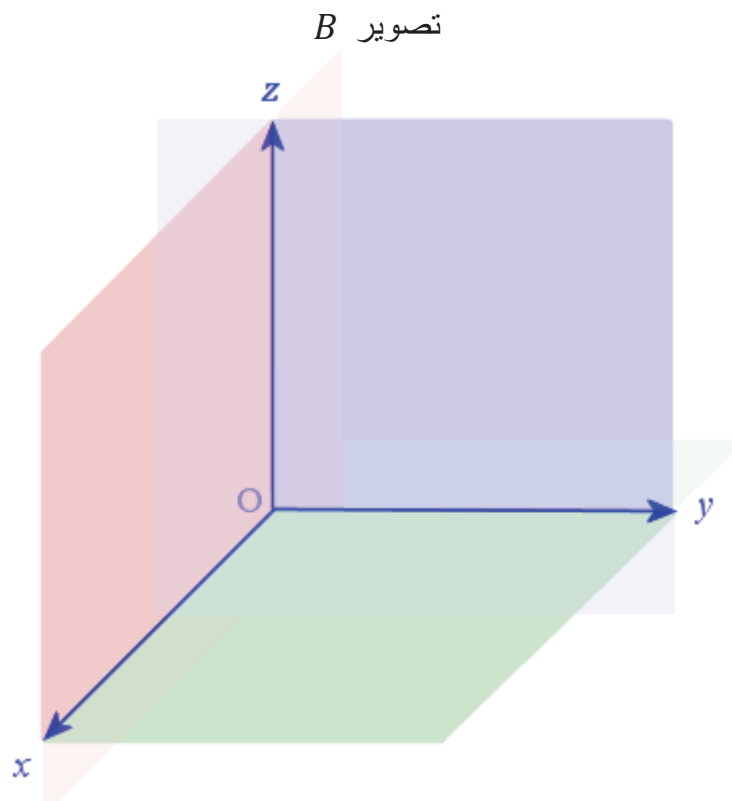


۳.۲ - مختصات دکارتی در فضا Cartesian Coordinates in Space

تا کنون با سیستم مختصات دکارتی دو بعدی کار کرده‌اید و کاملاً با آن آشنا هستید. حالا برای این که بتوانید سیستم سه بعدی را مجسم کنید، به تصویر A توجه کنید. این تصویری است از فضای سه بعدی.



حالا سه خط را در نظر بگیرید که متقابلاً بر یکدیگر عمود **Mutually Perpendicular** هستند و از نقطه O موسوم به مبدا **Origin** می‌گذرند. تصویر B

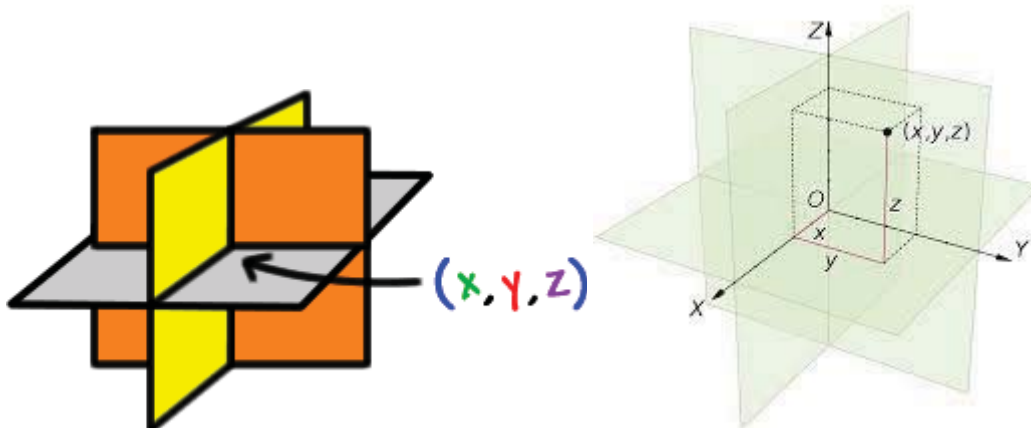


این سه خط را محور x ، محور y و محور z می‌نامیم. همان طور که در سیستم دو بعدی عمل می‌کردیم، اینجا هم بین نقاط روی محور ها و مجموعه اعداد حقیقی ارتباط برقرار می‌کنیم. معمولاً قسمت

مثبت محور ها را رسم می کنیم. محور x به طرف بیننده، محور y سمت راست و محور z به طرف بالا. تصویر B

اگر P یک نقطه در فضا باشد، پس سه صفحه که از P عبور می کنند و عمود بر سه محور هستند، محور های x, y, z را به ترتیب در نقاط x, y, z قطع می کنند، تصویر C

تصویر C

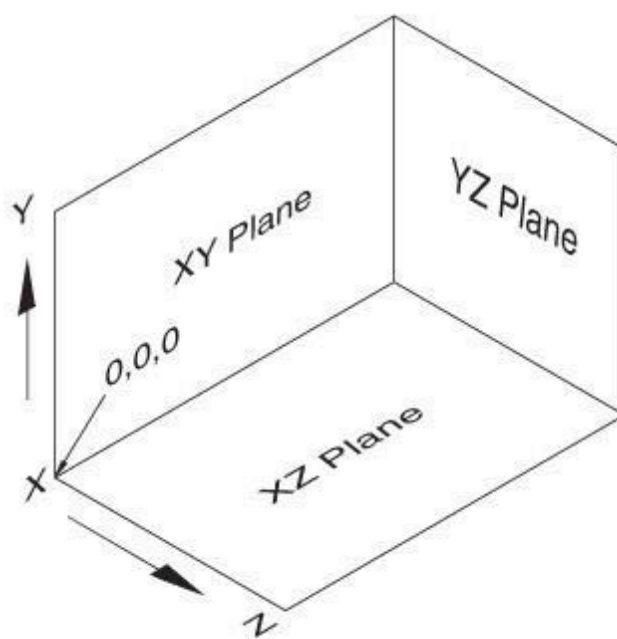


پس نقطه P را به اعداد سه گانه مرتب (x, y, z) ارتباط می دهیم و (x, y, z) را مختصات P در فضا می نامیم.

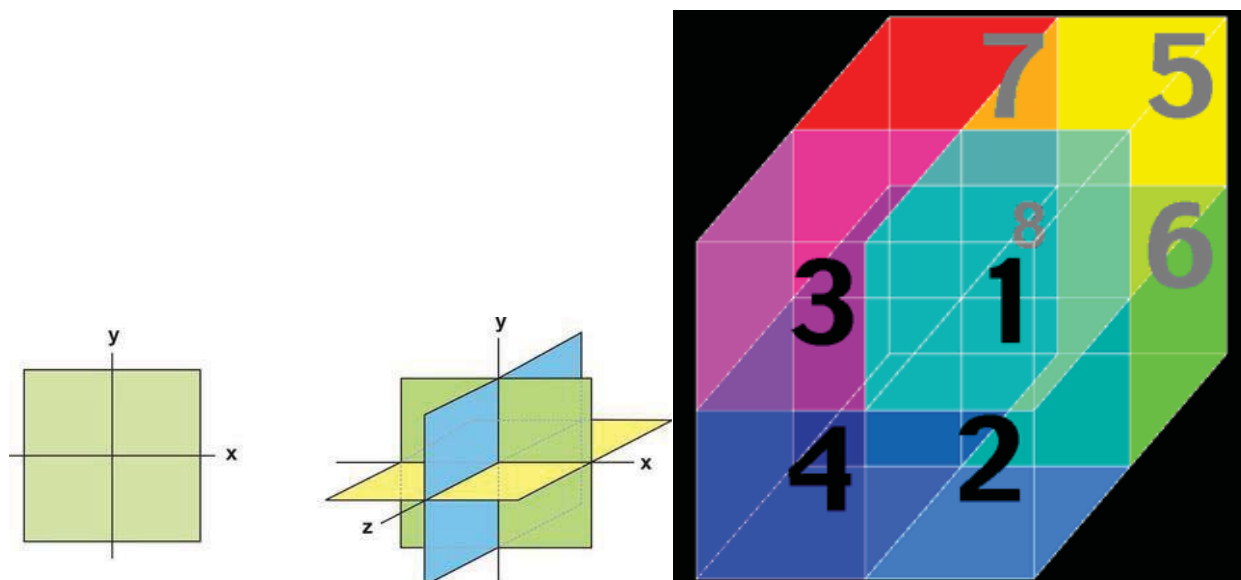
پس هر نقطه در فضا، با یک سه گانه مرتب مشخص می شود. و چون هر نقطه در فضا سه مولفه دارد پس، ما فضا را فضای سه بعدی می نامیم.

در فضای سه بعدی، سه صفحه مختصات **Three Coordinate Planes** وجود دارد، صفحه xy ، که شامل محور های x و y است. صفحه xz که شامل محور های x و z است. صفحه yz که شامل محور های y و z است. تصویر D

تصویر D

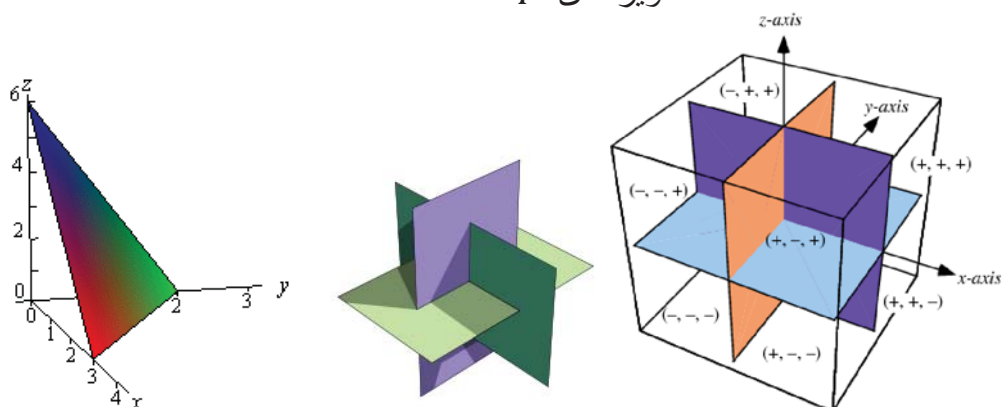


چون هر صفحه فضا را به دو قسمت تقسیم می کند ، پس سه صفحه مختصات ، فضا را به هشت ناحیه تقسیم می کند که به آنها هشت گانه ها **Octants** می گوئیم. تصویرهای E تصویرهای E

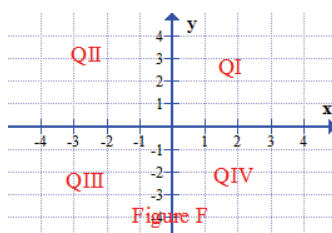


آن ناحیه ای که شامل قسمت مثبت x و y و z است ، اولین یک هشتم **Fisrt Octant** نامیده می شود. تصویرهای F

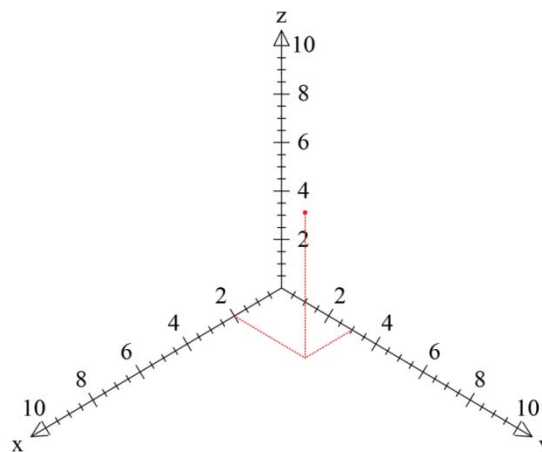
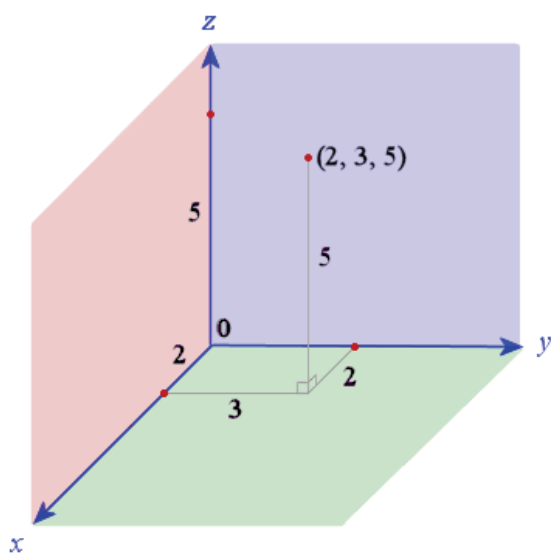
تصویرهای F



برای درک مفهوم اولین یک هشتم ، بخاطر بیاورید که گفتیم در سیستم دو بعدی ، محورهای مختصات صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کند ، که هر کدام را **ربع صفحه Quadrant** می نامیدیم. تصویر F



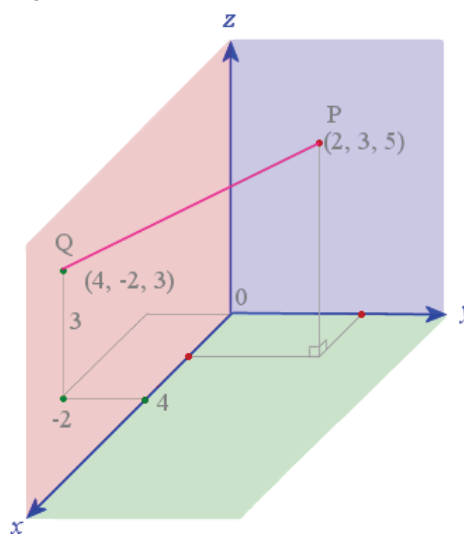
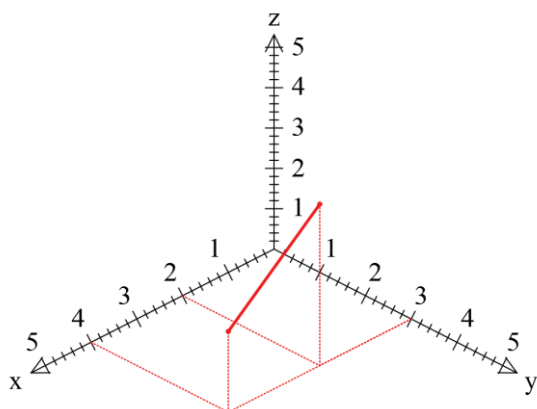
حالا فرض کنید می خواهیم نقطه $(2, 3, 5)$ را روی صفحه مختصات سه بعدی مشخص کنیم. ابتدا دو واحد روی قسمت مثبت محور x حرکت می کنیم. سپس از آن نقطه سه واحد به موازات محور y به طرف راست یعنی مثبت حرکت می کنیم. و در نهایت از آن نقطه پنج واحد به موازات محور z به طرف بالا یعنی به طرف مثبت z حرکت می کنیم. اینجا نقطه دلخواه ما است. تصویرهای G



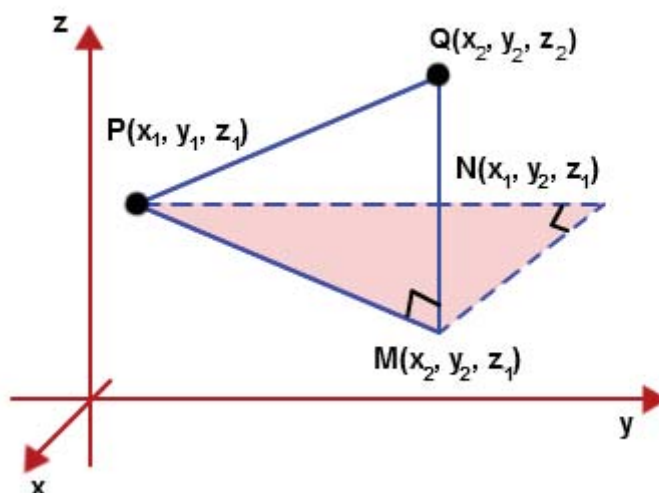
در سیستم سه بعدی هم مانند سیستم دو بعدی، فرمول فاصله یا مسافت **Distance** $|PQ|$ بین دو نقطه $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ مطابق زیر بدست می آید. تصویرهای H

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (1)$$

تصویرهای H



اثبات

تصویر H 

در تصویر H مثلث های MQP و NMP قائم الزاویه هستند. توجه دارید که در فضای سه بعدی محور های سه گانه متقابلاً بر یکدیگر عمود هستند. پس داریم.

$$PN = y_2 - y_1, \quad MN = x_2 - x_1, \quad QM = z_2 - z_1$$

در مثلث قائم الزاویه PNM داریم.

$$PM^2 = PN^2 + MN^2$$

$$PM^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \quad (2)$$

در مثلث PMQ داریم.

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2 \quad (3)$$

با استفاده از تساوی (۲) می توان PM^2 را در تساوی (۳) جانشین کرد. پس داریم.

$$PQ^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

اثبات تمام.

مثال ۱ - اگر داشته باشیم $P = (-1, 3, 6)$ و $Q = (4, 0, 5)$. مطلوب است $|PQ|$ و $|PO|$

$|OQ|$

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - 3)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{35}$$

$$|PO| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (6)^2} = \sqrt{46}$$

$$|OQ| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

قوانین زیر در مورد فاصله بین هر دو نقطه در فضا، صادق است.

$$|PQ| = 0 \text{ اگر فقط و فقط } P = Q$$

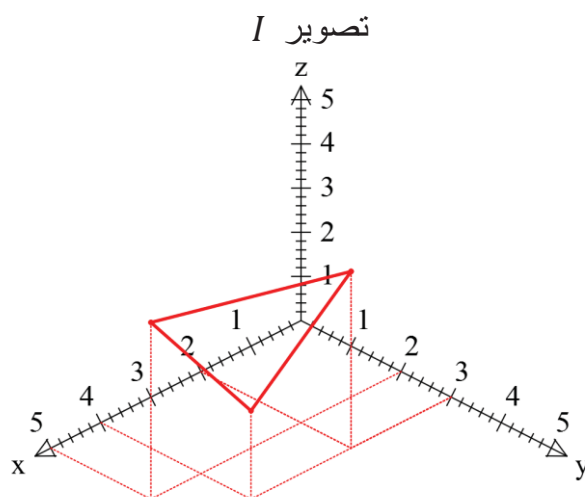
$$|PQ| = |QP|$$

اگر R نقطه سومی باشد.

$$|PQ| \leq |PR| + |RQ|$$

دو قانون اول از شماره (۱) مستقیماً درک می شود. قانون سوم هم از قضیه هندسه در مورد روابط اضلاع مثلث مستفاد می شود. یعنی طول یک ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کمتر است. تصویر

I



کره Sphere با مرکز $P = (x_0, y_0, z_0)$ و شعاع a عبارت است از مجموعه تمام نقطه های Q بطوری که

$$|PQ| = a$$

است. تصویر J .

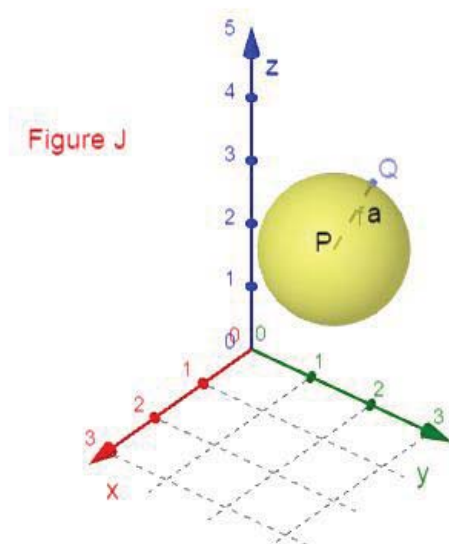
پس یک نقطه $Q = (x, y, z)$ روی کره قرار دارد اگر فقط و فقط داشته باشیم.

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$$

و یا

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

معادله بالا معادله کره است.



مثال ۲ – نشان دهید که

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4y - 6z$$

معادله یک کره است. مرکز و شعاع آنرا پیدا کنید.

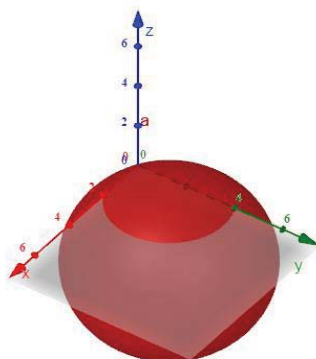
پاسخ

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) = 1 + 4 + 9$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 14$$

پس معادله داده شده، معادله یک کره است با مرکز $(1, 2, -3)$ و شعاع $\sqrt{14}$. تصویر K

تصویر K



یک توپ **Ball** با مرکز $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و شعاع a عبارت است از مجموعه نقاط $P = (x, y, z)$

بطوری که $|P_0P| \leq a$ است و یا

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq a$$

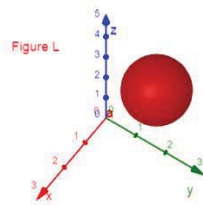
و یا

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq a^2$$

لذا اگر $P_0 = (-1, -1, 1)$ باشد، پس $P = (x, y, z)$ داخل توپ است با مرکز P_0 و شعاع ۱ در صورتی که $|P_0P| \leq 1$ باشد، یعنی

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2} \leq 1$$

تصویر **L**



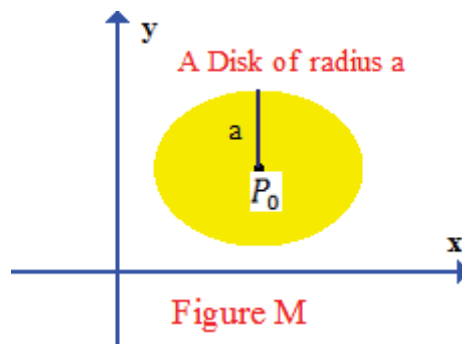
یک توپ یک جسم سه بعدی است که به وسیله یک کره احاطه شده است. ناحیه متناظر آن در سیستم دو بعدی، بوسیله یک دایره احاطه شده است، و ما به آن **دیسک** **Disk** می‌گوییم. دیسک به مرکز $P_0 = (x_0, y_0)$ و شعاع a عبارت است از مجموعه نقاط $P = (x, y)$ به طوری که

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq a$$

باشد و یا

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2$$

تصویر **M**



تمرینات ۳.۲

در تمرینات زیر فاصله بین نقاط P و Q را پیدا کنید.

۱) $P = (\sqrt{2}, 0, 0)$ ؛ $Q = (0, 1, 1)$

۲) $P = (-3, 4, -5)$ ؛ $Q = (0, 8, 7)$

۳) $P = (-1, 3, 6)$ ؛ $Q = (4, 2, 7)$

۴) $P = (2 \sin x, \cos x, \tan x)$ ؛ $Q = (\sin x, 2 \cos x, 0)$

۵ - اگر نقطه $P = (3, 0, 2)$ و نقطه $Q = (1, -1, 5)$ و نقطه $R = (5, 1, -1)$ باشد ، نشان دهید که $|PQ| = |PR|$ است.

۶ - معادله کره ای با شعاع ۵ و مرکز $(2, 1, -7)$ را پیدا کنید.

۷ - نشان دهید که معادله زیر معادله یک کره است. شعاع و مرکز آنرا مشخص کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = -10$$

۸ - یک نا معادله پیدا کنید بطوری که توسط تمام نقاط داخل یک توپ به شعاع ۶ و مرکز $(0, -2, -3)$ برقرار باشد.

۹ - فرض کنید $P = (1, -1, 1)$ و $Q = (2, 1, -1)$ و $R = (0, 0, 0)$ باشد. با محاسبه طول اضلاع مثلث ، نشان دهید که مثلث PQR یک مثلث قائم الزاویه است.

۱۰ - معادله مجموعه نقاطی را پیدا کنید که از نقاط $(2, 1, 0)$ و $(4, -1, -3)$ به یک فاصله باشند.

پاسخ تمرینات ۳.۲

در تمرینات زیر فاصله بین نقاط P و Q را پیدا کنید.

$$۱) \quad P = (\sqrt{2}, 0, 0) ; Q = (0, 1, 1)$$

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(0 - \sqrt{2})^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2 + 1 + 1} = 2$$

$$۲) \quad P = (-3, 4, -5) ; Q = (0, 8, 7)$$

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (8 - 4)^2 + (7 - (-5))^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

$$۳) \quad P = (-1, 3, 6) ; Q = (4, 2, 7)$$

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (2 - 3)^2 + (7 - 6)^2} = \sqrt{25 + 1 + 1} = 3\sqrt{3}$$

$$۴) \quad P = (2 \sin x, \cos x, \tan x) ; Q = (\sin x, 2 \cos x, 0)$$

پاسخ

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sin x - 2 \sin x)^2 + (2 \cos x - \cos x)^2 + (0 - \tan x)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + \tan^2 x} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = |\sec x| \end{aligned}$$

۵ - اگر نقطه $P = (3, 0, 2)$ و نقطه $Q = (1, -1, 5)$ و نقطه $R = (5, 1, -1)$ باشد، نشان دهید که $|PQ| = |PR|$ است.

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 - 0)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|PR| = \sqrt{(5-3)^2 + (1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|PQ| = |PR|$$

۶ - معادله کره ای با شعاع ۵ و مرکز $(2, 1, -7)$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+7)^2 = 25$$

۷ - نشان دهید که معادله زیر معادله یک کره است. شعاع و مرکز آنرا مشخص کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = -10$$

پاسخ

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) = -10 + 1 + 4 + 9$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$$

که معادله یک کره است با مرکز $(1, 2, -3)$ و شعاع ۲

۸ - یک نا معادله پیدا کنید بطوری که توسط تمام نقاط داخل یک توپ به شعاع ۶ و مرکز $(0, -2, -3)$ برقرار باشد.

پاسخ

$$x^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 \leq 36$$

۹ - فرض کنید $P = (1, -1, 1)$ و $Q = (2, 1, -1)$ و $R = (0, 0, 0)$ باشد. با محاسبه طول اضلاع مثلث، نشان دهید که مثلث PQR یک مثلث قائم الزاویه است.

پاسخ

$$|PQ| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$|RP| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|RQ| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

پس

$$|RP|^2 + |RQ|^2 = 3 + 6 = 9 = |PQ|^2$$

لذا بر اساس قضیه فیثاغورث، این مثلث، یک مثلث قائم الزاویه است.

۱۰ - معادله مجموعه نقاطی را پیدا کنید که از نقاط $(2, 1, 0)$ و $(4, -1, -3)$ به یک فاصله باشند.

پاسخ

اگر فاصله (x, y, z) تا $(2, 1, 0)$ مساوی فاصله آن تا $(4, -1, -3)$ است، پس داریم.

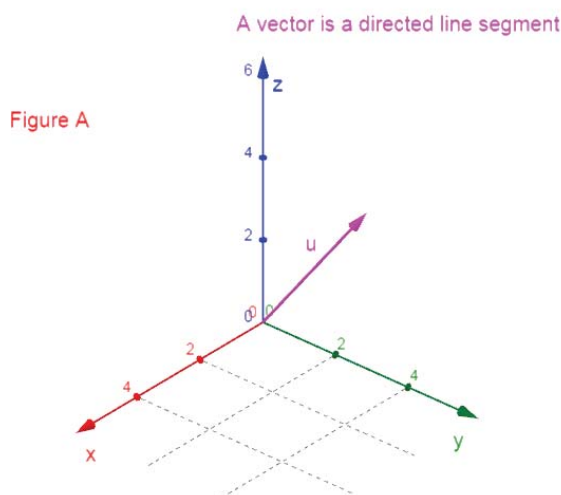
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2$$

پس داریم

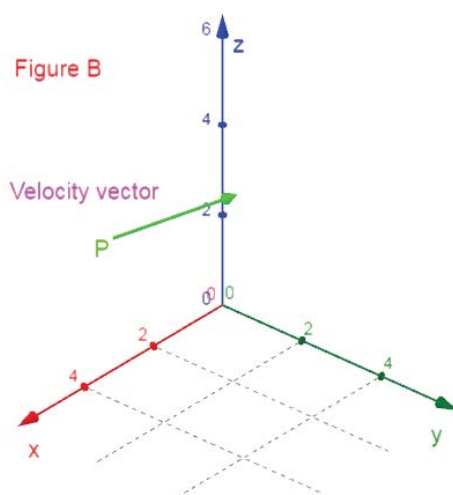
$$4x - 4y - 6z = 21$$

۳.۳ - بردار ها در فضا **Vectors in Space**

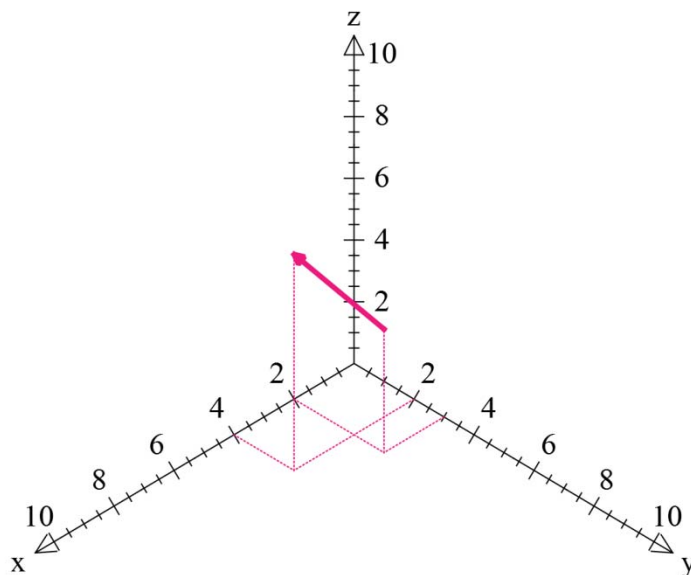
یک بردار عبارت است از یک پاره خط جهت دار در فضا که معمولاً بوسیله یک پیکان نمایش داده می شود. تصویر A



معمولاً هنگام مطالعه حرکت در مثلاً فضا از بردار استفاده می کنیم، مثلاً حرکت یک شی را در مسیری که در تصویر B نشان داده شده در نظر بگیرید. اگر در زمان t ، شی در نقطه P باشد، می توانیم به P یک بردار اختصاص دهیم، بنام بردار **تندی** یا **بردار سرعت سیر** **Velocity Vector** این بردار جهت حرکت شی را نشان می دهد و طول آن مساوی **سرعت** **Speed** شی است.



بردار ها برای توصیف و تعریف نیرو هم بکار می روند. در این صورت جهت بردار ، جهت اعمال نیرو را نشان می دهد و طول بردار ، مقدار نیروی وارده را توصیف می کند. برای نشان دادن یک بردار کافی است مختصات نقطه شروع و خاتمه پاره خط جهت دار مربوط به آنرا مشخص کنیم. در تصویر C برداری را که ملاحظه می کنید، شی از نقطه $(2, 3, 4)$ حرکت کرده است و به نقطه $(2, -1, 3)$ رسیده است. یعنی ۲ واحد در جهت مثبت x و ۱ واحد در جهت منفی y و ۳ واحد در جهت مثبت z جا بجا شده است.

تصویر C 

سه عدد $(2, -1, 3)$ جهت و طول بردار را مشخص می کنند. پس اگر نقطه شروع یک پاره خط (x_0, y_0, z_0) و نقطه انتهایی (x_1, y_1, z_1) باشد، پس بردار مربوطه، $x_1 - x_0$ واحد جا بجایی در جهت مثبت x و $y_1 - y_0$ واحد جا بجایی در سمت مثبت y و $z_1 - z_0$ واحد در سمت مثبت z را مشخص می کند. تفاوت های سه گانه ذکر شده را در یک جا می آوریم.

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$
تعریف بردار

یک بردار یک سگانه مرتب (a_1, a_2, a_3) اعداد است. اعداد a_1 و a_2 و a_3 اجزای تشکیل دهنده Component بردار نامیده می شوند. بردار مربوط به پاره خط با نقطه ابتدایی $P = (x_0, y_0, z_0)$ و نقطه پایانی $Q = (x_1, y_1, z_1)$ عبارت است از $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ و با نماد $\overrightarrow{PQ}$ نشان داده می شود.

دو بردار (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) با هم مساوی هستند اگر فقط و فقط اجزای تشکیل دهنده آنها مساوی باشند. یعنی

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

مثال ۱- فرض کنید $P = (1, 3, 7)$ و $Q = (-1, 0, 6)$ و $R = (0, -1, -2)$ و $S = (-2, -4, -3)$ باشند. نشان دهید $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ است.

پاسخ

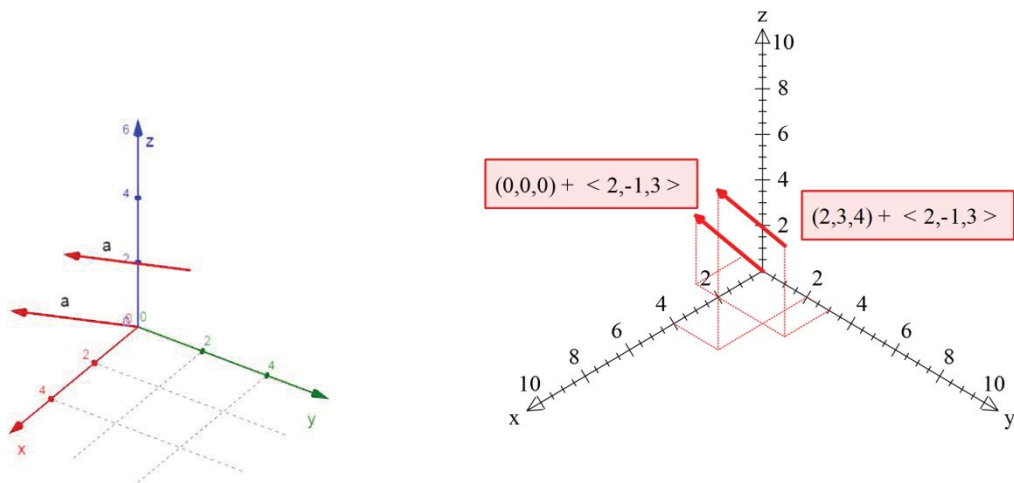
با استفاده از تعریف بردار در مورد اجزا تشکیل دهنده P, Q, R, S داریم.

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, -3, -1) = \overrightarrow{RS}$$

هنگام نوشتن، معمولاً بردار ها را با حروف برجسته می نویسیم. اما انتخاب حروف بستگی به شخص و یا نویسنده کتب دارد. برای تشخیص میان یک بردار و یک عدد، بردار را با حروف کوچک اول الفبا و برجسته نشان می دهیم. مانند a, b, c . بردار $(0,0,0)$ و یا بردار صفر را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می دهیم. چون هنگام نوشتن با دست، نوشتن حرف برجسته امکان ندارد، پس روی نماد بردار یک علامت پیکان می گذاریم. مثلاً بجای نوشتن a می نویسیم $\vec{a}$

هر برداری مانند $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ می تواند مربوط به یک پاره خط جهت دار با یک نقطه ابتدایی دلخواه P و یا هر نقطه ابتدایی دیگری در فضا باشد. هر دو بردار یکی هستند. تصویر های D

تصویرهای D

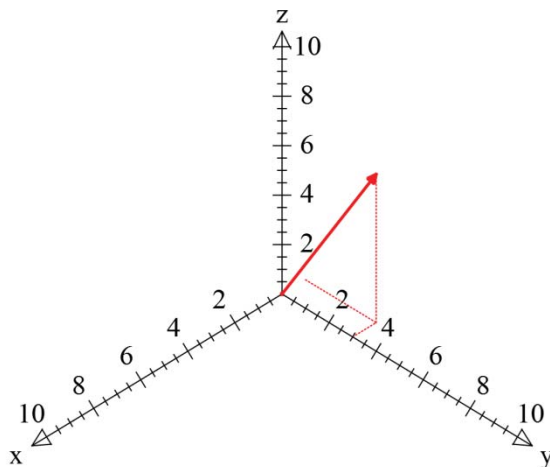


تعریف طول یا نورم یک بردار Definition of the Length or Norm of a Vector
طول یا نورم یک بردار $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ که با نماد $\|\mathbf{a}\|$ و یا $|\mathbf{a}|$ نشان داده می شود، مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

بردار واحد Unit Vector برداری است به طول ۱

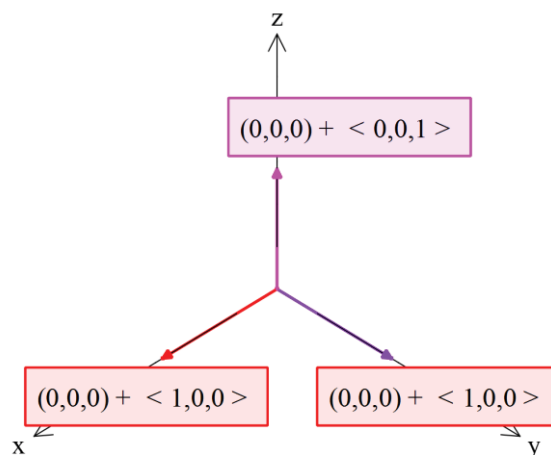
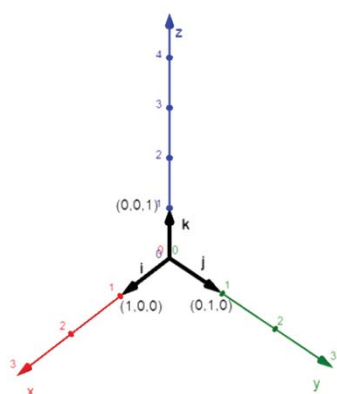
مثلا اگر $a = (-1, 3, 6)$ باشد، پس $\|a\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{46}$ می توانید از روی تصویر E چک کنید که این طول عبارت است از فاصله مرکز تا نقطه $(-1, 3, 6)$

تصویر E 

سه بردار واحد وجود دارد که عملیات روی بردار ها را آسان می کنند. تصویرهای F

$$i = (1, 0, 0) \quad , \quad j = (0, 1, 0) \quad , \quad k = (0, 0, 1)$$

تصویرهای F



بر اساس تعریف طول داریم.

$$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$$

ترکیب بردار ها Combinations of Vectors

همان طور که اعداد را با هم جمع و یا از هم تفريق و یا در هم ضرب می کنیم ، بردار ها هم به همان طریق می توان با هم ترکیب کرد.

ترکیب بردار ها Combinations of Vectors

فرض می کنیم $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ بردار باشند. و فرض می کنیم c یک عدد باشد. پس جمع $a + b$ و تفاضل $a - b$ و مضرب عددی ca را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$ca = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

جمع : Sum

تفریق : Difference

مضرب عددی : Scalar Multiple

مثال ۲- فرض کنید $a = (1, -3, 2)$ و $b = (-4, -1, 0)$ باشد. مطلوب است $a + b$ و $a - b$ و $-\frac{1}{4}a$

پاسخ

$$a + b = (1 + (-4), -3 + (-1), 2 + 0) = (-3, -4, 2)$$

$$a - b = (1 - (-4), -3 - (-1), 2 - 0) = (5, -2, 2)$$

$$-\frac{1}{4}a = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ باشد می توانیم آنرا با بردار های واحد ترکیب کنیم و فرمول زیر را بدست آوریم.

$$a = a_1 i, a_2 j, a_3 k \quad (1)$$

مثلا

$$(1, -3, 2) = i - 3j + 2k$$

اگر $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ باشد ، می توانیم $\overrightarrow{PQ}$ را به شکل شماره (۱) بنویسیم.

$$\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}$$

در آینده خواهیم دید که بهتر است اگر بردار ها را به شکل شماره (۱) بنویسیم. زیرا مولفه های بردار $\mathbf{a}$ ضریب های بردار های واحد $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ هستند، و گاهی اوقات a_1 را مولفه $\mathbf{i}$ و a_2 را مولفه $\mathbf{j}$ و a_3 را مولفه $\mathbf{k}$ می نامیم. با استفاده از فرمول (۱) می توانیم جمع، تفریق و مضرب عددی بردار ها را بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned} \|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) &= \\ (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k} &\quad (2) \\ (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) &= \\ (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k} \\ c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) &= ca_1\mathbf{i} + ca_2\mathbf{j} + ca_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

از فرمول های (۲) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} |a_1| &\leq \|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\| \\ |a_2| &\leq \|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\| \\ |a_3| &\leq \|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\| \end{aligned}$$

تفسیر هندسی عملیات روی بردار Geometric Interpretation of Vector Operations

تفسیر های هندسی و فیزیکی فراوانی می توان برای ترکیب های بردار بیان کرد. و این موضوع بردار ها را ابزار قدرتمندی برای دانشمندان می سازد.

تفسیر هندسی جمع دو بردار، فرض می کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ باشد. پس $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ را پاره خط های جهت داری فرض می کنیم که از مبدا مختصات شروع می شوند و به نقاط P, Q, R ختم می شوند و به ترتیب دارای مختصات (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) و $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ هستند. تصویر G .

لذا بردار $\mathbf{a}$ در نقطه P ختم می شود و دارای مختصات $P = (a_1, a_2, a_3)$ است.

بردار $\mathbf{b}$ در نقطه Q ختم می شود و دارای مختصات $Q = (b_1, b_2, b_3)$ است.

و $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ در نقطه R ختم می شود و دارای مختصات $R = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ است. توجه دارید که بردار ها دارای پیکان هستند و با رنگ های برجسته نشان داده شده اند.

حالا اگر خط جهت دار $\mathbf{b}$ را طوری قرار دهیم که نقطه ابتدایی آن روی P قرار گیرد، پس نقطه پایانی آن نقطه R است. این خط نماینده $\mathbf{b}$ با رنگ غیر برجسته و نازک نشان داده شده است.

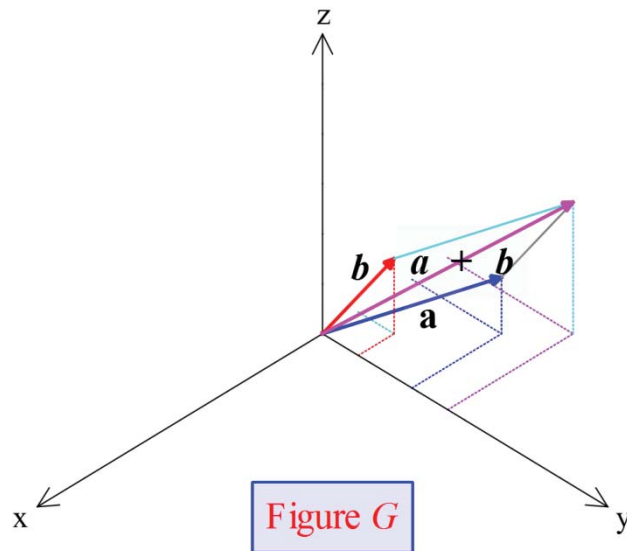


Figure G

پس برای پیدا کردن $a + b$ می توانیم نقطه ابتدایی نمایشنده b را روی نقطه پایانی a قرار دهیم. ملاحظه می کنید که دو نمایشنده های a و b همراه با دو بردار اولیه تشکیل یک متوازی الضلاع می دهند که قطر آن $a + b$ است.

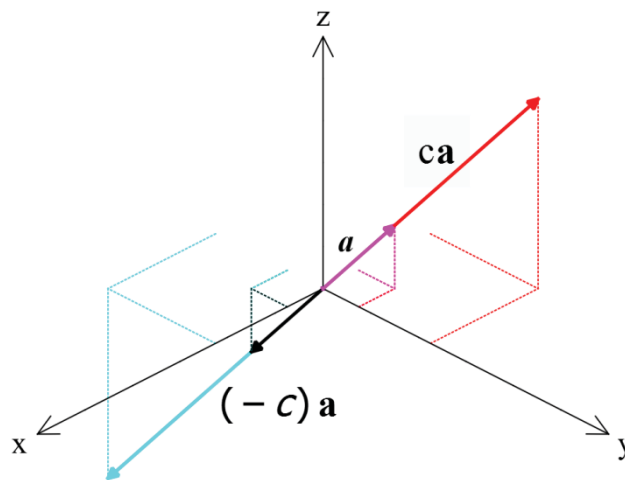


Figure H

اگر a در یک عدد مثبت c ضرب شود، طول آن در c ضرب می شود. اما جهت آن تغییر نمی کند. تصویر H . اگر a را در -1 ضرب کنیم طول آن تغییر نمی کند اما جهت آن مخالف a است. بردار سیاه رنگ تصویر H ، و اگر در یک $-1 < c < 1$ ضرب کنیم هم جهت تغییر می کند و هم طول، بردار سبز رنگ در تصویر H .

اگر $a = a_1 i, a_2 j, a_3 k$ یک بردار باشد و c هر عددی، پس بر اساس تعریف طول داریم.

$$\|ca\| = |c|\|a\| \quad (3)$$

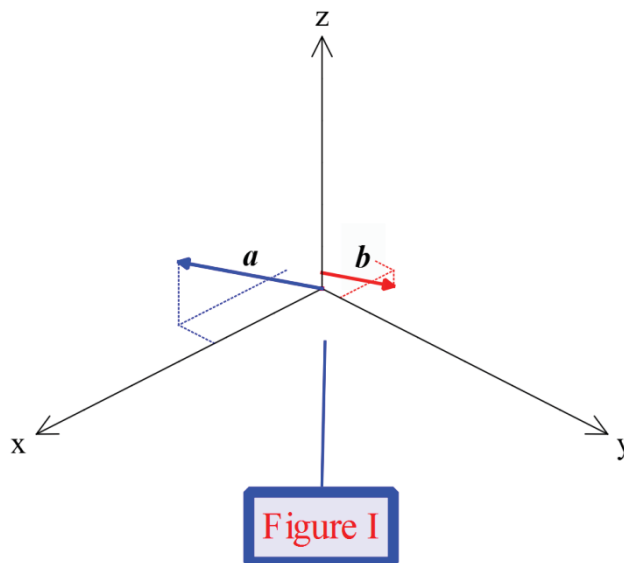
تعریف بردار های موازی Definition of Parallel Vectors

دو بردار a و b موازی هستند اگر فقط و فقط یک عدد c وجود داشته باشد، بطوری که $b = ca$ باشد.

مثال ۳ - فرض کنید $a = 6i - 2j + 4k$ و $b = -3i + j - 2k$ باشد. آیا این دو بردار موازی هستند؟

پاسخ

ملاحظه می کنید که $b = -\frac{1}{2}a$ است. پس موازی هستند. تصویر I



یک بردار واحد در جهت یک بردار غیر صفر a عبارت است از $\frac{a}{\|a\|}$. چنین برداری مهم است و در فصل های بعد به آن می پردازیم.

مثال ۴ - یک بردار واحد در جهت $4i - j - 3k$ پیدا کنید.

پاسخ

$$\|4i - j - 3k\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}$$

پس بردار دلخواه مطابق زیر است.

$$\frac{1}{\sqrt{26}}(4i - j - 3k)$$

برای پیدا کردن تفاضل $a - b$ ، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$a - b = a + (-b)$$

پس اگر a و b هر دو دارای یک نقطه شروع و یا ابتدایی باشند، پس $a - b$ عبارت است از پاره خط جهت داری که نقطه ابتدایی آن از نقطه پایانی b شروع می شود و نقطه پایانی آن نقطه پایانی a است. تصویر J

در نهایت ، اگر یک متوازی الضلاع ، آنطور که در بالا ذکر شد ، تشکیل دهیم . قطر بزرگ تر $a + b$ است و قطر کوچک تر $a - b$ است. تصویر K

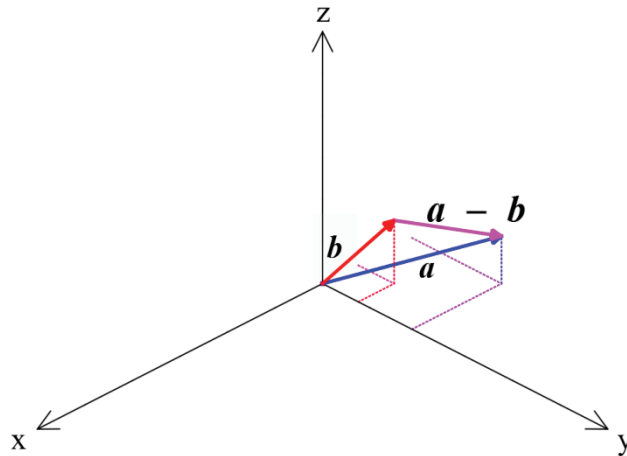


Figure J

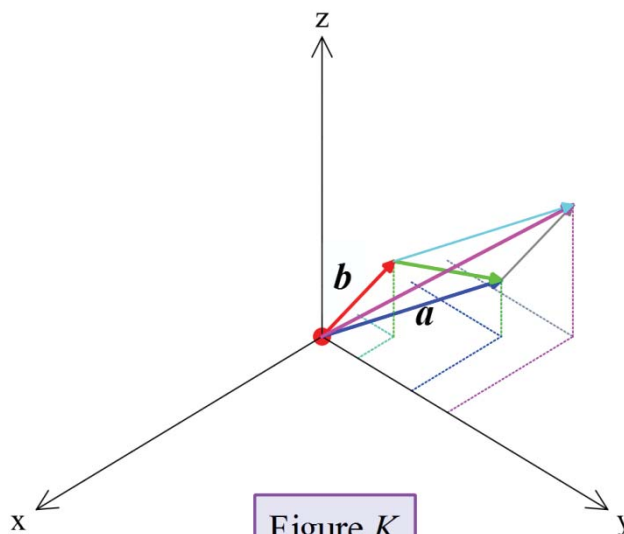


Figure K

کار برد های جمع بردار Applications of Vector Addition

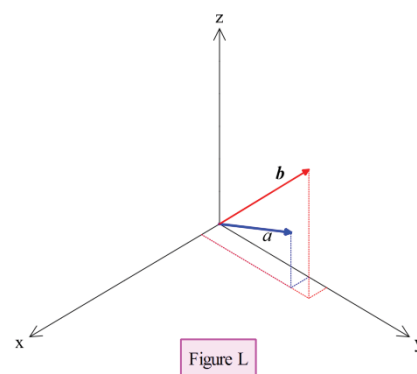
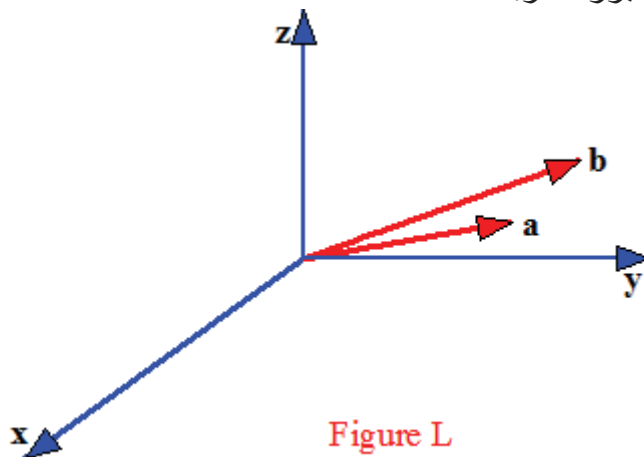
در فیزیک بسیاری از کمیت ها از قانون جمع بردار تبعیت می کنند. مثلا اگر چند نیرو در یک نقطه شی وارد شود ، پس عکس العمل شی به نحوی است مثل اینکه یک نیرو مساوی مجموع تمام نیرو ها بر آن شی وارد شده است.

مثال ۵- دو بچه یک سرتمه را با دو قطعه طناب هر یک بطول ۴ فوت که به جلو سرتمه بسته شده است ، می کشند. بچه کوچک تر طناب را ۲ فوت بالا ی سرتمه و ۲ فوت در یک طرف نقطه اتصال

طناب به سرتمه نگه می دارد. بچه بزرگ تر طناب را ۳ فوت بالای سرتمه و ۲ فوت طرف دیگر محل اتصال طناب به سرتمه نگه می دارد. بچه کوچک تر نیروی F_1 به اندازه ۵ پوند و بچه بلند تر نیروی F_2 به اندازه ۷ پوند به سرتمه وارد می کند. مطلوب است بر آیند نیرو ها بر سرتمه ، یعنی $F_1 + F_2$

پاسخ

ابتدا یک سیستم مختصات مطابق تصویرهای L رسم می کنیم. بردار a نمایش جهت کشیدن بچه کوچک تر و بردار b نمایش جهت کشیدن بچه بزرگ تر.



بر اساس فرض مساله داریم.

$$a = 2i + a_y j + 2k \quad \text{و} \quad b = -2i + b_y j + 3k$$

حالا باید a_y و b_y را پیدا کنیم. چون هر طناب ۴ فوت طول دارد ، پس داریم.

$$4^2 = \|a\|^2 = 2^2 + a_y^2 + 2^2 \quad \text{و} \quad 4^2 = \|b\|^2 = (-2)^2 + b_y^2 + 3^2$$

$$\text{لذا } a_y = 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad b_y = \sqrt{3}. \quad \text{بر اساس فرض مساله } \|F_1\| = 5 \text{ است ، و چون } a \text{ و } F_1$$

موازی هستند و $\|a\| = 4$ است ، پس نتیجه می گیریم

$$F_1 = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4}(2i + 2\sqrt{2}j + 2k)$$

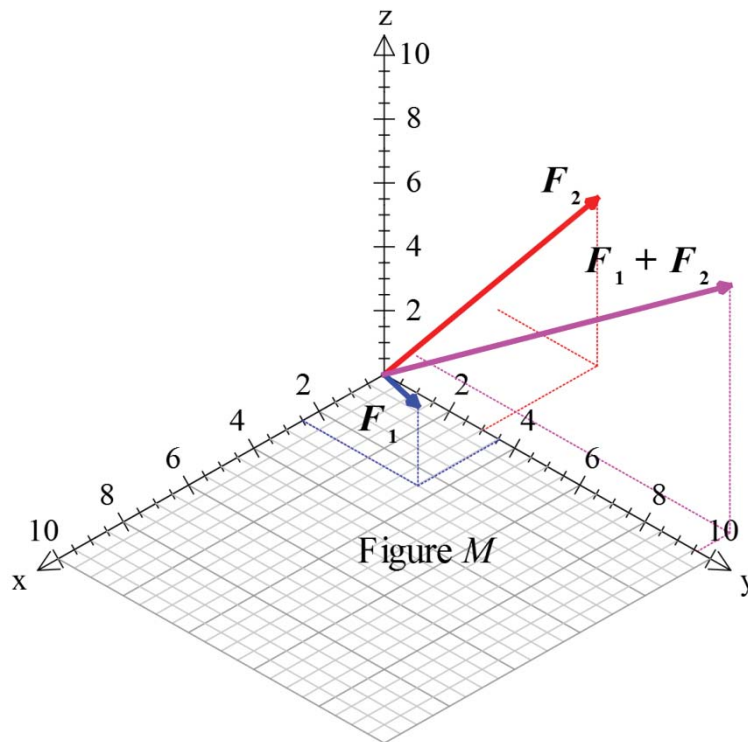
به همین طریق ، F_2 و b موازی هستند ، با $\|F_2\| = 7$ و $\|b\| = 4$ ، پس

$$F_2 = \frac{7}{4}b = \frac{7}{4}(-2i + \sqrt{3}j + 3k)$$

در نهایت

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_2 &= \frac{5}{4} \left(2\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \right) + \frac{7}{4} \left(-2\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[-2\mathbf{i} + \left(10\sqrt{2} + 7\sqrt{3} \right) \mathbf{j} + 31\mathbf{k} \right]
 \end{aligned}$$

نمودار این مثال را در تصویر M ملاحظه می کنید.



قانون کلمب یا کولن 's Law Coulomb

برای اندازه گیری نیروی بین دو بار نقطه ای و یا نیروی الکتریکی ایجاد شده بوسیله یک بار

Electric Force Exerted by a Charge

اندازه نیروی الکترو مغناطیسی بین دو بار الکتریکی نقطه ای با حاصلضرب اندازه بار ها نسبت مستقیم و با مربع فاصله بین دو بار نسبت معکوس دارد.

$$F = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u} \quad (4)$$

در فرمول بالا F بر حسب نیوتن اندازه نیروی الکترو مغناطیسی است که از شارژ q_1 واقع در نقطه Q_1 بر شارژ q واقع در نقطه Q وارد می شود. r بر حسب متر، فاصله بین دو شارژ است.

ϵ_0 گذر دهی فضای آزاد و مساوی است با 8.854×10^{-12}

اگر q_1 و q هر دو یک بار الکتریکی داشته باشند، یعنی یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی، پس ضریب u در فرمول بالا مثبت است و F در جهت u است. این یعنی q از q_1 دور می شود. بر عکس اگر q_1 و q دارای بار های مخالف باشند، پس ضریب منفی است و F جهت مخالف دارد. و لذا q به طرف q_1 کشیده می شود. تصویر N .

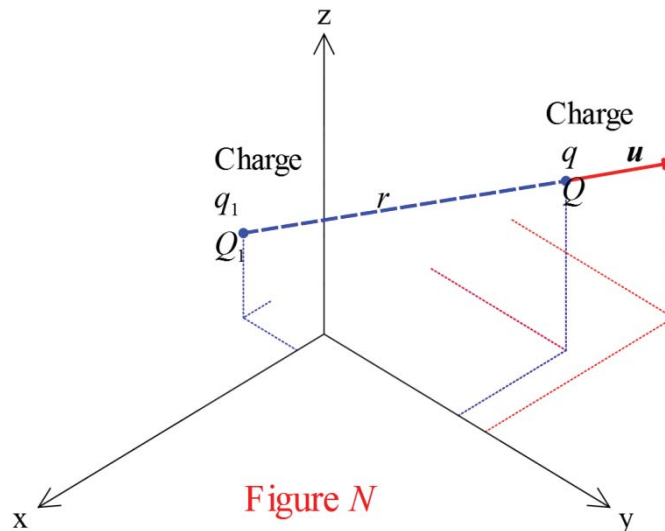


Figure N

اگر شارژ های $q_1, q_2, \dots, q_n$ در نقاط $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ قرار داشته باشند، پس اصل بر هم نهی Principle of Superposition می گوید نیروی الکترو مغناطیسی F توسط این شارژ ها بر روی شارژ q در نقطه Q مساوی است با مجموع شارژ هایی که توسط $q_1, q_2, \dots, q_n$ اعمال می شود و مطابق زیر بدست می آید.

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_j^2} u_j \quad (5)$$

$$r_j = \|\overrightarrow{Q_j Q}\| \quad \text{و} \quad u_j = \frac{\overrightarrow{Q_j Q}}{\|\overrightarrow{Q_j Q}\|}$$

مثال ۶ - فرض کنید بار یک پروتون 1.6×10^{-19} کولن باشد. و بار الکترون -1.6×10^{-19} کولن باشد. مطلوب است نیروی الکترو مغناطیسی F که بر یک بار واحد مثبت واقع در مبدا وارد می شود، اگر پروتون در $(3 \times 10^{-11}, 4 \times 10^{-11}, 0)$ و الکترون در $(0, 0, 10^{-11})$ واقع شده باشند. پاسخ

برای بار واحد در مبدا، فرض می کنیم $q = 1$ و $Q = (0, 0, 0)$ و برای پروتون و الکترون فرض می کنیم

$$\begin{aligned} q_1 &= 1.6 \times 10^{-19} & Q_1 &= (3 \times 10^{-11}, 4 \times 10^{-11}, 0) \\ q_2 &= -1.6 \times 10^{-19} & Q_2 &= (0, 0, 10^{-11}) \end{aligned}$$

باشد، پس

$$r_1 = \|\vec{Q_1Q}\| = \sqrt{(3 \times 10^{-11})^2 + (4 \times 10^{-11})^2} = 10^{-11} \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \times 10^{-11}$$

$$r_2 = \|\vec{Q_2Q}\| = 10^{-11}$$

پس

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\vec{Q_1Q}}{\|\vec{Q_1Q}\|} = \frac{-3 \times 10^{-11} \mathbf{i} - 4 \times 10^{-11} \mathbf{j}}{5 \times 10^{-11}} = -\frac{3}{5} \mathbf{i} - \frac{4}{5} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\vec{Q_2Q}}{\|\vec{Q_2Q}\|} = \frac{-10^{-11} \mathbf{k}}{10^{-11}} = -\mathbf{k}$$

و در نهایت، بر اساس شماره (۵) داریم.

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{u}_1 + \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{u}_2$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19})(1)}{4\pi\epsilon_0 (5 \times 10^{-11})^2} \left(-\frac{3}{5} \mathbf{i} - \frac{4}{5} \mathbf{j}\right) + \frac{(-1.6 \times 10^{-19})(1)}{4\pi\epsilon_0 (10^{-11})^2} (-\mathbf{k})$$

$$= \frac{1.6 \times 10^{-19}}{4\pi\epsilon_0 10^{-22}} \left(-\frac{3}{125} \mathbf{i} - \frac{4}{125} \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

$$\approx 1.150 \times 10^{11} (-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 125\mathbf{k})$$

بردار ها در فضای دو بعدی Vectors in the Planeبرای هر برداری $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}, a_2 \mathbf{j}, a_3 \mathbf{k}$ در صورتی که $a_3 = 0$ باشد، آسان تر است بنویسیم

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} \quad (۶)$$

در این صورت نقطه (a_1, a_2) در رابطه با بردار شماره (۶) در صفحه مختصات xy قرار دارد. تصویر O . اگر بردار صفر نباشد، پس می توان آنرا بوسیله طول $\|\mathbf{a}\|$ و زاویه θ که نسبت به قسمت مثبت محور x می سازد، بیان کرد.

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \quad (۷)$$

در مورد بردار ها در فضای دو بعدی در بخش ۳.۱ مفصل صحبت کردیم.

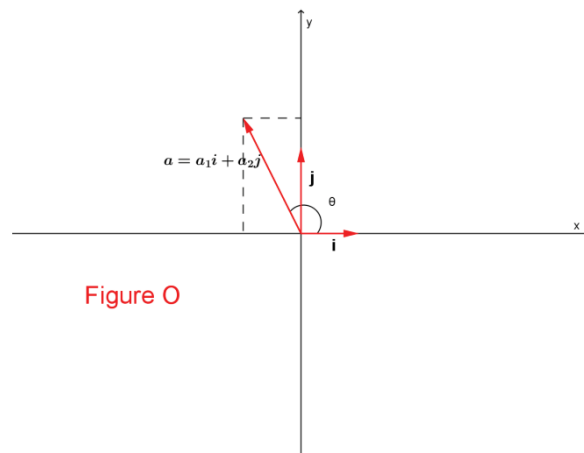


Figure O

مثال ۷ - یک ورزشکار پرش ارتفاع به وزن 150 پوند ، فشاری به اندازه 300 پوند بر زمین با زاویه $\frac{\pi}{3}$ وارد می کند. تصویر P . اگر فرض کنیم وزن ورزشکار مستقیماً به طرف پایین بر زمین فشار می آورد ، مطلوب است مجموع فشاری که بر زمین وارد می شود.

پاسخ

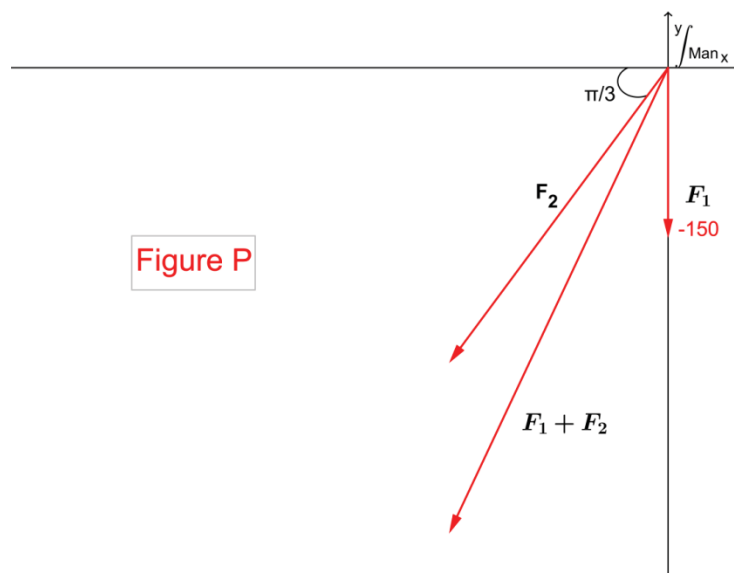
سیستم مختصات مطابق تصویر P رسم می کنیم. چون جهت F_1 به طرف پایین است و چون زاویه θ که بوسیله F_2 نسبت به قسمت مثبت محور x ایجاد می شود مساوی $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ است ، پس داریم.

$$F_1 = -150j$$

$$F_2 = \|F_2\| \left(\cos \frac{4\pi}{3} i + \sin \frac{4\pi}{3} j \right) = 300 \left(-\frac{1}{2} i - \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) = -150(i + \sqrt{3}j)$$

لذا مجموع نیروی F که بر زمین وارد می شود مطابق زیر است.

$$F = F_1 + F_2 = -150j - 150(i + \sqrt{3}j) = -150i - 150(1 + \sqrt{3})j$$



مثال ۸ - نشان دهید قطر های یک متوازی الضلاع یکدیگر را قطع می کنند.

پاسخ

فرض می کنیم که متوازی الضلاع روی صفحه مختصات xy قرار دارد ، همانطور که در تصویر Q ملاحظه می کنید. و فرض کنید a و b بردار هایی باشند که روی دو ضلعی باشند که شامل مبدا مختصات هستند. پس $a + b$ و $a - b$ روی قطر ها قرار دارند. بردار $\frac{1}{2}(a + b)$ مبدا را به نقطه میانی قطر $a + b$ متصل می کند و بردار $\frac{1}{2}(a - b) + b$ مبدا را به نقطه میانی قطر دیگر متصل می کند. چون

$$\frac{1}{2}(a+b) = b + \frac{1}{2}(a-b)$$

پس این دو نقطه های میانی روی هم قرار دارند. در نتیجه قطر ها یکدیگر را قطع می کنند.

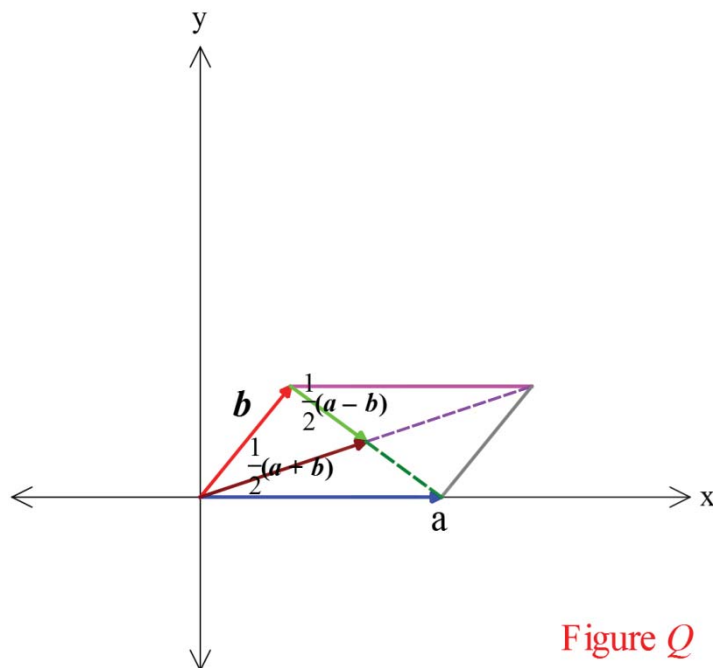


Figure Q

تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر $\overrightarrow{PQ}$ را به صورت یک بردار به شکل $ai + bj + ck$ بنویسید.

۱) $P = (0,0,0)$ ، $Q = (3, -4, 1)$

۲) $P = (0, 1, 0)$ ، $Q = (3, -1, \sqrt{7})$

در تمرینات زیر $a+b$ و $a-b$ و ca را پیدا کنید.

۳) $a = 2i - 5j + 10k$ ، $b = -i + 2j - 9k$ ، $c = 2$

۴) $a = 2i$ ، $b = j + k$ ، $c = \frac{1}{3}$

در تمرینات زیر ، طول بردار را پیدا کنید.

۵) $a = i - j + k$

$$۶) \quad \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

$$۷) \quad \mathbf{c} = \sqrt{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

در تمرینات زیر یک بردار واحد هم جهت با بردار داده شده پیدا کنید.

$$۸) \quad \mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

$$۹) \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

۱۰ -

الف - فرض کنید $\mathbf{a}$ یک بردار غیر صفر است در سیستم xy ، و فرض کنید θ زاویه بین قسمت مثبت محور x و $\mathbf{a}$ در جهت عقربه ساعت باشد. نشان دهید که

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

است.

ب - فرض کنید $\mathbf{u}$ یک بردار واحد در سیستم xy است. با استفاده از قسمت الف، نشان دهید که

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

است، برای هر عدد θ .

۱۱ - سه بچه که در نقاط P ، Q ، R قرار دارند، یک توپ را که در مبدا مختصات قرار دارد، می کشند. بچه ای که در نقطه P قرار دارد، توپ را با نیروی ۲۰ پوند به طرف منفی y می کشد. بچه ای که در نقطه Q قرار دارد، توپ را با نیروی ۱۰۰ پوند در جهت زاویه $\frac{\pi}{3}$ نسبت به قسمت مثبت محور x می کشد. اگر قرار است مجموع نیروهای وارد بر توپ صفر باشد، مطلوب است نیروی $\mathbf{F}$ که بچه ای که در R قرار، باید اعمال کند و همچنین تانژانت زاویه ای که آن بچه باید آن نیرو را وارد کند. تصویر U .

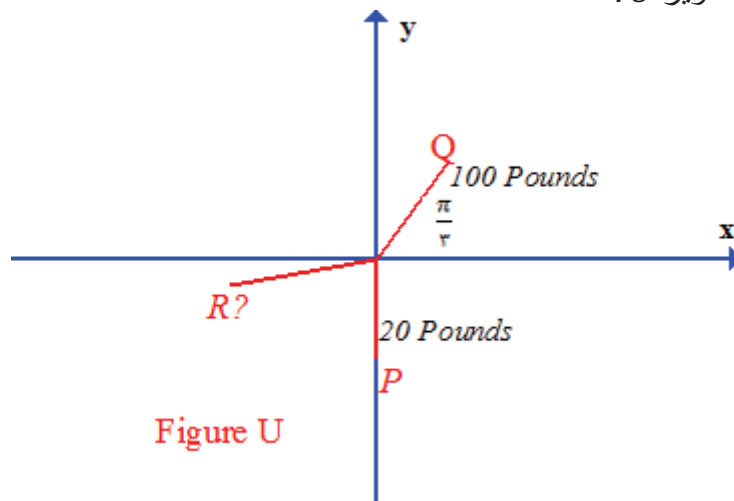


Figure U

پاسخ تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر $\overrightarrow{PQ}$ را به صورت یک بردار به شکل $ai + bj + ck$ بنویسید.

$$۱) \quad P = (0,0,0), \quad Q = (۳, -۴, ۱)$$

$$\overrightarrow{PQ} = ۳i - ۴j + ۱k$$

$$۲) \quad P = (0, ۱, 0), \quad Q = (۳, -۱, \sqrt{۷})$$

$$\overrightarrow{PQ} = ۳i - ۲j + \sqrt{۷}k$$

در تمرینات زیر $a + b$ و $a - b$ و ca را پیدا کنید.

$$۳) \quad a = ۲i - ۵j + ۱k, \quad b = -i + ۲j - ۹k, \quad c = ۲$$

$$a + b = i - ۳j + k$$

$$a - b = ۳i - ۷j + ۱۹k$$

$$ca = ۴i - ۱۰j + ۲k$$

$$۴) \quad a = ۲i, \quad b = j + k, \quad c = \frac{۱}{۳}$$

$$a + b = ۲i + j + k$$

$$a - b = ۲i - j - k$$

$$ca = \frac{۲}{۳}i$$

در تمرینات زیر ، طول بردار را پیدا کنید.

$$۵) \quad a = i - j + k$$

$$\|a\| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$۶) \quad b = -۳i + ۴j - ۱۲k$$

$$\|b\| = \sqrt{(-۳)^۲ + ۴^۲ + (-۱۲)^۲} = ۱۳$$

$$۷) \quad c = \sqrt{۲}i - j + k$$

$$\|c\| = \sqrt{\left(\sqrt{۲}\right)^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} = ۲$$

در تمرینات زیر یک بردار واحد هم جهت با بردار داده شده پیدا کنید.

۸) $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{13} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$$

۹) $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

$$\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

۱۰ -

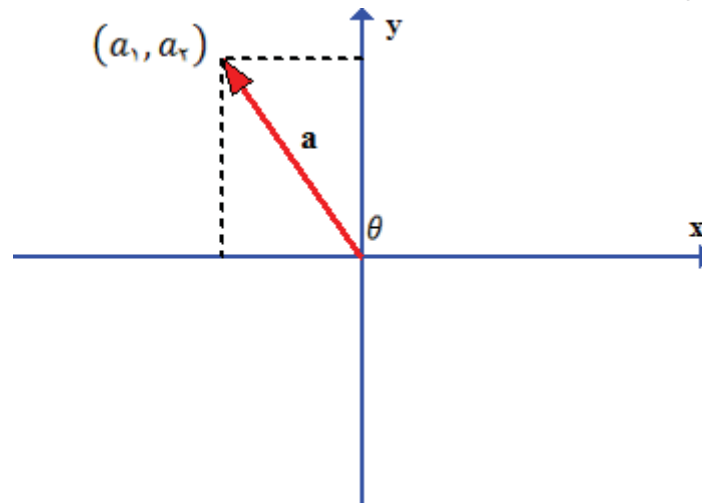
الف - فرض کنید $\mathbf{a}$ یک بردار غیر صفر است در سیستم xy ، و فرض کنید θ زاویه بین قسمت مثبت محور x و $\mathbf{a}$ در جهت عقربه ساعت باشد. نشان دهید که

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

است.

پاسخ

اگر بردار $\mathbf{a}$ را در سیستم xy طوری قرار دهیم که نقطه شروع آن در مبدا مختصات و نقطه پایانی آن (a_1, a_2) باشد، پس $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ است. بر اساس تعریف $\sin \theta$ و $\cos \theta$ داریم.



$$\cos \theta = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}$$

پس

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} = \|\mathbf{a}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

ب - فرض کنید u یک بردار واحد در سیستم xy است. با استفاده از قسمت الف، نشان دهید که

$$u = \cos \theta i + \sin \theta j$$

است، برای هر عدد θ .

پاسخ

فرض می کنیم θ زاویه بین قسمت مثبت محور x و u باشد. چون $u = 1$ پس بر اساس قسمت الف داریم.

$$u = \cos \theta i + \sin \theta j$$

۱۱ - سه بچه که در نقاط P ، Q ، R قرار دارند، یک توپ را که در مبدا مختصات قرار دارد، می کشند. بچه ای که در نقطه P قرار دارد، توپ را با نیروی ۲۰ پوند به طرف منفی y می کشد. بچه ای که در نقطه Q قرار دارد، توپ را با نیروی ۱۰۰ پوند در جهت زاویه $\frac{\pi}{3}$ نسبت به قسمت مثبت محور x می کشد. اگر قرار است مجموع نیروهای وارد بر توپ صفر باشد، مطلوب است نیروی F بچه ای که در R قرار، باید اعمال کند و همچنین تانژانت زاویه ای که آن بچه باید آن نیرو را وارد کند. تصویر U .

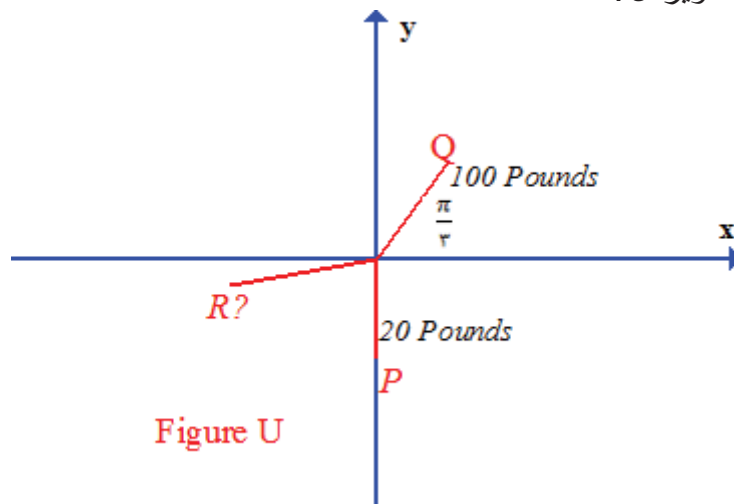


Figure U

پاسخ

فرض می کنیم $F_1 = -20j$ نیروی وارده توسط بچه در نقطه P باشد. و نیروی وارده توسط بچه در Q مطابق زیر باشد.

$$F_2 = 100 \left(\cos \frac{\pi}{3} i + \sin \frac{\pi}{3} j \right) = 50 \left(i + \sqrt{3} j \right)$$

اگر فرض کنیم F نیروی وارده توسط بچه سوم در R باشد، و θ زاویه ای باشد که F نسبت به قسمت مثبت محور x می سازد، باشد، پس

$$F = \|F\|(\cos \theta i + \sin \theta j)$$

است. اگر قرار است مجموع نیروهای وارد بر توپ، 0 باشد، پس باید داشته باشیم.

$$F_1 + F_2 + F = 0$$

یا

$$-۲ \circ \mathbf{j} + ۵ \circ \left(\mathbf{i} + \sqrt{۳} \mathbf{j} \right) + \| \mathbf{F} \| (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

با تلفیق ضریب های $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ داریم.

$$۵ \circ + \| \mathbf{F} \| \cos \theta = 0 \quad \text{و} \quad -۲ \circ + ۵ \circ \sqrt{۳} + \| \mathbf{F} \| \sin \theta = 0$$

پس

$$\| \mathbf{F} \| \cos \theta = -۵ \circ \quad \text{و} \quad \| \mathbf{F} \| \sin \theta = ۲ \circ - ۵ \circ \sqrt{۳}$$

لذا

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{۲ \circ - ۵ \circ \sqrt{۳}}{-۵ \circ} = \frac{۵ \sqrt{۳} - ۲}{۵}$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \| \mathbf{F} \| (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = \| \mathbf{F} \| \cos \theta \mathbf{i} + \| \mathbf{F} \| \sin \theta \mathbf{j} \\ &= -۵ \circ \mathbf{i} + \left(۲ \circ - ۵ \circ \sqrt{۳} \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

۳.۴ - ضرب نقطه ای The Dot Product

توجه - در زبان انگلیسی نماد $\cdot$ یعنی یک نقطه، نماد ضرب است. مثلاً برای نوشتن $12 = 3 \times 4$ می نویسند $12 = 4 \cdot 3$

این بخش بنام ضرب نقطه ای نام داده می شود، زیرا برای ضرب کردن دو بردار بین آنها یک نقطه گذاشته می شود. البته نوع دیگری هم برای ضرب دو بردار داریم که در بخش بعد به آن می پردازیم.

یک طریق ضرب دو بردار این است که مولفه های بردار ها را به ترتیب در هم ضرب کنیم. همان طور که در جمع و تفریق دو بردار عمل می کردیم. اما این نوع ضرب برداری اهمیت فیزیکی کمی دارد و تقریباً کار بردی ندارد. همچنین، حاصل ضرب نقطه ای دو بردار، یک عدد است و نه یک بردار.

تعریف ضرب نقطه ای Definition of Dot Product

فرض می کنیم $a = a_1 i, a_2 j, a_3 k$ و $b = b_1 i, b_2 j, b_3 k$ دو بردار باشند. ضرب نقطه ای **Dot Product** یا ضرب داخلی **Inner Product** بردار های a و b عدد $a \cdot b$ است با تعریف زیر.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1)$$

از شماره (۱) نتیجه می شود که

$$a \cdot i = i \cdot a = a_1 \quad a \cdot j = j \cdot a = a_2 \quad a \cdot k = k \cdot a = a_3$$

و بطور کلی

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \quad \text{و} \quad i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

مثال ۱ - فرض کنید $a = 3i - j - 2k$ و $b = 2i - 3j + \frac{1}{2}k$ باشد. مطلوب است $a \cdot b$

پاسخ

$$a \cdot b = 3(2) + (-1)(-3) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

ملاحظه می کنید که حاصل ضرب نقطه ای دو بردار، یک عدد است و نه یک بردار. ضرب نقطه ای، بسیاری از قوانین اعداد حقیقی را برقرار می کند. مثلاً

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (ca) \cdot b = c(a \cdot b) = a \cdot c(b)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

زاویه Angle بین دو بردار غیر صفر a و b زاویه θ تعریف می شود، بطوری که

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

است. و این زاویه از دو پاره خط جهت دار که نقطه ابتدایی آنها مبدا مختصات است تشکیل می شود. تصویر A .

رابطه بین ضرب نقطه ای و زاویه بین دو بردار در قضیه بعدی توضیح داده می شود.

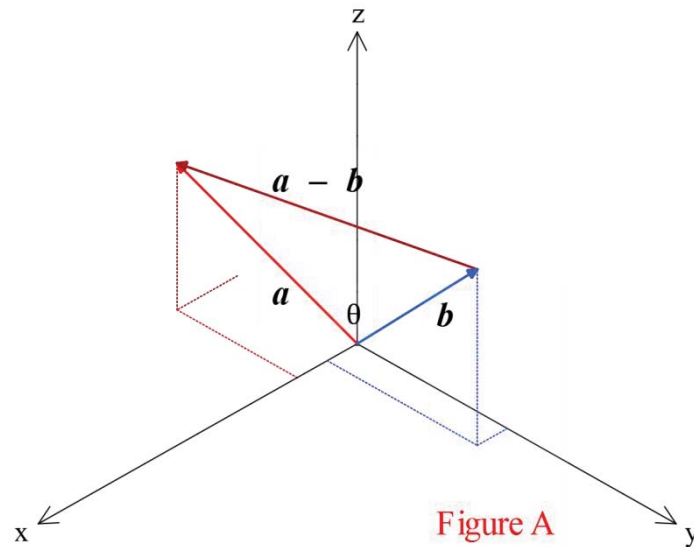


Figure A

قضیه

فرض می کنیم $a = a_1 i, a_2 j, a_3 k$ و $b = b_1 i, b_2 j, b_3 k$ بردارهای غیر صفر باشند، و فرض می کنیم θ زاویه بین a و b باشد، پس

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta \quad (۲)$$

اثبات

آسان ترین راه اثبات فرمول (۲) بکاربردن قانون کسینوس ها در مورد مثلثی که اضلاع آن $a, b, a - b$ است. از این قانون رابطه زیر را بدست می آوریم.

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \|b\| \cos \theta \quad (۳)$$

θ زاویه بین a و b است. با استفاده از تعریف طول بردار و این حقیقت که

$$a - b = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

است، شماره (۳) را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} & (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\|a\| \|b\| \cos \theta \end{aligned}$$

با بسط دادن جمله های مربع در سمت چپ معادله بالا و حذف کردن جمله های متشابه از طرفین معادله، خواهیم داشت.

$$-2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 - 2a_3 b_3 = -2\|a\| \|b\| \cos \theta$$

که نتیجه می گیریم.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|a\| \|b\| \cos \theta$$

قضیه فرعی

الف - دو بردار غیر صفر a و b بر یک دیگر عمود هستند اگر فقط و فقط $a \cdot b = 0$ باشد. توجه داشته باشید که نماد بردار صفر باید برجسته باشد و یا یک پیکان روی آن. مانند $\vec{0}$ و یا $\vec{0}$.

ب - برای هر بردار a داریم $a \cdot a = \|a\|^2$

مثال ۲ - نشان دهید که دو بردار زیر بر هم عمود هستند.

$$a = -4i + 5j + 7k \quad \text{و} \quad b = i - 2j + 2k$$

پاسخ

با استفاده از شماره (۱) و محاسبه ضرب نقطه ای داریم.

$$a \cdot b = (-4)(1) + (5)(-2) + 7(2) = 0$$

پس بر اساس قضیه فرعی بالا a و b بر هم عمود هستند.

اگر شماره (۲) را برای $\cos \theta$ حل کنیم، داریم.

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \quad (۴)$$

چون $0 \leq \theta \leq \pi$ است، پس بوسیله شماره (۴) زاویه بین a و b منحصرأ مشخص می شود.

مثال ۳ - زاویه بین دو بردار زیر را پیدا کنید.

$$a = 2i - j + 2k \quad \text{و} \quad b = i - j$$

پاسخ

چون

$$\|a\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 \quad \text{و} \quad \|b\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

و

$$a \cdot b = 2(1) + (-1)(-1) + 2(0) = 3$$

پس بر اساس شماره (۴) داریم.

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ، تصویر B

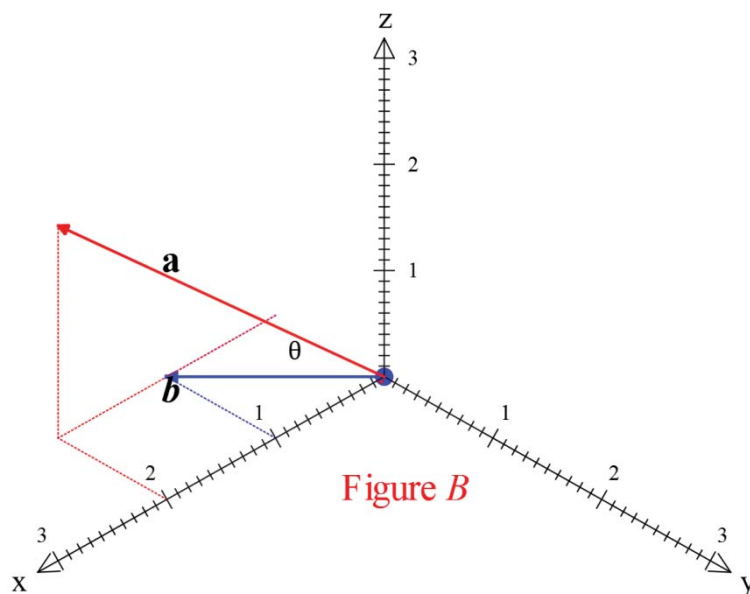
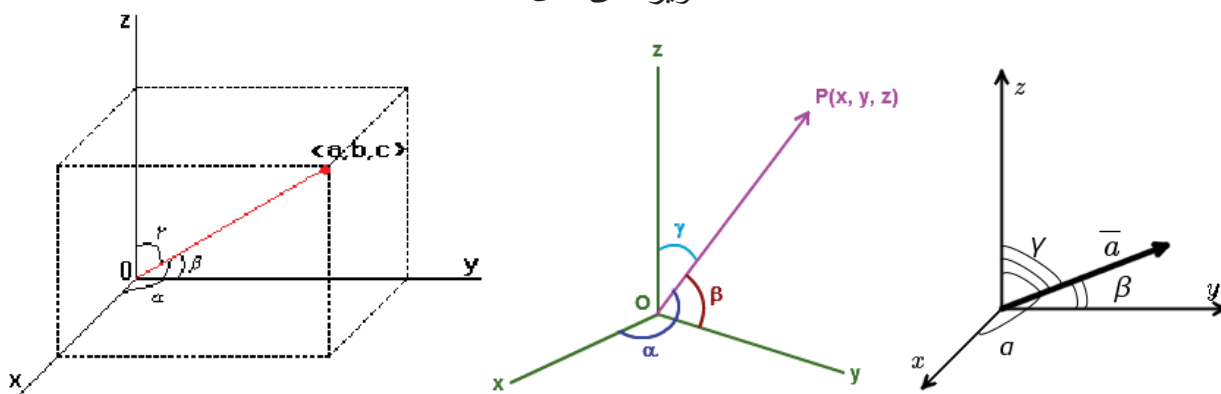


Figure B

زاویه های α ، β ، γ که یک بردار غیر صفر a به ترتیب با قسمت های مثبت محور های x, y, z می سازد، بنام زاویه های راهنما ی a نامیده می شوند. تصویر های C .

زاویه های راهنما : Direction Angles
کسینوس های راهنما : Direction Cosines

تصویر های C 

اگر $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ باشند، پس بر اساس شماره های (۴) و (۱) داریم.

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{i}\|} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{j}\|} = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$$

و $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ بنام کسینوس های رهنمای $\mathbf{a}$ نامیده می شوند. و لذا
 $a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos \alpha, \quad a_2 = \|\mathbf{a}\| \cos \beta, \quad a_3 = \|\mathbf{a}\| \cos \gamma$
 پس می توانیم $\mathbf{a}$ را به شکل زیر هم بنویسیم.

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$$

مثال ۴ - فرض کنید $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ باشد. کسینوس های رهنمای $\mathbf{a}$ را پیدا کنید.

پاسخ

چون داریم

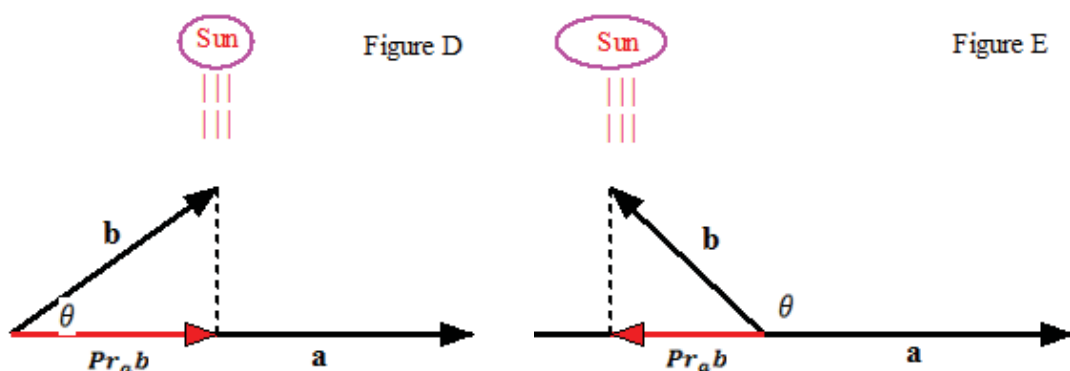
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$

پس

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{38}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{38}}, \quad \cos \gamma = \frac{-5}{\sqrt{38}}$$

تصویر یک بردار روی بردار دیگر Projection of One Vector Onto Another

فرض کنید دو بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مطابق تصویر D و یا تصویر E قرار دارند. و خورشید روی خطی که شامل بردار $\mathbf{a}$ است، سایه می اندازد.



می توانیم آن سایه را یک بردار موازی $\mathbf{a}$ تصور کنیم، که ما آنرا تصویر $\mathbf{b}$ روی $\mathbf{a}$ می نامیم و آنرا با نماد $Pr_a \mathbf{b}$ نشان می دهیم. ملاحظه می کنید که Pr دو حرف اول کلمه Projection است. چون $Pr_a \mathbf{b}$ یا موازی $\mathbf{a}$ است و یا $\mathbf{0}$ است. پس باید یک مضرب عددی $\mathbf{a}$ باشد. واضح است که طول $Pr_a \mathbf{b}$ مساوی $\|\mathbf{b}\| |\cos \theta|$ است، و θ زاویه بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است، بطوری که $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد. پس داریم.

$$Pr_a b = \begin{cases} \|b\| \cos \theta \frac{1}{\|a\|} a & \text{برای } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \|b\| (-\cos \theta) \frac{1}{\|a\|} (-a) = \|b\| \cos \theta \frac{1}{\|a\|} a & \text{برای } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

در نتیجه بدون در نظر گرفتن بازه زاویه θ از شماره (۴) نتیجه می گیریم که

$$Pr_a b = \|b\| \cos \theta \frac{1}{\|a\|} a = \|b\| \left(\frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \right) \frac{1}{\|a\|} a = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a$$

پس می توانیم تصویر را بر حسب ضرب نقطه ای تعریف کنیم.

تعریف

فرض می کنیم a یک بردار غیر صفر باشد. تصویر بردار b روی a ، بردار $Pr_a b$ است که مطابق زیر تعریف می شود.

$$Pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a \quad (۵)$$

مثال ۵ - فرض می کنیم $a = 3i - j - 2k$ و $b = 2i - 3j + \frac{1}{4}k$ باشد. $Pr_a b$ را پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس مثال ۱ می دانیم که $a \cdot b = 8$ است و با یک محاسبه ساده پیدا می کنیم که $\|a\|^2 = 14$ است. در نتیجه داریم

$$Pr_a b = \frac{8}{14} (3i - j - 2k) = \frac{4}{7} (3i - j - 2k)$$

برای استفاده آینده، یک فرمول برای طول $P_a b$ بر حسب a و b پیدا می کنیم. با استفاده از شماره (۵) داریم.

$$\|P_a b\| = \left\| \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|^2} \|a\| = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|}$$

پس

$$\|P_a b\| = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|} \quad (۶)$$

ملاحظه می کنید که برای $a \cdot b$ در شماره (۶) نماد قدر مطلق بکار بردیم، برای این که زاویه بین این دو بردار ممکن است حاد و یا منفرجه باشد. که در هر صورت مقدار مثبت آن در نظر است.

تجزیه یک بردار Resolution of a Vector

اگر a و a' دو بردار عمود بر هم باشند، پس هر بردار غیر صفر b که در همان صفحه قرار دارد، می تواند به صورت مجموع دو بردار $Pr_a b$ و $Pr_{a'} b$ بیان شود و این دو بردار به ترتیب موازی a و a' هستند. تصویرهای F

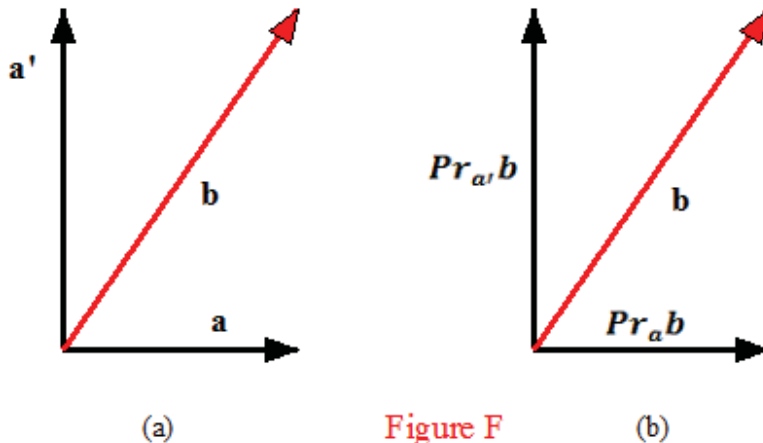


Figure F

$$b = Pr_a b + Pr_{a'} b$$

می گوییم b به بردارهایی موازی a و a' تجزیه Resolved شده است. از نظر هندسی، $Pr_a b$ و $Pr_{a'} b$ اضلاع مثلث قائم الزاویه ای هستند که وتر آن b و اضلاع آن موازی a و a' هستند. لزومی ندارد هر دو تصویر را مستقیماً محاسبه کنیم. زیرا اگر b و $Pr_a b$ بدانیم، پس می توانیم $Pr_{a'} b$ را با انجام عمل تفریق بدست آوریم.

$$Pr_{a'} b = b - Pr_a b \quad (۷)$$

مثال ۶- فرض می کنیم $a = i + j$ و $a' = i - j$ و $b = 3i - 4j$ باشند. b را به بردارهایی موازی a و a' تجزیه کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که بردارها در صفحه مختصات xy قرار دارند و a و a' عمود بر هم هستند، چون $a \cdot a' = 0$ است. برای تجزیه b ملاحظه می کنید که $a \cdot b = -1$ و $\|a\|^2 = 2$ پس بر اساس شماره (۵) داریم.

$$pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = -\frac{1}{2}(i + j) = -\frac{1}{2}a$$

$$Pr_{a'} b = b - Pr_a b = (3i - 4j) - \left(-\frac{1}{2}(i + j)\right) = \frac{7}{2}i - \frac{7}{2}j = \frac{7}{2}a'$$

پس

$$b = -\frac{1}{2}a + \frac{7}{2}a'$$

کار انجام شده بوسیله یک نیروی ثابت Work Done by a Constant Force

یکی از کاربردهای تصویر بردار ها ، در رابطه با کار انجام شده توسط یک نیرو بر روی یک شئی متحرک است. فرض کنید یک نیروی ثابت F بر یک شئی در حال حرکت در طول خط PQ عمل می کند و جهت نیرو موازی آن خط است. طبق تعریف کار که در بخش ۳.۶ کتاب انتگرال آوا توسط همین قلم ، گفته شد

$$Work = Force * Distance = c(b - a)$$

مسافت * نیرو = کار

کار W انجام شده مساوی $\|F\|\|\overrightarrow{PQ}\|$ است و یا مساوی $\|F\|\|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta$ است. مثبت و منفی بودن کار بستگی به این دارد که آیا F در جهت $\overrightarrow{PQ}$ است و یا در جهت مخالف آن. اگر F موازی $\overrightarrow{PQ}$ نباشد ، پس F را به یک بردار موازی $\overrightarrow{PQ}$ و یک بردار عمود بر $\overrightarrow{PQ}$ تجزیه می کنیم. تصویر G . بردار $Pr_{\overrightarrow{PQ}}F$ که موازی $\overrightarrow{PQ}$ است ، روی سرعت شئی اثر می گذرد و در نتیجه روی شئی کار انجام می دهد. بر عکس ، بردار عمود بر $\overrightarrow{PQ}$ ، بر سرعت اثر ندارد و لذا در رابطه با کار آنرا نادیده می انگاریم. پس کار انجام شده توسط F عبارت است از کار انجام شده توسط نیروی $Pr_{\overrightarrow{PQ}}F$ موازی $\overrightarrow{PQ}$ است. پس اگر θ زاویه بین F و $\overrightarrow{PQ}$ باشد ، داریم.

$$W = \begin{cases} \|Pr_{\overrightarrow{PQ}}F\|\|\overrightarrow{PQ}\| & \text{برای } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\|Pr_{\overrightarrow{PQ}}F\|\|\overrightarrow{PQ}\| & \text{برای } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (۸)$$

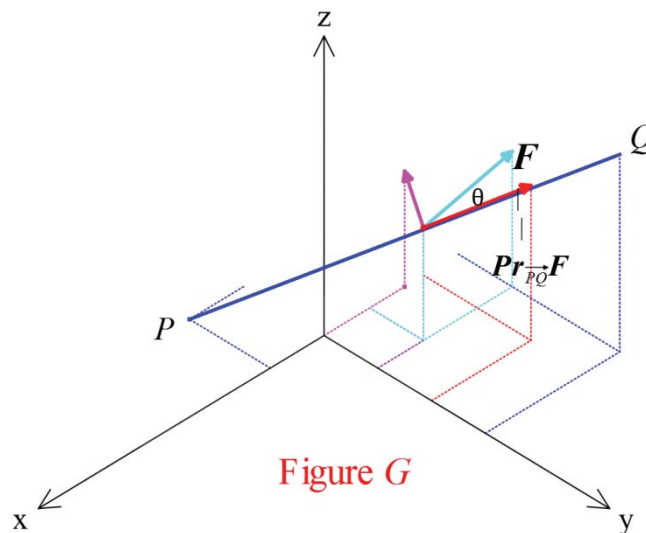


Figure G

اما بر اساس شماره (۶) داریم.

$$\|Pr_{\overrightarrow{PQ}}F\| = \frac{|F \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \begin{cases} \frac{|F \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} & \text{برای } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{|F \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} & \text{برای } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (9)$$

فرمول های (۸) و (۹) با هم یعنی

$$W = F \cdot \quad (10)$$

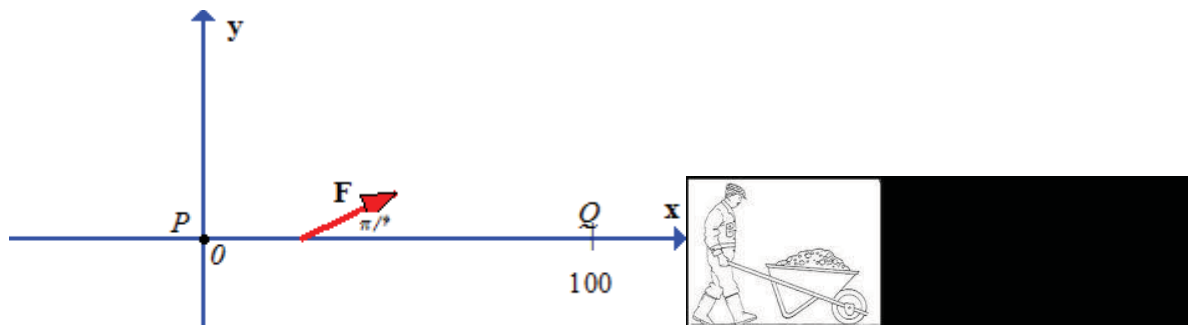
با استفاده از شماره (۲) می توانیم شماره (۱۰) را به صورت زیر بنویسیم.

$$W = \|F\| \|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta \quad (11)$$

لذا اگر نیرویی به یک شئی متحرک وارد شود، هر چه جهت نیرو به جهت حرکت نزدیک تر باشد، کار بیشتری روی شئی انجام می شود. به همین جهت هنگام برف پارو کردن هر قدر دسته پارو افقی تر باشد، کار آسان تر است تا هنگامی که دسته پارو بالا نگاه داشته شود.

مثال ۷ - فرض کنید یک نیروی F به اندازه ۵۰ پوند بر یک فرقان با زاویه $\frac{\pi}{6}$ نسبت به افق وارد می شود و فرقان در جهت افق ۱۰۰ فوت جابجا می شود. تصویر H . مطلوب است کار انجام شده بر فرقان.

تصویر H



پاسخ

فرض می کنیم فرقان در طول محور x از صفر تا ۱۰۰ جابجا می شود، و نیروی F در صفحه مختصات xy عمل می کند. تصویر H . بطوری که $P = (0,0)$ و $Q = (100,0)$ باشد. لذا $\overrightarrow{PQ} = 100\mathbf{i}$ و $\|\overrightarrow{PQ}\| = 100$ است. چون $\|F\| = 50$ و زاویه θ بین F و $\overrightarrow{PQ}$ مساوی $\frac{\pi}{6}$ است، پس بر اساس شماره (۱۱) داریم.

$$W = \|F\| \|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta = 50 \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500 \sqrt{3} \text{ فوت پوند}$$

تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر a, b و سینوس زاویه θ بین a و b را پیدا کنید.

۱) $a = i + j - k$ ، $b = 2i - 3j + 4k$

۲) $a = \sqrt{2}i + 4j + \sqrt{3}k$ ، $b = -\sqrt{2}i - \sqrt{3}j + 2k$

۳ - زاویه θ بین بردار $\sqrt{6}i + j - k$ و قسمت مثبت محور x پیدا کنید.

در تمرینات زیر آیا a و b بر هم عمود هستند؟

۴) $a = i - j$ ، $b = i + j$

۵) $a = \sqrt{2}i + 3j + k$ ، $b = -i + \sqrt{2}j + 5k$

در تمرینات زیر $Pr_a b$ را پیدا کنید.

۶) $a = 2i - j + 2k$ ، $b = i$

۷) $a = i + j$ ، $b = -i + 2j + 4k$

در تمرینات زیر a و a' و b روی یک صفحه مختصات قرار دارند. نشان دهید a و a' بر هم عمود هستند ، و سپس b را به بردار هایی موازی a و a' تجزیه کنید.

۸) $a = i + 2j - k$ ، $a' = j + 2k$ ، $b = 3i + j - 13k$

۹) $a = 2i - 4j + 5k$ ، $a' = 2i + 6j + 4k$ ، $b = i + 13j + k$

در تمرینات زیر با استفاده از تعریف ضرب نقطه ای ، ثابت کنید که اظهارات زیر برای هر برداری صادق است.

۱۰) $a \cdot a = \|a\|^2$

۱۱) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

۱۲ - اگر a بر b و c عمود باشد ، ثابت کنید a بر $b + c$ عمود است.

۱۳ - با استفاده از دومعادله زیر

$$\|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

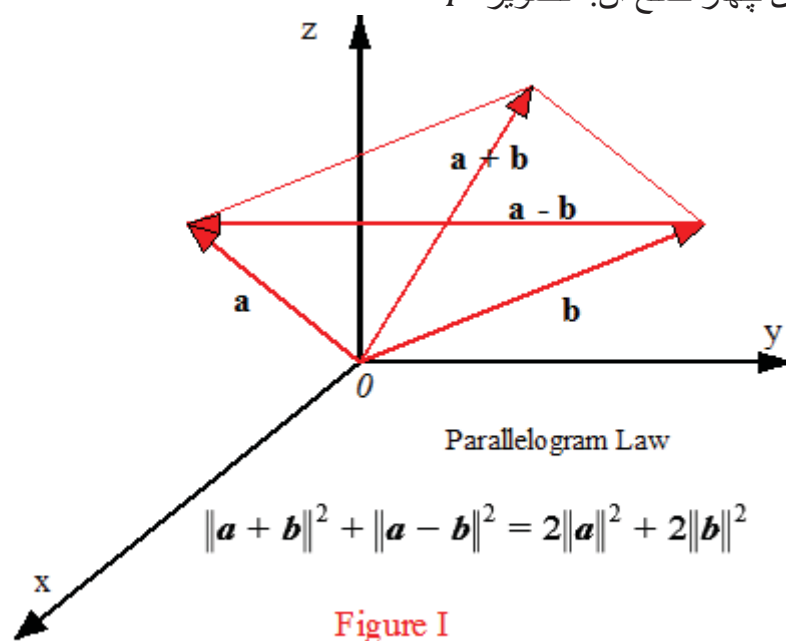
$$\|a - b\|^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

قانون متوازی الضلاع Parallelogram Law را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

تفسیر هندسی این نتیجه مطابق زیر است.

مجموع مربع های طول قطر های متوازی الضلاع که دو ضلع آن a و b باشد ، مساوی است با مجموع مربع های چهار ضلع آن. تصویر I



۱۴ - یک نفر یک نیروی ۱۰۰ پوندی بر یک فرقان با زاویه $\frac{\pi}{6}$ نسبت به افق وارد می کند و فرقان را ۵۰۰ فوت جابجا می کند. کار انجام شده روی فرقان را حساب کنید.

پاسخ تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر $a \cdot b$ و سینوس زاویه θ بین a و b را پیدا کنید.

۱) $a = i + j - k$ ، $b = 2i - 3j + 4k$

$$a \cdot b = (1)(2) + (1)(-3) + (-1)(4) = -5$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} = \frac{-5}{\sqrt{3} \sqrt{29}} = \frac{-5}{\sqrt{87}}$$

۲) $a = \sqrt{2}i + 4j + \sqrt{3}k$ ، $b = -\sqrt{2}i - \sqrt{3}j + 2k$

$$a \cdot b = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (4)(-\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2) = -2 - 2\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{21} \cdot 3} = \frac{-2(1 + \sqrt{3})}{3\sqrt{21}}$$

۳ - زاویه θ بین بردار $\sqrt{6}i + j - k$ و قسمت مثبت محور x پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $a = \sqrt{6}i + j - k$ و $b = 1$ و θ زاویه بین a و b باشد. پس

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8} \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

پس $\theta = \frac{\pi}{6}$ است.

در تمرینات زیر آیا a و b بر هم عمود هستند؟

۴) $a = i - j$ ، $b = i + j$

$$a \cdot b = (1)(1) + (-1)(1) = 0$$

پس این دو بردار بر هم عمود هستند.

۵) $a = \sqrt{2}i + 3j + k$ ، $b = -i + \sqrt{2}j + 5k$

$$a \cdot b = \left(\sqrt{2}\right)(-1) + (3)\left(\sqrt{2}\right) + (1)(5) = 2\sqrt{2} + 5 \neq 0$$

پس این دو بردار بر هم عمود نیستند.

در تمرینات زیر $Pr_a b$ را پیدا کنید.

$$۶) \quad a = 2i - j + 2k, \quad b = i$$

$$Pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = \frac{2}{9} (2i - j + 2k) = \frac{4}{9} i - \frac{2}{9} j + \frac{4}{9} k$$

$$۷) \quad a = i + j, \quad b = -i + 2j + 4k$$

$$Pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = \frac{1}{2} (i + j)$$

در تمرینات زیر a و a' و b روی یک صفحه مختصات قرار دارند. نشان دهید a و a' بر هم عمود هستند، و سپس b را به بردارهایی موازی a و a' تجزیه کنید.

$$۸) \quad a = i + 2j - k, \quad a' = j + 2k, \quad b = 3i + j - 13k$$

$$a \cdot a' = 0 + 2 - 2 = 0$$

پس a و a' بر هم عمود هستند.

$$pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = \frac{18}{6} a = 3a = 3(i + 2j - k)$$

$$Pr_{a'} b = b - pr_a b = 3i + j - 13k - 3(i + 2j - k) = -5j - 10k = -5a'$$

پس

$$b = 3a - 5a'$$

$$۹) \quad a = 2i - 4j + 5k, \quad a' = 2i + 6j + 4k, \quad b = i + 13j + k$$

$$a \cdot a' = 4 - 24 + 20 = 0$$

پس a و a' بر هم عمود هستند.

$$pr_a b = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = -\frac{45}{45} a = -a = -(2i - 4j + 5k)$$

$$Pr_{a'} b = b - pr_a b = i + 13j + k + (2i - 4j + 5k) = 3i + 9j + 6k = \frac{3}{2} a'$$

$$b = -a + \frac{3}{2} a'$$

در تمرینات زیر با استفاده از تعریف ضرب نقطه ای، ثابت کنید که اظهارات زیر برای هر برداری صادق است.

$$۱۰) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1)(a_1) + (a_2)(a_2) + (a_3)(a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\mathbf{a}\|^2$$

$$۱۱) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot [(b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j} + (b_3 + c_3)\mathbf{k}] \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

۱۲ - اگر $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عمود باشد، ثابت کنید $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ عمود است.

پاسخ

اگر $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عمود باشد، پس داریم $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ بطوری که بر اساس تمرین ۱۱ داریم.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0 + 0 = 0$$

پس $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ عمود است.

۱۳ - با استفاده از دو معادله زیر

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

قانون متوازی الضلاع Parallelogram Law را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید

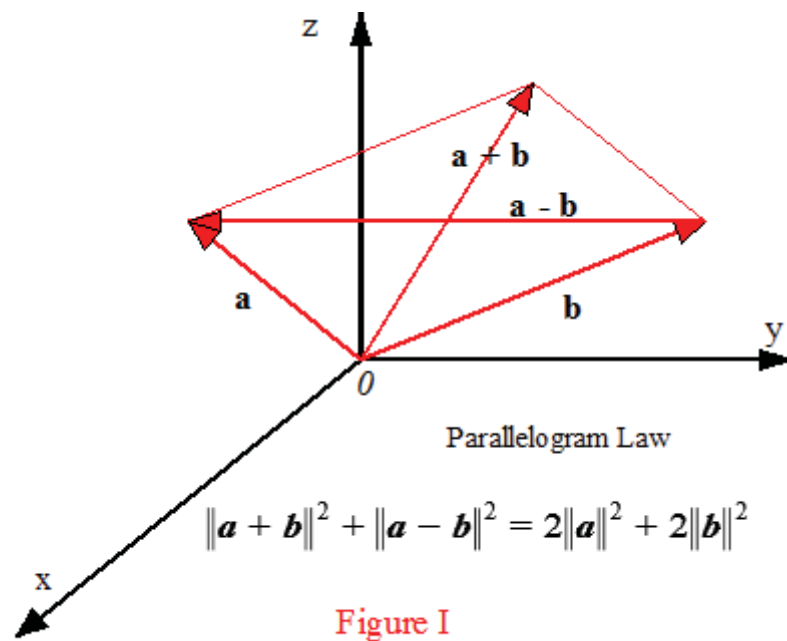
$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$$

تفسیر هندسی این نتیجه مطابق زیر است.

مجموع مربع های طول قطر های متوازی الضلاع که دو ضلع آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد، مساوی است با مجموع مربع های چهار ضلع آن. تصویر I

پاسخ

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$



۱۴ - یک نفر یک نیروی ۱۰۰ پوندی بر یک فرقان با زاویه $\frac{\pi}{6}$ نسبت به افق وارد می کند و فرقان را ۵۰۰ فوت جابجا می کند. کار انجام شده روی فرقان را حساب کنید.

پاسخ

با استفاده از همان راه حل مثال ۷ داریم.

$$PQ = 500i \quad \text{و} \quad F = 100 \left(\cos \frac{\pi}{6} i + \sin \frac{\pi}{6} j \right) = 50\sqrt{3}i + 50j$$

پس

$$W = F \cdot PQ = (50\sqrt{3})500 = 25000\sqrt{3} \quad \text{فوت پوند}$$

۳.۵- ضرب برداری یا ضربداری The Cross Product and Triple Products

کلمه *Cross* در انگلیسی یعنی صلیب یا ضربدر $\times$

بر خلاف ضرب نقطه ای که حاصل آن یک عدد است، حاصل ضرب برداری دو بردار، یک بردار است.

تعریف ضرب برداری Definition of Cross Product

ضرب ضربداری **Cross Product** یا ضرب برداری **Vector Product** دوبردار

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{و} \quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

مطابق زیر تعریف می شود.

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \quad (1)$$

برای این که بتوانید فرمول شماره (۱) را بخاطر بسپارید، دیترمینان ماتریس ها را شرح می دهیم.

دیترمینان: Determinant:

ماتریس: Matrix:

دیترمینان یعنی معلوم کننده، در ریاضی به معنی مبین و جدا گر است. در هر حال ما کلمه دیترمینان را بکار می بریم. ابتدا دیترمینان یک ماتریس دو در دو 2×2 را مورد بحث قرار می دهیم.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال -

$$\text{دیترمینان} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6) - (4 \cdot 5) = 12 - 20 = -8$$

اگر یک ماتریس سه در سه 3×3 داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

پس اگر $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ و $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که مثلا اگر می خواهیم ضریب i را پیدا کنیم، باید آن جمله ها در ستونی که i هست، نباشد. به همین ترتیب برای j و k .

مثال ۱ - نشان دهید $i \times j = k$ ، $j \times k = i$ ، $k \times i = j$ پاسخ

$$i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [(0)(0) - (0)(1)]i + [(0)(0) - (1)(0)]j + [(1)(1) - (0)(0)]k = k$$

بقیه هم به همین طریق.

مثال ۲ - فرض کنید $a = 2i - j + 3k$ و $b = -i - 2j + 4k$ باشد. $a \times b$ و $b \times a$ را محاسبه کنید. پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(-1)(4) - (3)(-1)]i + [(3)(-1) - (2)(4)]j + [(2)(-2) - (-1)(-1)]k$$

$$= 2i - 11j - 5k$$

$$b \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [(-2)(3) - (4)(-1)]i + [(4)(2) - (-1)(3)]j + [(-1)(-1) - (-2)(2)]k$$

$$= -2i + 11j + 5k$$

در مثال ۲ دیدیم که $a \times b$ و $b \times a$ منفی یکدیگر هستند. این تصادفی نیست. در حقیقت این از تعریف ضرب برداری نتیجه می شود. یعنی اگر a و b دو بردار باشند، پس

$$a \times b = -b \times a$$

دیگر خواص ضرب برداری مطابق زیر هستند.

$$a \times a = 0 \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(ca) \times b = c(a \times b) = a \times (cb) \quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

همچنین داریم

$$i \times (i \times k) = i \times (-j) = -k \quad (i \times i) \times k = 0 \times k = 0$$

پس

$$i \times (i \times k) \neq (i \times i) \times k$$

لذا $a \times (b \times c)$ و $(a \times b) \times c$ معمولاً مساوی نیستند.

قضیه ضرب برداری Theorem on Cross Product

فرض می کنیم a و b دو بردار غیر صفر باشند.

الف - پس

$$a \cdot (a \times b) = 0 \quad b \cdot (a \times b) = 0$$

و در نتیجه اگر $a \times b \neq 0$ باشد، پس $a \times b$ هم بر a و هم بر b عمود است.

ب - اگر θ زاویه بین a و b باشد، بطوری که $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد، پس

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$$

اثبات

برای اثبات قسمت الف، از تعریف ضرب نقطه ای و ضرب برداری استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} a. (a \times b) &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} b. (a \times b) &= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت ب، از تعریف ضرب برداری و طول یک بردار استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3a_1b_3b_1 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (\|a\|\|b\|\cos\theta)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2\theta) \end{aligned}$$

پس

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta$$

چون $\sin\theta \geq 0$ است برای $0 \leq \theta \leq \pi$ ، پس می توانیم از طرفین معادله بالا جذر بگیریم، پس داریم.

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\|\sin\theta$$

قضیه فرعی

دو بردار غیر صفر a و b با هم موازی هستند، اگر فقط و فقط $a \times b = 0$ باشد.

همان طور که در بخش ۳.۴ گفتیم، ضرب نقطه ای برای پیدا کردن زاویه بین دو بردار و پیدا کردن تصویر یک بردار بر یک بردار دیگر مورد استفاده قرار می گیرد. قضیه ضرب برداری، نشان می دهد که از طریق ضرب برداری می توانیم یک بردار عمود بر بردار دیگر پیدا کنیم. این موضوع به ما کمک می کند تا معادله های صفحه ها را در فضا پیدا کنیم.

مثال ۳ - فرض می کنیم $a = 4i - j + 3k$ و $b = 2i + 3j - k$ باشد. یک بردار عمود بر a و b پیدا کنید.

پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 9)i + (4 + 6)j + (12 + 2)k = -8i + 10j + 14k$$

از قضیه ضرب برداری نتیجه می گیریم که

(۲) مساحت متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن a و b هستند $\|a \times b\|$

تصویر A. در این تصویر، خط نقطه چین عمود بر a ، ارتفاع متوازی الاضلاع است و θ زاویه بین a و b است. همان طور که ملاحظه می کنید، طول ارتفاع برابر است با $\|b\| \sin \theta$.

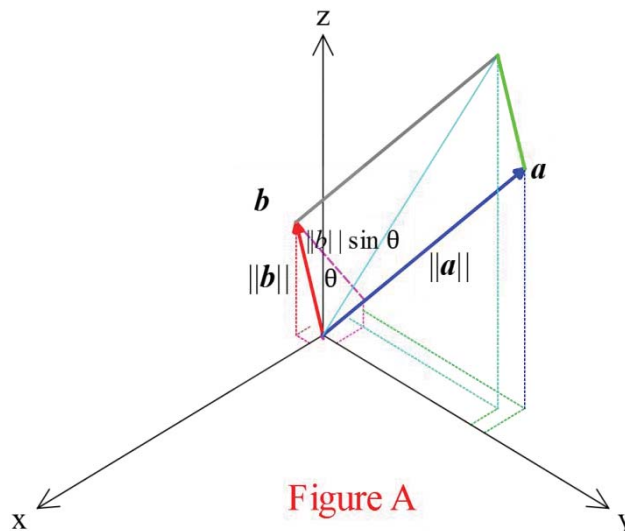


Figure A

بطور کلی، متوازی الاضلاع دارای طول قاعده $\|a\|$ و طول ارتفاع $\|b\| \sin \theta$ است. مساحت این متوازی الاضلاع مطابق زیر است.

$$A = \|a\| \|b\| \sin \theta = \|a \times b\|$$

از شماره (۲) نتیجه می شود، مثلی که دو ضلع آن a و b است، دارای مساحت نصف مساحت

متوازی الاضلاع است. یعنی $\frac{1}{2} \|a \times b\|$

مثال ۴ - فرض کنید $P = (3, -2, 1)$ و $Q = (7, -3, 4)$ و $R = (5, 1, 0)$ است. مساحت مثلث PRQ را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $a = \overrightarrow{PQ} = 4i - j + 3k$ و $b = \overrightarrow{PR} = 2i + 3j - k$ باشد. در مثال ۳ پیدا کردیم که

$$a \times b = -8i + 10j + 14k$$

پس

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \|a \times b\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-8)^2 + (10)^2 + (14)^2} = 3\sqrt{10}$$

حاصلضرب سه گانه یا ضرب سه گانه Triple Products
فرض می کنیم

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

باشد. ضرب های $a \cdot (b \times c)$ و $(a \times b) \cdot c$ و $(a \times b) \times c$ و $a \times (b \times c)$ کار برد های فیزیکی دارند. دو ضرب اول را حاصلضرب سه گانه عددی Triple Scalar Products می نامند، زیرا حاصل آنها عدد هستند و دو ضرب دیگر را ضرب برداری سه گانه Triple Vector Products می نامند.

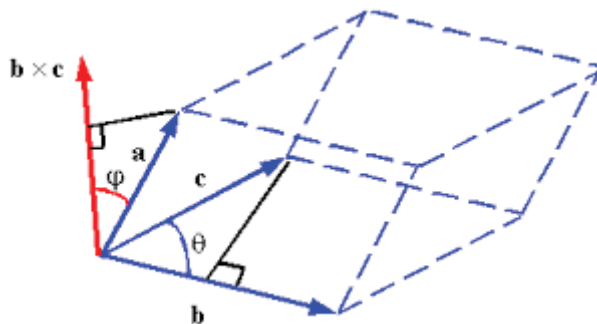
در قضیه ضرب برداری قسمت الف دو حاصلضرب سه گانه عددی $a \cdot (b \times c)$ و $b \cdot (a \times c)$ را ملاحظه کردید. و دیدید که همیشه صفر هستند. و در نتیجه مساوی هستند. در حقیقت برای هر بردار a, b, c داریم.

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c \quad (3)$$

این عدد $a \cdot (b \times c)$ مورد استفاده زیادی دارد، زیرا

$$|a \cdot (b \times c)| = \text{حجم متوازی السطوح با اضلاع } a, b, c \quad (4)$$

تصویر B



با توجه به تصویر B ملاحظه می کنید که $\|b \times c\|$ مساحت قاعده این متوازی السطوح است و اگر φ زاویه بین a و $b \times c$ باشد، پس $\|a\| \cos \varphi$ ارتفاع است و لذا حجم مطابق زیر است.

$$V = \|a\| \cos \varphi \|b \times c\| = |a \cdot (b \times c)|$$

می توانیم برای آسان کردن کار از دیترمینان استفاده کنیم.

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_3 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2) \quad (5)$$

مثال ۵ - فرض کنید $a = i - j$ و $b = 2i + 3j - k$ و $c = -i + 2k$ باشد. حجم متوازی السطوح مشخص شده توسط a, b, c را پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس شماره (۵) داریم.

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6 - 1 + 0) - (0 - 4 + 0) = 9$$

چرا؟

دیترمینان نسبت به ردیف اول، بسط می دهیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (6) + (4 - 1) = 6 + 3 = 9$$

سه فرمول دیگر را که در آینده مورد استفاده قرار می گیرد، ذکر می کنیم.

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (۶)$$

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \quad (۷)$$

$$a \times (a \times c) = a(0) - c(a \cdot a) = -\|a\|^2 c \quad (۸)$$

تمرینات ۳.۵

در تمرینات زیر $a \times b$ و $c \cdot (a \times b)$ را پیدا کنید.

۱) $a = i + j$, $b = j + k$, $c = -i - 3j + 4k$

۲) $a = 2i + 3j - k$, $b = -i + 4j + 5k$, $c = 2i + 3j + 4k$

۳ - با استفاده از تعریف ضرب برداری، ثابت کنید $a \times b = -(b \times a)$ است.

۴ - حجم متوازی السطوح مشخص شده بوسیله بردارهای زیر را پیدا کنید.

$$a = 2i - 3j + 4k$$

$$b = i + j - k$$

$$c = 4i - j - k$$

۵ - فرض کنید $a = 2i - 3j + 4k$ و $b = \frac{1}{4}i + j - k$ و $c = 4i - 5j + 6$ باشد، مطلوب

است $a \times (b \times c)$ از طریق مستقیم و سپس با استفاده از شماره (۷) همان ضرب را انجام دهید.

۶ - مساحت متوازی الضلاع که بوسیله دو بردار زیر احاطه شده است، پیدا کنید.

$$a = (3, -3, 1) \quad , \quad b = (4, 9, 2)$$

۷ - مساحت متوازی الضلاع که بوسیله دو بردار زیر احاطه شده است، پیدا کنید.

$$a = (3, -3, -1) \quad , \quad b = (-12, 12, -4)$$

پاسخ تمرینات ۳.۵

در تمرینات زیر $a \times b$ و $c \cdot (a \times b)$ را پیدا کنید.

$$۱) \quad a = i + j, \quad b = j + k, \quad c = -i - 3j + 4k$$

پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k$$

$$c \cdot (a \times b) = (-1)(1) + (-3)(-1) + (4)(1) = 6$$

$$۲) \quad a = 2i + 3j - k, \quad b = -i + 4j + 5k, \quad c = 2i + 3j + 4k$$

پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 19i - 9j + 11k$$

$$c \cdot (a \times b) = (2)(19) + (3)(-9) + (4)(11) = 55$$

۳ - با استفاده از تعریف ضرب برداری، ثابت کنید $a \times b = -(b \times a)$ است.

پاسخ

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k \\ &= -(b_2 a_3 - b_3 a_2)i - (b_3 a_1 - b_1 a_3)j - (b_1 a_2 - b_2 a_1)k \\ &= -b \times a \end{aligned}$$

۴ - حجم متوازی السطوح مشخص شده بوسیله بردار های زیر را پیدا کنید.

$$a = 2i - 3j + 4k$$

$$b = i + j - k$$

$$c = 4i - j - k$$

پاسخ

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 12 - 4) - [16 + 3 + 2] = -15$$

$$V = 15$$

۵ - فرض کنید $a = 2i - 3j + 4k$ و $b = \frac{1}{2}i + j - k$ و $c = 4i - 5j + 6k$ باشد، مطلوب است $a \times (b \times c)$ از طریق مستقیم و سپس با استفاده از شماره (۷) همان ضرب را انجام دهید.

پاسخ

$$b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = i - 7j - \frac{13}{2}k$$

$$a \times (b \times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -7 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix} = \frac{95}{2}i + 17j - 11k$$

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) = 47b + 6c = \frac{95}{2}i + 17j - 11k$$

۶ - مساحت متوازی الضلاع که بوسیله دو بردار زیر احاطه شده است، پیدا کنید.

$$a = (3, -3, 1), \quad b = (4, 9, 2)$$

پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = i((-3) \cdot (2) - (1) \cdot (9)) - j((3) \cdot (2) - (1) \cdot (4)) + k((3) \cdot (9) + (3) \cdot (4))$$

$$= -15i - 2j + 39k$$

پس

$$A = \sqrt{(-15)^2 + (-2)^2 + 39^2} = 5\sqrt{10}$$

۷ - مساحت متوازی الضلاع که بوسیله دو بردار زیر احاطه شده است، پیدا کنید.

$$a = (3, -3, 1), \quad b = (-12, 12, -4)$$

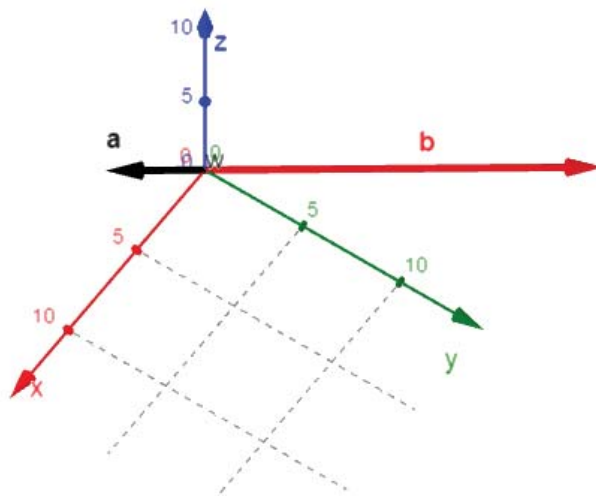
پاسخ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 1 \\ -12 & 12 & -4 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

می دانیم که مقدار بردار صفر، صفر است، پس مساحت این متوازی الضلاع صفر است. چرا؟ اگر توجه کنید ملاحظه می کنید که

$$b = -4a$$

یعنی این دو بردار موازی هستند. بر اساس شماره (۲) دو بردار a و b باید اضلاع مجاور یک متوازی‌الضلاع را تشکیل دهند تا بتوانیم از طریق ضرب برداری مساحت متوازی‌الضلاع تشکیل شده را بدست آوریم. اما این دو بردار موازی هستند، پس تشکیل اضلاع مجاور را نمی‌دهند. از طرف دیگر، می‌دانیم که ضرب برداری دو بردار، یک بردار است که بر هر دو بردار عمود است. با توجه به تصویر زیر ملاحظه می‌کنید که متوازی‌الضلاعی تشکیل نشده است.



۳.۶- خط در فضا Lines in Space

چون بردار را یک پاره خط جهت دار تصور می کنیم، پس تعجب ندارد که بگوییم خط و بردار با هم ارتباط نزدیک دارند.

معادله خطوط در فضا Equations of Lines in Space

می گوییم یک بردار L و خط l موازی هستند، اگر L موازی بردار $\overrightarrow{P_0P}$ باشد. $\overrightarrow{P_0P}$ دو نقطه متمایز P_0 و P روی l را به هم متصل می کند. تصویر B

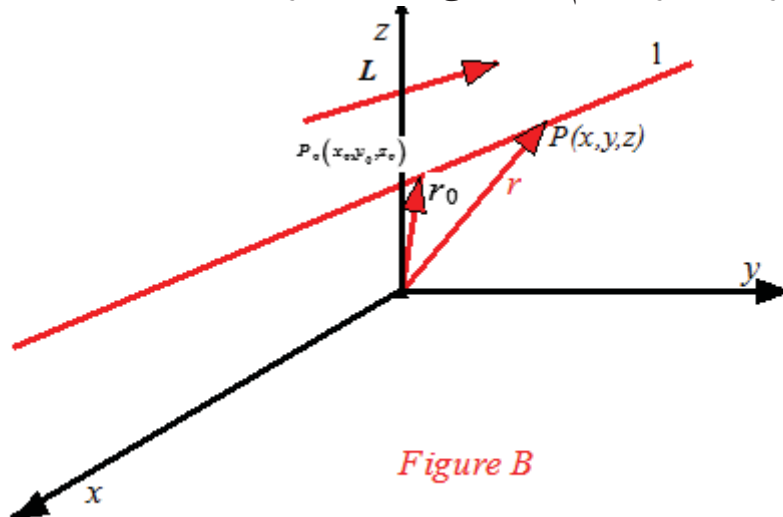


Figure B

بر اساس هندسه اقلیدسی خط l که از نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و موازی بردار L است، منحصر به فرد است. پس نقطه $P = (x, y, z)$ روی خط l است اگر فقط و فقط $\overrightarrow{P_0P}$ موازی L باشد. پس بر اساس تعریف بردارهای موازی بخش ۳.۳ این یعنی

$$\overrightarrow{P_0P} = tL \quad (1)$$

برای یک عدد مناسب t .

اگر $r_0 = x_0i + y_0j + z_0k$ و $r = xi + yj + zk$ باشد، پس $\overrightarrow{P_0P} = r - r_0$ است. پس می توان شماره (۱) را به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$r = r_0 + tL \quad (2)$$

شماره (۲) یک معادله برداری l است. چون r_0 می تواند هر برداری باشد که مبدا را به یک نقطه روی l متصل می کند و چون L می تواند هر برداری موازی l باشد، پس تعداد زیادی معادله های برداری بردار یک خط l وجود دارد.

طریق دوم پیدا کردن معادله یک خط در فضا

فرض می کنیم نقطه P_0 روی l و بردار غیر صفر v موازی l باشد. پس بر اساس هندسه اقلیدسی خط l منحصر به فرد است. نقطه دیگری مانند P روی l است، اگر فقط و فقط $\overrightarrow{P_0P}$ موازی v باشد.

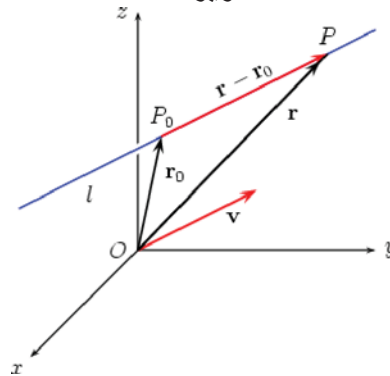
$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = r - r_0$$

و یا برای یک عدد مناسب t داریم.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

تصویر A . ملاحظه می کنید که بردار $\mathbf{v}$ می تواند از مبدا شروع شود. فرقی ندارد.

تصویر A



مثال ۱- یک معادله برداری برای خطی که شامل نقطه $(-1, 3, 0)$ است و موازی $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ

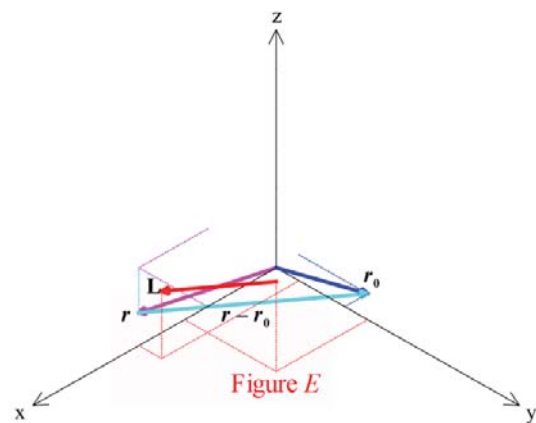
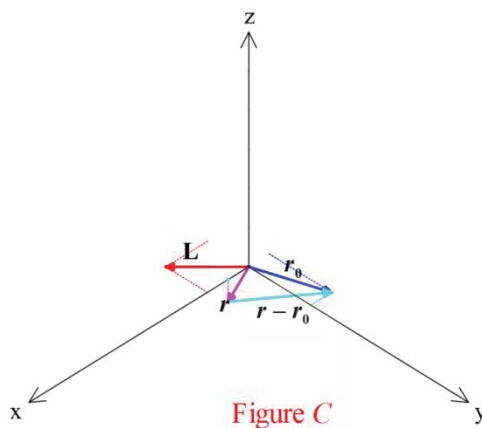
بر اساس شماره (۲) داریم.

$$\mathbf{r} = (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + t(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

یا

$$\mathbf{r} = (-1 + 2t)\mathbf{i} + (3 - 3t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$$

تصویر C . در این تصویر $t = 1$ فرض کردیم. در تصویر E عدد $t = 2$ و L از مبدا شروع نشده. پس هر دو حالت به نتیجه صحیح می رسیم.



فرض کنید $L = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ باشد. پس شماره (۲) را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$xi + yj + zk = (x_0i + y_0j + z_0k) + t(ai + bj + ck)$$

و یا

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct \quad (3)$$

معادله های شماره (۳) را معادله های پارامتری l و t را یک پارامتری می نامند. اگر $z_0 = 0$ و $c = 0$ باشند، پس l در صفحه مختصات xy قرار دارد و معادله های پارامتری زیر را دارد.

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = 0$$

معادله های بالا همان معادله های پارامتری شماره (۳) بخش ۳.۴ کتاب انتگرال آوا است.

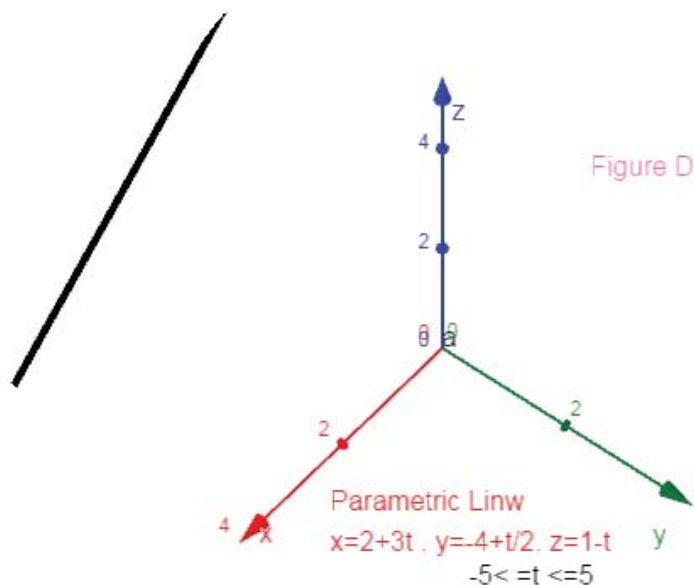
مثال ۲ - معادله های پارامتری خطی که شامل $(2, -4, 1)$ و موازی $3i + \frac{1}{2}j - k$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ

اگر فرض کنیم $(x_0, y_0, z_0) = (2, -4, 1)$ و $ai + bj + ck = 3i + \frac{1}{2}j - k$ در شماره (۳) باشد، داریم.

$$x = 2 + 3t, y = -4 + \frac{1}{2}t, z = 1 - t$$

تصویر D



مثال ۳- مطلوب است معادله های پارامتری خط l که از نقطه $(1, 2, 3)$ برای $t = 0$ می گذرد و برای $t = 1$ که از نقطه $(3, 0, 4)$ می گذرد.

پاسخ

اگر $x = x_0 + at$ باشد، پس چون $x = 1$ است برای $t = 0$ و $x = 3$ است برای $t = 1$ ، پس داریم.

$$1 = x_0 + a(0) \quad \text{و} \quad 3 = x_0 + a(1)$$

از معادله اول $x_0 = 1$ است. پس از معادله دوم داریم $a = 3 - x_0 = 3 - 1 = 2$ پس $x = 1 + 2t$ است.

اگر $y = y_0 + bt$ است، پس

$$2 = y_0 + b(0) \quad \text{و} \quad 0 = y_0 + b(1)$$

بر اساس معادله اول داریم $y_0 = 2$. پس بر اساس معادله دوم داریم $b = -2$. لذا $y = 2 - 2t$ است. و در نهایت اگر $z = z_0 + ct$ باشد، پس داریم.

$$3 = z_0 + c(0) \quad \text{و} \quad 4 = z_0 + c(1)$$

به همان طریق بالا، داریم $z_0 = 3$ و $c = 1$ ، پس $z = 3 + t$ در نتیجه معادله های پارامتری l که شرایط داده شده را برقرار کند، مطابق زیر است.

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = 3 + t$$

اگر در شماره (۳) هیچ کدام از a ، b ، c نباشند، می توانیم شماره (۳) را به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (4)$$

شماره (۴) را **معادله های تقارنی Symmetric Equations** خط l می نامند. توجه داشته باشید که مختصات نقطه P_0 روی l در شماره (۴) در صورت کسر ها و مولفه های یک بردار L موازی l در مخرج کسر های شماره (۴) ظاهر می شوند.

مثال ۴- معادله های تقارنی خط l که شامل نقاط $P_1 = (4, -6, 5)$ و $P_2 = (2, -3, 0)$ است، پیدا کنید.

پاسخ

برای بکار بردن شماره (۴) ابتدا یک بردار L موازی l پیدا می کنیم. چون P_1 و P_2 دو نقطه متفاوت روی l هستند، بردار $\overrightarrow{P_1 P_2}$ می تواند بردار مورد نظر باشد. پس داریم.

$$L = \overrightarrow{P_1 P_2} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

برای این انتخاب L ، اگر فرض کنیم $(4, -6, 5)$ روی l قرار دارد، پس بر اساس شماره (۴) معادله های تقارنی l مطابق زیر است.

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-5}{-5}$$

به همین طریق، اگر فرض کنیم $(2, -3, 0)$ روی l باشد، معادله های تقارنی l مطابق زیر است.

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-5}$$

تصویر F

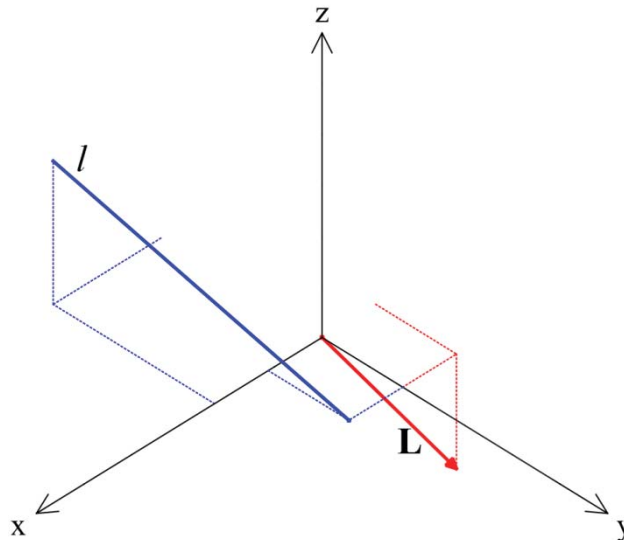


Figure F

مثال ۵ فرض می کنیم l دارای معادله های زیر باشد.

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-1} = z+2$$

یک بردار موازی l و دو نقطه روی l پیدا کنید.

پاسخ

اعداد داده شده در مخرج های معادله ها، مولفه های یک بردار L موازی l هستند. پس

$$L = -2i - j + k$$

نقطه $P_0 = (3, 1, -2)$ روی l قرار دارد، برای پیدا کردن P_1 روی l می توانیم فرض کنیم

$x = 1$ باشد، پس

$$\frac{1-3}{-2} = \frac{y-1}{-1} = z+2$$

داریم. $y = 0$ و $z = -1$. لذا $P_1 = (1, 0, -1)$ هم روی l قرار دارد.

برای بدست آوردن معادله های تقارنی شماره (۴) فرض کردیم هیچ کدام از اعداد a ، b ، c صفر نیستند. اگر یکی و یا دو تا از این اعداد صفر باشد، پس معادله های تقارنی تغییر می کنند. مثلاً فرض می کنیم $a = 0$ باشد، اما b و c صفر نباشند، پس شماره (۳) به صورت زیر می شود.

$$x = x_0, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

اگر معادله های بالا را برای t حل کنیم، معادله های زیر بدست می آوریم.

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

مثلاً معادله های تقارنی l که از نقطه $(-2, -1, 1)$ می گذرد و موازی $2j - 3k$ است، مطابق زیر است.

$$x = -2, \quad \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{-3}$$

یک قدم جلو تر می رویم و فرض می کنیم $a = b = 0$ و $c \neq 0$ باشد، پس شماره (۳) می شود

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 + ct$$

و در نتیجه معادله های تقارنی l به صورت زیر است.

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

این یعنی، هر نقطه ای روی l مختصات x آن x_0 است و مختصات y آن y_0 است. لذا l یک خط عمودی است که از نقطه $(x_0, y_0, 0)$ می گذرد. به همین ترتیب اگر $b = 0$ و یا $c = 0$ باشد.

مثال ۶- معادله های تقارنی l که شامل نقطه $(1, -1, 0)$ و موازی بردار $2i - 3k$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ

در این حالت $b = 0$ است، پس شماره (۳) به صورت زیر است.

$$x = 1 + 0t, \quad y = -1 + 0t, \quad z = 0 + 3t$$

اگر معادله های بالا را برای t خواهیم داشت.

$$y = -1, \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{z}{-3}$$

بسیاری از مسائل مشکل و پیچیده، از طریق استفاده از بردار، آسان می شود. مثال خوبی از قبیل، محاسبه فاصله بین یک خط و یک نقطه خارج آن خط است.

قضیه فاصله یک نقطه تا یک خط Distance From a Point to a Line Theorem

فرض می کنیم l یک خط موازی بردار L باشد. و فرض می کنیم P_1 نقطه ای خارج خط l باشد. پس فاصله بین P_1 و l مطابق زیر است.

$$D = \frac{\|L \times \overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|L\|} \quad (5)$$

در صورتی که P_0 یک نقطه روی l باشد.

اثبات

فرض می‌کنیم θ زاویه بین L و $\overrightarrow{P_0P_1}$ باشد، بطوری که $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد. تصویر G پس

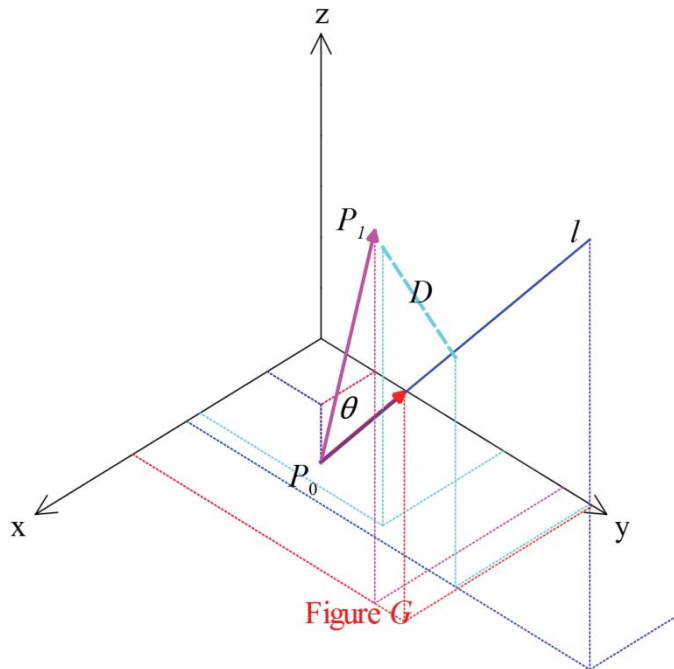
$$D = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \sin \theta$$

چون داریم.

$$\|L \times \overrightarrow{P_0P_1}\| = \|L\| \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \sin \theta$$

پس

$$D = \frac{\|L \times \overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|L\|}$$



قضیه ثابت شد.

مثال ۷ - مطلوب است فاصله نقطه $(2, 1, -1)$ تا خط l با معادله‌های پارامتری زیر.

$$x = 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -5 - t$$

پاسخ

ملاحظه می‌کنید که $(0, 1, -5)$ روی خط l است، اما $(2, 1, -1)$ روی خط l نیست. و بردار $3i + 2j - k$ موازی خط l است. پس فرض می‌کنیم $P_0 = (0, 1, -5)$ و $P_1 = (2, 1, -1)$ و $L = 3i + 2j - k$ باشد. پس بر اساس شماره (۵) داریم.

$$D = \frac{\|L \times \overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|L\|} = \frac{\|(3i + 2j - k) \times (2i + 4k)\|}{\|3i + 2j - k\|}$$

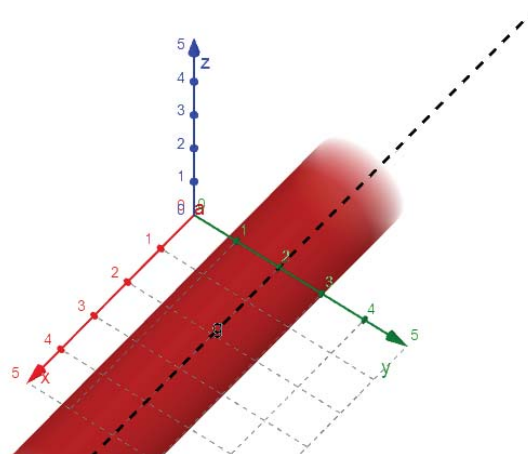
$$\begin{aligned}\|3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}\| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \\ (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \\ \|8\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\| &= \sqrt{8^2 + (-14)^2 + (-4)^2} = \sqrt{276}\end{aligned}$$

در نهایت

$$D = \frac{\sqrt{276}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{138}}{\sqrt{7}}$$

Circular Cylinder مجموعه نقاطی که فاصله آنها تا یک خط l به یک اندازه باشد، استوانه مدور می نامند. این استوانه دارای محور l و شعاع $a > 0$ است. تصویر H

Figure H



چون فاصله هر نقطه $P = (x, y, z)$ تا محور z مساوی است با $\sqrt{x^2 + y^2}$ پس P روی استوانه ای قرار دارد که محور آن، محور z و شعاع آن a است، اگر فقط و فقط داشته باشیم.

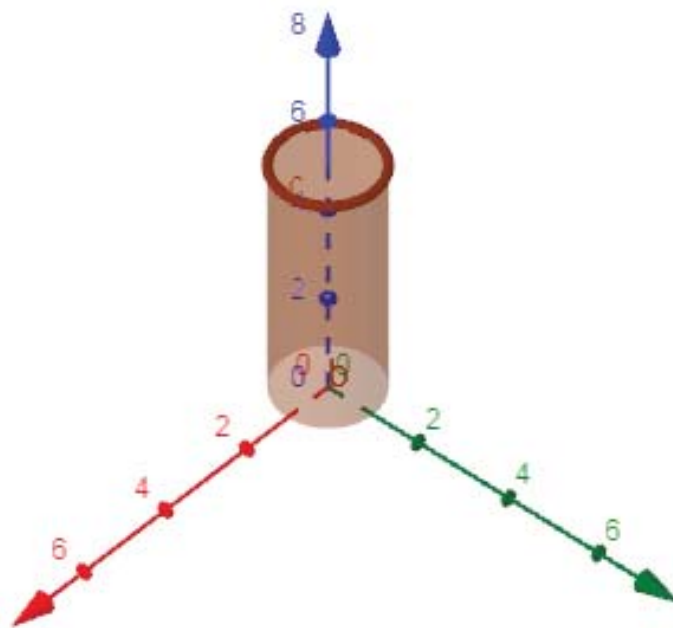
$$\sqrt{x^2 + y^2} = a$$

پس معادله زیر، معادله یک استوانه است با شعاع a و محور z . تصویر I .

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (۴)$$

شماره (۴) در سیستم سه بعدی معادله یک استوانه است، اما در سیستم دو بعدی معادله یک دایره.

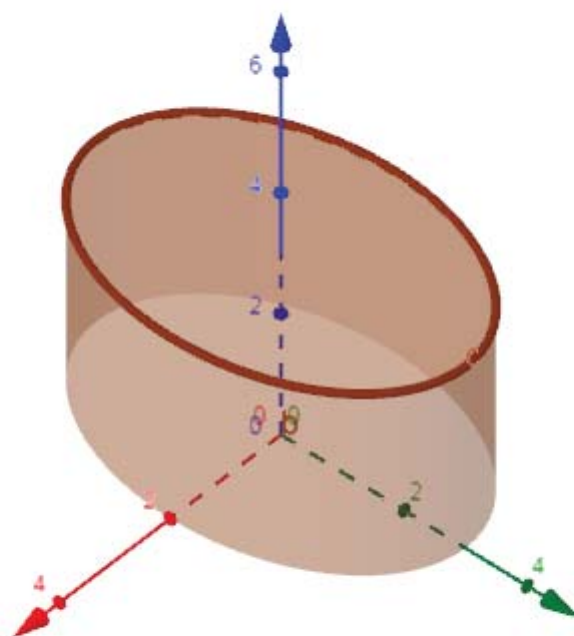
Figure 1



به همین سیاق در سیستم دو بعدی معادله زیر ، معادله یک بیضی است. اما در سیستم سه بعدی یک استوانه بیضوی است. تصویر J

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2 \quad (۷)$$

Figure J



تمرینات ۳.۶

در تمرینات زیر برای خطی که از نقطه داده شده می‌گذرد و موازی بردار L است، یک معادله برداری، معادله های پارامتری، و معادله های تقارنی پیدا کنید.

۱) $(-2, 1, 0)$ ؛ $L = 3i - j + 3k$

۲) $(3, 4, 5)$ ؛ $L = \frac{1}{4}i - \frac{1}{3}j + \frac{1}{6}k$

۳) $(2, 0, 5)$ ؛ $L = 2j + 3k$

۴ - معادله های پارامتری برای خطی پیدا کنید که شامل نقاط $(-1, 1, 0)$ و $(-2, 5, 7)$ است.

۵ - معادله های تقارنی خطی پیدا کنید که شامل نقاط $(-1, 1, 0)$ و $(-1, 1, 7)$ است.

۶ - نشان دهید خطی که شامل نقاط $(2, -1, 3)$ و $(0, 7, 9)$ است، عمود بر خطی است که شامل نقاط $(-1, 0, 4)$ و $(2, 3, 1)$ است.

۷ - نشان دهید خطی که شامل نقاط $(0, 0, 5)$ و $(1, -1, 4)$ است، عمود بر خطی است با معادله های زیر.

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{3}$$

۸ - فرض کنید l خطی است که از نقاط $P_1 = (-1, -2, -3)$ و $P_2 = (2, -1, 0)$ می‌گذرد. معادله های پارامتری l را پیدا کنید که شرایط زیر را برقرار کنند.

P_1 مربوط است به $t = 0$

P_2 مربوط است به $t = 2$

۹ - فاصله بین مبدا مختصات و خطی که شامل نقطه $(-3, -3, 3)$ و موازی بردار $2i - 3j + 5k$ پیدا کنید.

۱۰ - فاصله بین دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

۱۱ - معادله استوانه با شعاع $\sqrt{2}$ بطوری که محور آن محور y باشد، پیدا کنید.

۱۲ - آیا نقاط $(1, 4, 2)$ و $(4, -3, -5)$ و $(-5, -1, 0)$ روی یک خط هستند؟ توضیح دهید.

پاسخ تمرینات ۳.۶

در تمرینات زیر برای خطی که از نقطه داده شده می‌گذرد و موازی بردار L است، یک معادله برداری، معادله های پارامتری، و معادله های تقارنی پیدا کنید.

۱) $(-2, 1, 0)$ ؛ $L = 3i - j + 3k$

پاسخ

بر اساس فرض مساله داریم

$$r_0 = -2i + j$$

پس معادله برداری خط مطابق زیر است.

$$r = (-2 + 3t)i + (1 - t)j + 5tk$$

معادله پارامتری مطابق زیر است.

$$x = -2 + 3t, \quad y = 1 - t, \quad z = 5t$$

معادله تقارنی مطابق زیر است.

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{5}$$

۲) $(3, 4, 5)$ ؛ $L = \frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j + \frac{1}{6}k$

پاسخ

بر اساس فرض مساله داریم

$$r_0 = 3i + 4j + 5k$$

پس معادله برداری خط مطابق زیر است.

$$r = \left(3 + \frac{1}{2}t\right)i + \left(4 - \frac{1}{3}t\right)j + \left(5 + \frac{1}{6}t\right)k$$

معادله پارامتری مطابق زیر است.

$$x = 3 + \frac{1}{2}t, \quad y = 4 - \frac{1}{3}t, \quad z = 5 + \frac{1}{6}t$$

معادله تقارنی مطابق زیر است.

$$\frac{x-3}{\frac{1}{2}} = \frac{y-4}{-\frac{1}{3}} = \frac{z-5}{\frac{1}{6}}$$

$$۳) \quad (2, 0, 5); \quad L = 2j + 3k$$

پاسخ

بر اساس فرض مساله داریم

$$r_0 = 2i + 5k$$

پس معادله برداری خط مطابق زیر است.

$$r = 2i + 2tj + (5 + 3t)k$$

معادله پارامتری مطابق زیر است.

$$x = 2, \quad y = 2t, \quad z = 5 + 3t$$

معادله تقارنی مطابق زیر است.

$$x = 2 \quad \text{و} \quad \frac{y}{2} = \frac{z - 5}{3}$$

۴ - معادله های پارامتری برای خطی پیدا کنید که شامل نقاط $(-1, 1, 0)$ و $(-2, 5, 7)$ است.

پاسخ

$$x_0 = -1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0$$

$$a = -2 - (-1) = -1, \quad b = 5 - 1 = 4, \quad c = 7 - 0 = 7$$

پس معادله های پارامتری مطابق زیر است.

$$x = -1 - t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 7t$$

۵ - معادله های تقارنی خطی پیدا کنید که شامل نقاط $(-1, 1, 0)$ و $(-1, 1, 7)$ است.

پاسخ

$$x_0 = -1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 7$$

پس معادله های تقارنی مطابق زیر است.

$$x = -1, \quad y = 1$$

۶ - نشان دهید خطی که شامل نقاط $(2, -1, 3)$ و $(0, 7, 9)$ است، عمود بر خطی است که شاملنقاط $(2, 3, 1)$ و $(-1, 0, 4)$ است.

پاسخ

خطی که از نقاط $(2, -1, 3)$ و $(0, 7, 9)$ می گذرد، موازی L_1 است، با معادله زیر.

$$L_1 = (0 - 2)i + (7 + 1)j + (9 - 3)k = -2i + 8j + 6k$$

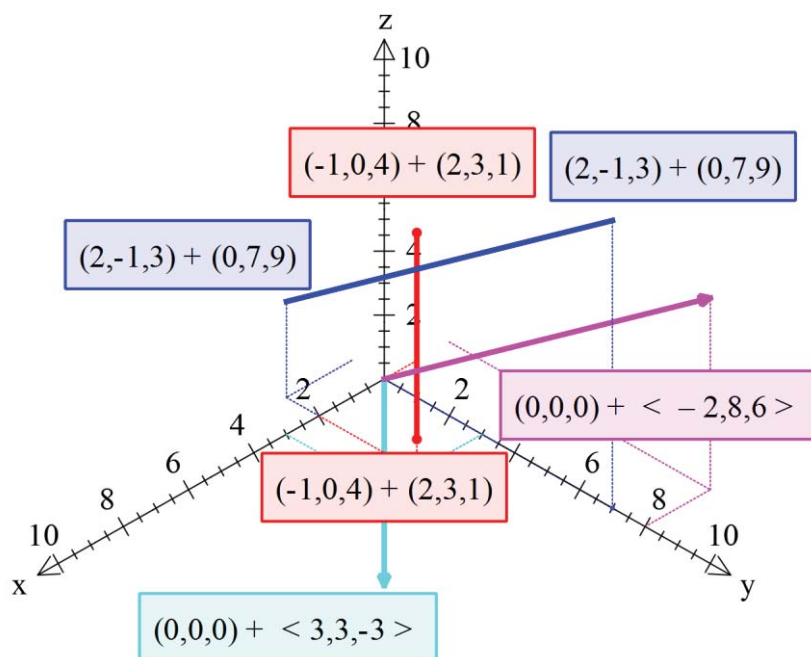
خطی که از نقاط $(-1, 0, 4)$ و $(2, 3, 1)$ می گذرد، موازی L_2 است، با معادله زیر.

$$L_2 = (2 + 1)i + (3 - 0)j + (1 - 4)k = 3i + 3j - 3k$$

چون داریم.

$$L_1 \cdot L_2 = (-2)(3) + (8)(3) + (6)(-3) = 0$$

پس L_1 و L_2 بر هم عمود هستند، پس آن دو خط هم بر هم عمود هستند. تصویر زیر.



۷ - نشان دهید خطی که شامل نقاط $(0,0,5)$ و $(1,-1,4)$ است، عمود بر خطی است با معادله های زیر.

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{3}$$

پاسخ

خطی که از نقاط $(0,0,5)$ و $(1,-1,4)$ می گذرد موازی بردار L_1 با معادله زیر است.

$$L_1 = (1-0)\mathbf{i} + (-1-0)\mathbf{j} + (4-5)\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

خط با معادله های زیر

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{3}$$

موازی بردار L_2 با معادله زیر است.

$$L_2 = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

و چون

$$L_1 \cdot L_2 = (1)(7) + (-1)(4) + (-1)(3) = 0$$

است، پس L_1 و L_2 بر هم عمود هستند و لذا آن دو خط بر هم عمود هستند.

۸ - فرض کنید l خطی است که از نقاط $P_1 = (-1, -2, -3)$ و $P_2 = (2, -1, 0)$ می گذرد. معادله های پارامتری l را پیدا کنید که شرایط زیر را برقرار کنند.
 P_1 مربوط است به $t = 0$
 P_2 مربوط است به $t = 2$

پاسخ

بر اساس شماره (۳) معادله پارامتری به شکل زیر می باشند

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

چون P_1 مربوط است به $t = 0$ و P_2 مربوط است به $t = 2$ پس داریم.

$$\begin{aligned} -1 &= x_0 + a \cdot 0, & -2 &= y_0 + b \cdot 0, & -3 &= z_0 + c \cdot 0 \\ 2 &= x_0 + 2a, & -1 &= y_0 + 2b, & 0 &= z_0 + 2c \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, & y_0 &= -2, & z_0 &= -3 \\ a &= \frac{1}{2}(2 - x_0) = \frac{3}{2}, & b &= \frac{1}{2}(-1 - y_0) = \frac{1}{2}, & c &= -\frac{1}{2}z_0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

پس معادله های پارامتری مطابق زیر هستند.

$$x = -1 + \frac{3}{2}t, \quad y = -2 + \frac{1}{2}t, \quad z = -3 + \frac{3}{2}t$$

۹ - فاصله بین مبدا مختصات و خطی که شامل نقطه $(-3, -3, 3)$ و موازی بردار $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ پیدا کنید.

پاسخ

خط دارای معادله برداری زیر است.

$$\mathbf{r} = (-3 + 2t)\mathbf{i} + (-3 - 3t)\mathbf{j} + (3 + 5t)\mathbf{k}$$

و اگر $P_1 = (0, 0, 0)$ باشد، پس P_1 روی آن خط نیست. فرض می کنیم $P_0 = (-3, -3, 3)$

باشد. و فرض می کنیم $L = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ باشد، بطوری که $\mathbf{r}$ و L موازی باشند. پس

$$\overrightarrow{P_0P_1} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

است. و بر اساس شماره (۵) فاصله بین P_1 و خط داده شده، مطابق زیر است.

$$D = \frac{\| (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{3\| -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \|}{\sqrt{38}} = 3\sqrt{\frac{39}{19}}$$

۱۰ - فاصله بین دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که $P = (1, -1, 2)$ روی خط اول قرار دارد. $Q = (0, 2, 3)$ روی خط دوم. بردار $L = 2i - j - 2k$ موازی خط اول است. پس

$$D = \frac{\|L \times \overrightarrow{PQ}\|}{\|L\|} = \frac{\|(2i - j - 2k) \times (-i + 3j + k)\|}{\|2i - j - 2k\|}$$

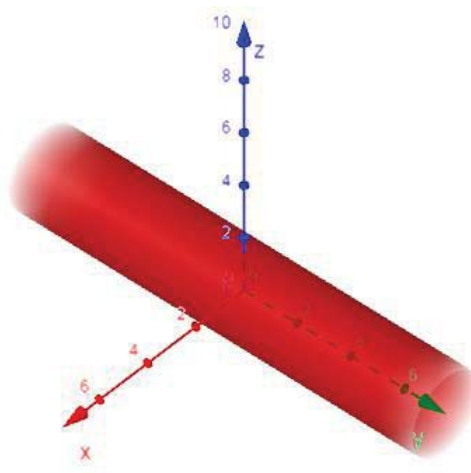
$$= \frac{\|5i + 5k\|}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

۱۱ - معادله استوانه با شعاع $\sqrt{2}$ بطوری که محور آن محور y باشد، پیدا کنید.

پاسخ

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + z^2 = 2$$



۱۲ - آیا نقاط $(1, 4, 2)$ و $(4, -3, -5)$ و $(-5, -1, -8)$ روی یک خط هستند؟ توضیح دهید.

پاسخ

خطی که از $(1, 4, 2)$ و $(4, -3, -5)$ می‌گذرد، موازی $3i - 7j - 7k$ است. و خطی که از $(1, 4, 2)$ و $(-5, -1, -8)$ می‌گذرد، موازی $10k - 14j - 6i$ است. چون این دو بردار موازی نیستند، این سه نقطه روی یک خط قرار ندارند.

۳.۷- صفحه در فضا Planes in Space

فقط یک صفحه وجود دارد که شامل یک نقطه و عمود بر یک خط باشد. به همین طریق، فقط یک صفحه وجود دارد که شامل نقطه و عمود بر یک بردار غیر صفر باشد. **تصویر A**. به عبارت دیگر، یک صفحه توسط یک نقطه و یک بردار غیر صفر مشخص می شود.

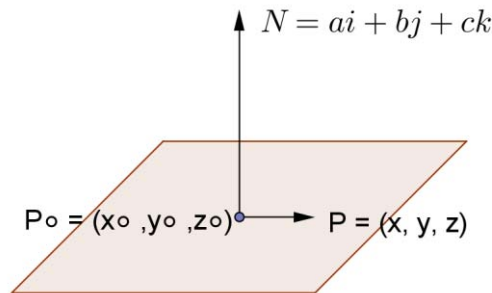


Figure A

معادله یک صفحه Equation of a Plane

فرض می کنیم $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه و $N = ai + bj + ck$ یک بردار غیر صفر باشد. پس یک نقطه مانند $P = (x, y, z)$ روی صفحه $\mathcal{P}$ است، که شامل P_0 است و عمود بر N ، اگر فقط و فقط بردار

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

عمود بر N باشد. تصویر A. این یعنی $N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ است. که این معادل تساوی زیر است.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

با بسط دادن سمت چپ شماره (۱) و فرض $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ ، معادله زیر را بدست می آوریم.

$$ax + by + cz = d \quad (2)$$

هر دو معادله های شماره های (۱) و (۲) معادله های صفحه $\mathcal{P}$ هستند که عمود بر N است و شامل نقطه P_0 است. بردار N را **بردار عمود بر $\mathcal{P}$** می نامند. **Normal to $\mathcal{P}$** ملاحظه می کنید که مولفه های N به عنوان ضریب های معادله های (۱) و (۲) ظاهر شده اند. و مختصات نقطه P_0 داخل پرانتز های معادله شماره (۱) ظاهر شده اند.

مثال ۱ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(-2, 4, 5)$ است و بردار $7\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$ عمود بر آن صفحه است.

پاسخ

در معادله شماره (۱) اعداد زیر را جانشین می کنیم.

$$x_0 = -2, y_0 = 4, z_0 = 5, a = 7, b = 0, c = -6$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} 7(x + 2) + 0(y - 4) - 6(z - 5) &= 0 \\ 7x - 6z &= -44 \end{aligned}$$

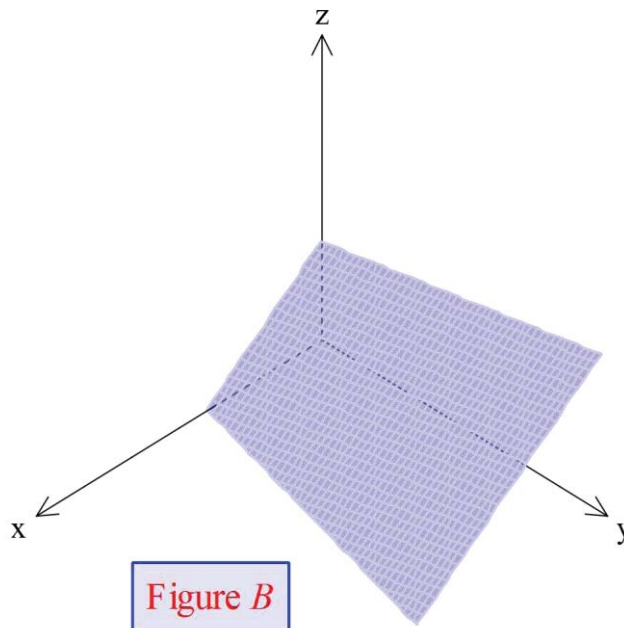
مثال ۲ - معادله صفحه $\mathcal{P}$ را پیدا کنید، بطوری که شامل نقطه $(\frac{1}{4}, 0, 3)$ باشد و عمود بر خط l با معادله زیر.

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{5}$$

پاسخ

چون l عمود بر $\mathcal{P}$ است، هر برداری موازی l عمود بر $\mathcal{P}$ خواهد بود. مثلاً $4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ عمود بر $\mathcal{P}$ است. پس فرض می کنیم $N = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ باشد پس معادله صفحه مطابق زیر بدست می آید. تصویر B

$$\begin{aligned} 4\left(x - \frac{1}{4}\right) + (-1)(y - 0) + 5(z - 3) &= 0 \\ 4x - y + 5z &= 17 \end{aligned}$$



مثال ۳ - یک بردار عمود بر صفحه $2x - 3y + 7z = -35$ پیدا کنید. پاسخ

چنین برداری را می توان مستقیماً از معادله داده شده خواند. پس داریم.

$$2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

تصویر C

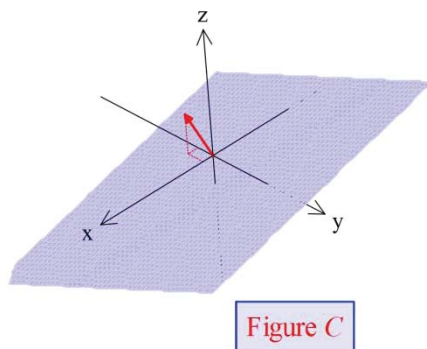


Figure C

مثال ۴ - نمودار صفحه $3x + 2y + z = 6$ را رسم کنید.

پاسخ

صفحه بوسیله سه نقطه متمایز روی آن مشخص می شود. نقاطی را که استفاده می کنیم، محل برخورد با محورهای x, y, z است. برای پیدا کردن محل تلاقی با محور x فرض می کنیم y و z صفر باشند، و سپس معادله داده شده را برای x حل می کنیم.

$$3x + 2(0) + 0 = 6$$

$$x = 2$$

به همین سیاق داریم $y = 3$ و $z = 6$ ، پس این نقاط $(2, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 6)$ هستند.

تصویر D

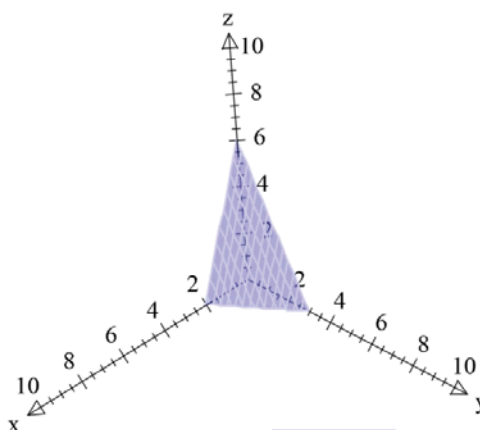


Figure D

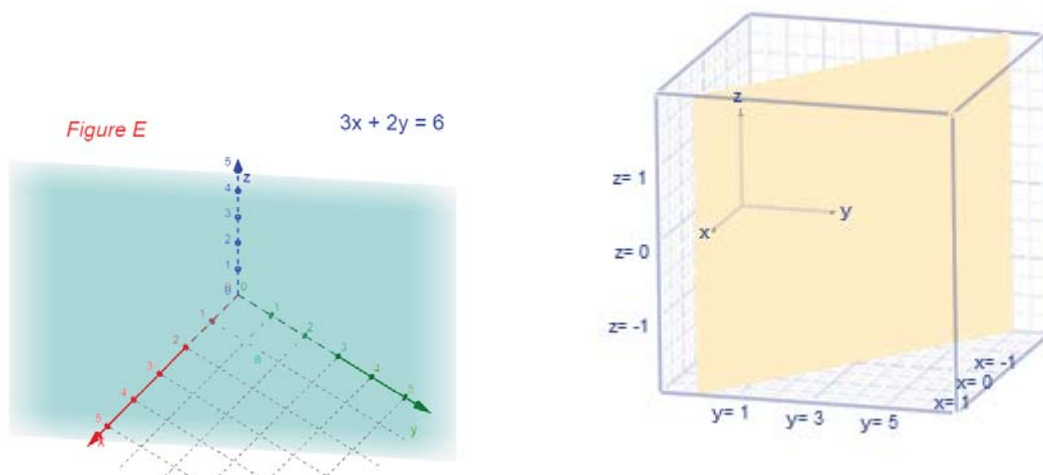
مثال ۵ - نمودار صفحه $3x + 2y = 6$ را راسم کنید.

پاسخ

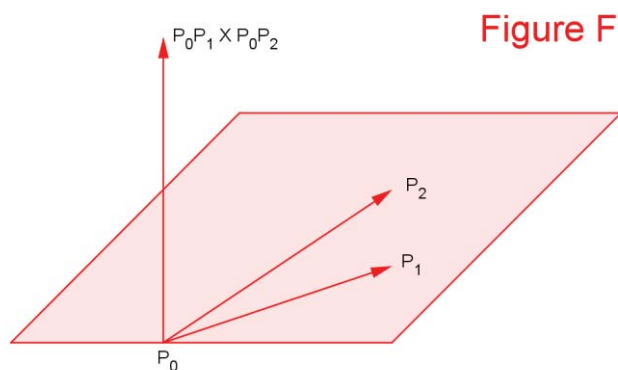
همانطور که در مثال ۴ عمل کردیم، متوجه می شویم که محل تلاقی با محور x نقطه ۲ است و با محور y نقطه ۳ است. اگر بخواهیم محل تلاقی با محور z پیدا کنیم، مطابق زیر عمل می کنیم.

$$3(0) + 2(0) = ?$$

پس صفحه با محور z تلاقی نمی کند. لذا داریم $(2, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 0)$ تصویر E .
صفحه عمود بر صفحه xy است.



سه نقطه P_0 ، P_1 ، P_2 در صورتی که روی یک خط نباشند، یک صفحه را مشخص می کنند. برای پیدا کردن یک بردار عمود بر صفحه، ابتدا دو بردار $\overrightarrow{P_0P_1}$ و $\overrightarrow{P_0P_2}$ تشکیل می دهیم و سپس ضرب برداری آنها را محاسبه می کنیم. چون $\overrightarrow{P_0P_1}$ و $\overrightarrow{P_0P_2}$ موازی صفحه هستند، ضرب برداری آنها بر هر دو بردار عمود است و لذا عمود بر صفحه خواهد بود. تصویر F



مثال ۶ - معادله یک صفحه را پیدا کنید که شامل نقاط $P_0 = (1, 0, 2)$ و $P_1 = (-1, 3, 4)$ و $P_2 = (3, 5, 7)$ باشد.

پاسخ

ابتدا ملاحظه می کنید که بردار های دو گانه زیر موازی نیستند.

$$\overrightarrow{P_0P_1} = -2i + 3j + 2k$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = 2i + 5j + 5k$$

و لذا نقاط P_0, P_1, P_2 یک صفحه را مشخص می کنند. برای پیدا کردن یک بردار عمود خواهیم داشت.

$$N = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5i + 14j - 16k$$

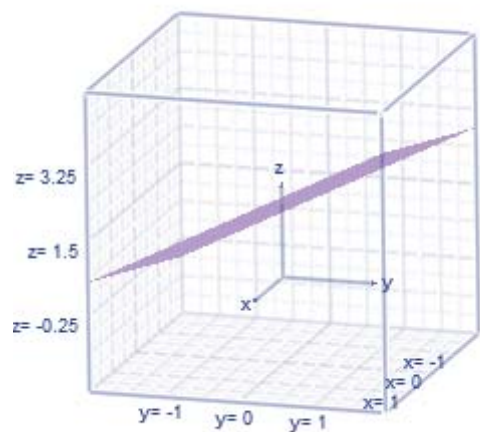
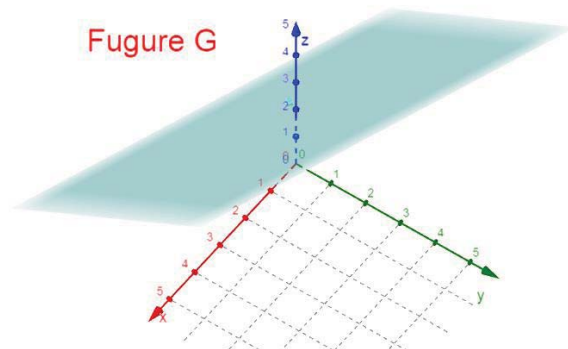
چون N عمود بر صفحه است و $(1, 0, 2)$ روی صفحه قرار دارد، شماره (۱) را بکار می بریم و نتیجه می گیریم یک معادله صفحه مطابق زیر است.

$$5(x - 1) + 14(y - 0) - 16(z - 2) = 0$$

و یا

$$5x + 14y - 16z = -27$$

تصویر G



قضیه فاصله بین یک نقطه تا یک صفحه Distance from a Point to a Plane Theorem فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ یک صفحه باشد و بردار N عمود بر آن. و فرض می‌کنیم P_1 یک نقطه خارج $\mathcal{P}$ و پس فاصله بین P_1 و $\mathcal{P}$ مطابق زیر است.

$$D = \frac{|N \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}|}{\|N\|} \quad (۳)$$

در فرمول بالا، P_0 هر نقطه‌ای روی $\mathcal{P}$ می‌تواند باشد.

اثبات

فرض می‌کنیم θ زاویه بین N و $\overrightarrow{P_0 P_1}$ باشد، بطوری که داشته باشیم $0 \leq \theta \leq \pi$ اگر $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ باشد، پس داریم.

$$D = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| \cos \theta$$

تصویر H

اما اگر $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ باشد، پس داریم

$$D = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| \cos(\pi - \theta) = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| (-\cos \theta)$$

تصویر I . پس θ هر چه باشد، مسافت مطابق زیر است.

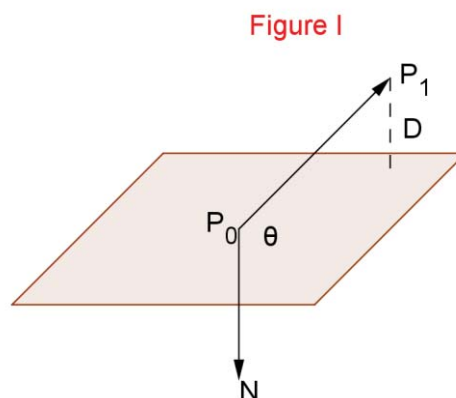
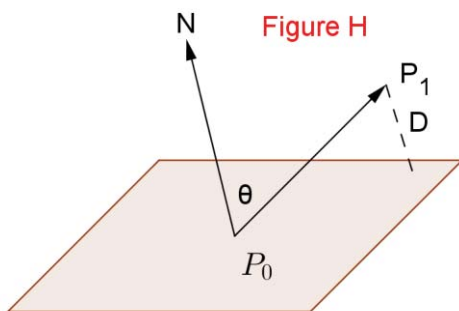
$$D = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| |\cos \theta|$$

اما

$$|N \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}| = \|N\| \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| |\cos \theta|$$

بطوری که

$$D = \|\overrightarrow{P_0 P_1}\| |\cos \theta| = \frac{|N \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}|}{\|N\|}$$



مثال ۷ - فاصله بین نقطه $P_1 = (-1, 1, 2)$ و صفحه $3x - 2y + z = 1$ را محاسبه کنید.

پاسخ

معادله صفحه، یک بردار عمود N به ما می دهد، یعنی

$$N = 3i - 2j + k$$

از معادله صفحه همچنین می توانیم یک نقطه روی آن پیدا کنیم. برای این کار فرض می کنیم $x = y = 0$ باشد. پس $z = 1$ است، بطوری که $P_0 = (0, 0, 1)$ روی صفحه است. یک محاسبه ساده بردار زیر را به ما می دهد.

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (-1 - 0)i + (1 - 0)j + (2 - 1)k = -i + j + k$$

و

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = (3)(-1) + (-2)(1) + (1)(1) = -3 - 2 + 1 = -4$$

پس

$$D = \frac{|N \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{\|N\|} = \frac{|-4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

تمرینات ۳.۷

در تمرینات زیر معادله یک صفحه را پیدا کنید که شامل P_0 باشد و بردار N بر آن عمود باشد.

۱) $P_0 = (-1, 2, 3), N = -4i + 15j - \frac{1}{4}k$

۲) $P_0 = (9, 17, -7), N = 2i - 3k$

۳) $P_0 = (2, 3, -5), N = j$

۴ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(1, -1, 2)$ و خط با معادله های تقارنی زیر باشد.

$$x + 2 = y + 1 = \frac{z + 5}{2}$$

۵ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(2, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ باشد و عمود بر خطی باشد با معادله های

پارامتری زیر.

$$x = \pi + 2t, y = 2\pi + 5t, z = 9t$$

۶ - فرض کنید خط l محل تقاطع دو صفحه زیر باشد.

$$2x - 3y + 4z = 2 \text{ و } x - z = 1$$

الف - معادله برداری l را پیدا کنید.

ب - معادله صفحه ای را پیدا کنید که عمود بر l و شامل نقطه $(-9, 12, 14)$ باشد.

۷ - فاصله بین نقطه $(3, -1, 4)$ و صفحه $2x - y + z = 5$ را پیدا کنید.

۸ - نشان دهید که فاصله بین مبدا و صفحه $ax + by + cz = d$ مطابق زیر است.

$$D = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۹ - مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از $(3, 1, 5)$ و $(5, -1, 3)$ به یک اندازه باشد، یک صفحه است. معادله آن صفحه را پیدا کنید.

در تمرینات زیر نمودار صفحه داده شده را راسم کنید.

۱۰) $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - z = 1$

۱۱) $4y + 3z = 6$

۱۲ - نشان دهید که نقاط $(2, 3, 2)$ و $(1, -1, -3)$ و $(1, 0, -1)$ و $(5, 9, 5)$ همگی روی یک صفحه قرار دارند.

۱۳ - فرض کنید صفحه های p_1 و p_2 با هم تلاقی دارند. و فرض کنید a و b روی p_1 و c و d روی p_2 قرار دارند. نشان دهید $(a \times b) \times (c \times d)$ موازی محل تلاقی p_1 و p_2 است.

۱۴ - کدام صفحه های زیر همانند و مساوی هستند، کدام صفحه ها با هم موازی هستند، و کدام صفحه ها بر هم عمود هستند؟

a) $x + y - z + 3 = 0$

b) $x - y - 2 = 0$

c) $y - z = 2$

d) $x + y = -5$

۱۵ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(-4, -5, -3)$ باشد و

الف - موازی صفحه yz باشد.

ب - موازی صفحه xz باشد.

ج - عمود بر محور z باشد.

در تمرینات زیر، تمام نقاط تلاقی سه صفحه را پیدا کنید.

۱۶) $x + y = 1; y + z = 2; x + z = 3$

۱۷) $2x - 3y - z = 1; x + 3y + z = -2; y + z = 2$

پاسخ تمرینات ۳.۷

در تمرینات زیر معادله یک صفحه را پیدا کنید که شامل P_0 باشد و بردار N بر آن عمود باشد.

$$۱) \quad P_0 = (-۱, ۲, ۳), N = -۴i + ۱۵j - \frac{1}{۴}k$$

پاسخ

$$x_0 = -۱, y_0 = ۲, z_0 = ۳, a = -۴, b = ۱۵, c = -\frac{1}{۴}$$

$$-۴(x + ۱) + ۱۵(y - ۲) - \frac{1}{۴}(z - ۳) = 0$$

$$۸x - ۳۰y + z = -۶۵$$

$$۲) \quad P_0 = (۹, ۱۷, -۷), N = ۲i - ۳k$$

پاسخ

$$x_0 = ۹, y_0 = ۱۷, z_0 = -۷, a = ۲, b = 0, c = -۳$$

$$۲(x - ۹) + 0(y - ۱۷) - ۳(z + ۷) = 0$$

$$۲x - ۳z = ۳۹$$

$$۳) \quad P_0 = (۲, ۳, -۵), N = j$$

پاسخ

$$x_0 = ۲, y_0 = ۳, z_0 = -۵, a = 0, b = ۱, c = 0$$

$$0(x - ۲) + ۱(y - ۳) + 0(z + ۵) = 0$$

$$y = ۳$$

۴ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(۱, -۱, ۲)$ و خط با معادله های تقارنی زیر باشد.

$$x + ۲ = y + ۱ = \frac{z + ۵}{۲}$$

پاسخ

نقطه $P_0 = (-۲, -۱, -۵)$ روی خط است و لذا روی صفحه. فرض می کنیم $P_1 = (۱, -۱, ۲)$

باشد، بطوری که داشته باشیم $\overrightarrow{P_0P_1} = ۳i + ۷k$ • بردار $i + j + ۲k$ موازی خط است، اما

موازی $\overrightarrow{P_0P_1}$ نیست. برای پیدا کردن یک بردار عمود بر صفحه، فرض می کنیم

$$N = \overrightarrow{P_0P_1} \times (i + j + ۲k) = (۳i + ۷k) \times (i + j + ۲k) = -۷i + j + ۳k$$

پس معادله صفحه مطابق زیر است.

$$-۷(x + ۲) + ۱(y + ۱) + ۳(z + ۵) = 0$$

$$۷x - y - ۳z = ۲$$

۵ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ باشد و عمود بر خطی باشد با معادله های پارامتری زیر.

$$x = \pi + 2t, y = 2\pi + 5t, z = 9t$$

پاسخ

یک بردار عمود بر صفحه $N = 2i + 5j + 9k$ است. پس یک معادله صفحه مطابق زیر است.

$$2(x - 2) + 5\left(y - \frac{1}{2}\right) + 9\left(z - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$4x + 10y + 18z = 19$$

۶ - فرض کنید خط l محل تلاقی دو صفحه زیر باشد.

$$2x - 3y + 4z = 2 \text{ و } x - z = 1$$

الف - معادله برداری l را پیدا کنید.

ب - معادله صفحه ای را پیدا کنید که عمود بر l و شامل نقطه $(-9, 12, 14)$ باشد.

پاسخ

الف - خط l عمود بر بردار های $2i - 3j + 4k$ و $i - k$ است، که عمود بر دو صفحه هستند.

پس l موازی $(2i - 3j + 4k) \times (i - k) = 3i + 6j + 3k$ است و در نتیجه موازی

$i + 2j + k$ است. چون $(1, 0, 0)$ روی محل تلاقی دو صفحه است، یک معادله برداری برای l مطابق زیر است.

$$r = i + t(i + 2j + k) = (1 + t)i + 2tj + 2k$$

ب - یک بردار عمود بر صفحه $N = i + 2j + k$ است، بطوری که یک معادله برای صفحه مطابق زیر است.

$$1(x + 9) + 2(y - 12) + 1(z - 14) = 0$$

$$x + 2y + z = 29$$

۷ - فاصله بین نقطه $(3, -1, 4)$ و صفحه $2x - y + z = 5$ را پیدا کنید.

پاسخ

نقطه $P_1 = (3, -1, 4)$ روی صفحه نیست. اما نقطه $P_0 = (0, 0, 5)$ روی صفحه است. پس

$\overrightarrow{P_0P_1} = 3i - j - k$ است. اگر $N = 2i - j + k$ باشد، پس N عمود بر صفحه است. پس بر اساس قضیه فاصله یک نقطه تا صفحه داریم.

$$D = \frac{|N \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{\|N\|} = \frac{|(2i - j + k) \cdot (3i - j - k)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

۸ - نشان دهید که فاصله بین مبدا و صفحه $ax + by + cz = d$ مطابق زیر است.

$$D = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

پاسخ

اگر صفحه از مبدا عبور کند، پس $d = 0$ است، بطوری که فاصله بین مبدا تا صفحه و عدد هر دو صفر هستند. اگر صفحه از مبدا عبور نکند، فرض می کنیم $P_1 = (0, 0, 0)$ باشد و همچنین فرض می کنیم $c \neq 0$ و $P_0 = (0, 0, \frac{d}{c})$ باشد، بطوری که P_0 روی صفحه باشد. بر اساس قضیه فاصله بین نقطه و صفحه، داریم.

$$D = \frac{|(ai + bj + ck) \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(ai + bj + ck) \cdot (\frac{d}{c}k)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

اگر $a \neq 0$ و یا $b \neq 0$ باشند، باز به همین نتیجه می رسیم.

۹ - مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از $(3, 1, 5)$ و $(5, -1, 3)$ به یک اندازه باشد، یک صفحه است. معادله آن صفحه را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم (x, y, z) روی صفحه باشد. پس

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2}$$

طرفین را به توان دو می رسانیم.

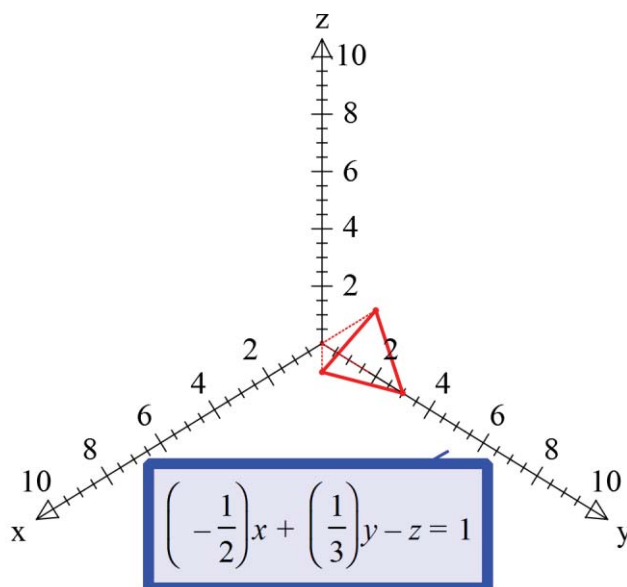
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$$

ساده می کنیم.

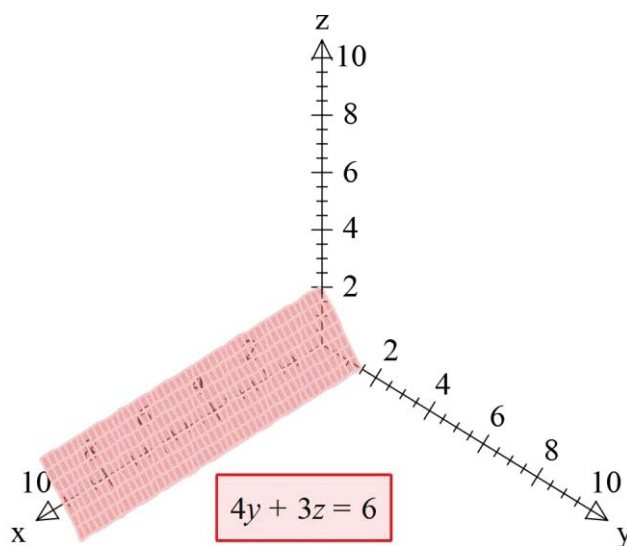
$$x - y - z = 0$$

در تمرینات زیر نمودار صفحه داده شده را راسم کنید.

$$۱۰) -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - z = 1$$



$$۱۱) 4y + 3z = 6$$



۱۲ - نشان دهید که نقاط $(2, 3, 2)$ و $(1, -1, -3)$ و $(1, 0, -1)$ و $(5, 9, 5)$ همگی روی یک صفحه قرار دارند.

پاسخ

فرض می کنیم $P_0 = (2, 3, 2)$ و $P_1 = (1, -1, -3)$ و $P_2 = (1, 0, -1)$ باشد. پس $\overrightarrow{P_0P_1} = -i - 4j - 5k$ و $\overrightarrow{P_0P_2} = -i - 3j - 3k$ است. بردار N عمود بر صفحه که شامل سه نقطه نام برده باشد، مطابق زیر بدست می آید.

$$N = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = (-i - 4j - 5k) \times (-i - 3j - 3k) = -3i + 2j - k$$

پس یک معادله صفحه

$$-3(x - 2) + 2(y - 3) - 1(z - 2) = 0$$

و یا

$$3x - 2y + z = 2$$

است. چون

$$3 \cdot 5 - 2 \cdot 9 + 5 = 2$$

است، پس نقطه چهارم یعنی $(5, 9, 5)$ هم روی صفحه است و در نهایت هر چهار نقطه داده شده روی صفحه است.

۱۳ - فرض کنید صفحه های p_1 و p_2 با هم تلاقی دارند. و فرض کنید a و b روی p_1 و c و d روی p_2 قرار دارند. نشان دهید $(a \times b) \times (c \times d)$ موازی محل تلاقی p_1 و p_2 است.

پاسخ

چون $(a \times b) \times (c \times d)$ عمود بر $(a \times b)$ و $(c \times d)$ است، و در نتیجه به ترتیب عمود بر p_1 و p_2 است، و لذا $(a \times b) \times (c \times d)$ موازی تمام بردار هایی است که هم روی p_1 و هم روی p_2 قرار دارند و در نهایت موازی محل تلاقی p_1 و p_2 است.

۱۴ - کدام صفحه های زیر همانند و مساوی هستند، کدام صفحه ها با هم موازی هستند، و کدام صفحه ها بر هم عمود هستند؟

a) $x + y - z + 3 = 0$

b) $x - y - 2 = 0$

c) $y - z = 2$

d) $x + y = -5$

پاسخ

بردار های عمود بر معادله های a, b, c, d عبارتند از

$$i + j - k$$

$$i - j$$

$$j - k$$

$$i + j$$

و چون هیچ کدام از اینها، مضرب دیگری نیستند، پس هیچ دو صفحه ای مساوی و یا موازی نیستند. چون $(i+j-k) \cdot (i-j) = 0$ و $(i-j) \cdot (i+j) = 0$ هستند، پس صفحه های a و b بر هم عمود هستند و همچنین b و d

- ۱۵ - معادله صفحه ای را پیدا کنید که شامل نقطه $(-4, -5, -3)$ باشد و
 الف - موازی صفحه yz باشد.
 ب - موازی صفحه xz باشد.
 ج - عمود بر محور z باشد.

پاسخ

- الف - بردار i عمود بر صفحه است، پس معادله صفحه مطابق زیر است.
 $x = -4$ یا $x + 4 = 0$
 ب - بردار j عمود بر صفحه است، پس معادله صفحه مطابق زیر است.
 $y = -5$ یا $y + 5 = 0$
 ج - بردار k عمود بر صفحه است، پس معادله صفحه مطابق زیر است.
 $z = -3$ یا $z + 3 = 0$

در تمرینات زیر، تمام نقاط تلاقی سه صفحه را پیدا کنید.

۱۶) $x + y = 1; y + z = 2; x + z = 3$

پاسخ

از اولین و دومین معادله داریم، $x = 1 - y$ و $z = 2 - y$ حالا این دو را در معادله سوم قرار می دهیم. پس داریم.

$$3 = x + z = (1 - y) + (2 - y) = 3 - 2y$$

پس $y = 0$ است. و لذا داریم $x = 1$ و $z = 2$ و در نهایت محل تلاقی $(1, 0, 2)$ است.

۱۷) $2x - 3y - z = 1; x + 3y + z = -2; y + z = 2$

پاسخ

اولین و دومین معادله را با هم جمع می کنیم. داریم. $3x = -1$ و یا $x = -\frac{1}{3}$ دومین معادله می شود $3y + z = -\frac{5}{3}$ معادله سوم را از این معادله کم می کنیم. پس داریم. $y = -\frac{11}{6}$ و لذا $z = \frac{23}{6}$ و در نهایت، محل تلاقی مطابق زیر است.

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{23}{6}\right)$$

جلد سوم حسابان

فصل چهارم تابع های برداری

Vector-Valued Functions

تا کنون تابع هایی را مورد مطالعه قرار داده ایم که هم دامنه و هم برد آنها ، اعداد حقیقی هستند. در این فصل نوع دیگری تابع را مورد بحث قرار می دهیم. یعنی تابع هایی که دامنه آنها اعداد حقیقی و برد آنها شامل بردار ها است. به این نوع تابع ها ، **تابع های برداری Vector-Valued Functions** می گویند. این نوع تابع ها ، کاربرد های زیادی دارند. مثلاً ، برای توصیف حرکت یک ماهواره از یک تابع برداری استفاده می کنند ، که دامنه آن یک بازه زمانی است و برد آن در زمان t ، یک بردار است یعنی مکان ماهواره را در زمان t مشخص می کند.

دامنه : Domain

برد : Range

۴.۱ - تعریف و مثال های تابع های برداری

Definition and Examples of Vector-Valued Functions

می دانید که ارتباط بین یک مجموعه از اعداد و مجموعه دیگری از اعداد را تابع می گویند. هنگام مطالعه حرکت به ارتباط بین یک مجموعه اعداد و یک مجموعه از بردار ها برخورد می کنیم. این ارتباط بوسیله یک تابع برداری مشخص می شود.

تعریف تابع برداری Definition of Vector-Valued Function

A Vector-Valued Function یک تابع برداری شامل دو بخش است. یک دامنه **A Domain** که مجموعه ای از اعداد است. و یک قانون **A Rule** که برای هر عدد در دامنه فقط یک بردار اختصاص می دهد.

اعداد دامنه یک تابع برداری معمولاً بوسیله t مشخص می شود. دلیل آن هم این است که در بیشتر موارد دامنه این تابع ها معمولاً یک بازه زمانی است. تابع های برداری معمولاً بوسیله حروف برجسته مانند F ، G ، H نشان داده می شوند. مجموعه بردار هایی که بوسیله تابع برداری به اعداد دامنه اختصاص داده می شود برد **Range** تابع نامیده می شوند. هنگامی که یک تابع برداری بوسیله یک فرمول تعریف می شود ، دامنه آن معمولاً تمام اعدادی است که برای آنها آن فرمول معنی دارد. مثلاً

$$F(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (-1 + t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

دامنه F بازه $(-\infty, \infty)$ است.

$$G(t) = \mathbf{i} + \sqrt{1+t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

دامنه G بازه $[-1, \infty)$ است.

$$H(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} \quad \text{برای } 0 \leq t \leq 4\pi$$

دامنه H بازه $[0, 4\pi]$ است.

از این به بعد، به تابع هایی که دامنه و برد آنها، اعداد حقیقی هستند، **تابع های حقیقی** **Real-Valued Functions** می گویم، تا نسبت به تابع های برداری تمیز داده شوند.

هر تابع برداری F با سه تابع حقیقی مرتبط است، یعنی f_1, f_2, f_3

برای هر عدد t در دامنه F

فرض می کنیم $f_1(t)$ مربوط است به مولفه i باشد.

فرض می کنیم $f_2(t)$ مربوط است به مولفه j باشد.

فرض می کنیم $f_3(t)$ مربوط است به مولفه k باشد.

پس دامنه هر کدام از تابع های f_1, f_2, f_3 همان دامنه F است. و

$$F(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

برای t در دامنه F

تابع های f_1, f_2, f_3 را **تابع های مولفه F** می نامند. **Component Functions of F.**

مثال ۱ - فرض کنید

$$F(t) = \ln t i + \sqrt{1-t} j + t^4 k$$

باشد. دامنه F و تابع های مولفه آنرا مشخص کنید.

پاسخ

دامنه F شامل کلیه مقادیر t است که برای آنها $\ln t$ و $\sqrt{1-t}$ و t^4 تعریف شده باشند. پس دامنه این تابع بازه $(0, 1]$ است. تابع های مولفه مطابق زیر هستند.

$$f_1(t) = \ln t, f_2(t) = \sqrt{1-t}, f_3(t) = t^4$$

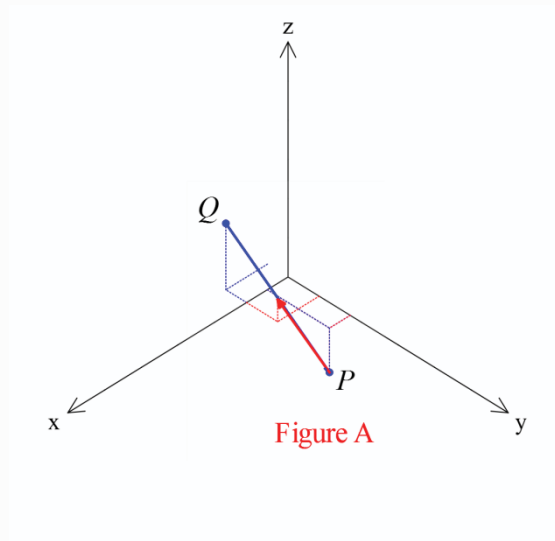
معمولا غیر ممکن است بتوانیم نمودار یک تابع برداری را رسم کنیم. زیرا در حقیقت احتیاج به سیستم چهار بعدی داریم. یکی برای دامنه و سه تا هم برای برد. اما، می توانیم یک تابع برداری را فقط با رسم برد آن نشان دهیم. اگر $F(t)$ را به عنوان یک نقطه در فضا تصور کنیم، پس هنگامی که t افزایش پیدا می کند، $F(t)$ یک منحنی در فضا بجا می گذارد. فراموش نشود که این منحنی می تواند یک خط مستقیم و یا یک خط منحنی باشد. تصویر A .

در تصویر A خطی که از نقطه $P = (1, 3, -2)$ شروع می شود و به طرف $Q = (2, -1, 3)$ تغییر مکان می دهد، دارای یک بردار هادی $\vec{PQ} = (2-1, -1-3, 3-(-2)) = (1, -4, 5)$

در مثالی که برای تصویر A آوردیم، $F(t) = \langle 1, 3, -2 \rangle + t \langle 1, -4, 5 \rangle = \langle 1+t, 3-4t, -2+5t \rangle$ و معادله های پارامتری آن مطابق زیر است.

$$x = 1+t, y = 3-4t, z = -2+5t$$

پیکان در تصویر A جهت خط را نشان می دهد هنگامی که t افزایش می یابد.



اگر داشته باشیم

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

برای t در دامنه $\mathbf{F}$ پس می توانیم خط یا منحنی C را با معادله های پارامتری زیر مشخص کنیم.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

پس یک منحنی در فضا را می توان یا بوسیله یک تابع برداری نشان داد و یا بوسیله معادله های پارامتری.

مثال ۲- فرض کنید $\mathbf{F}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (-1 + t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ باشد. نمودار منحنی که $\mathbf{F}$ بر جا می گذارد را رسم کنید.

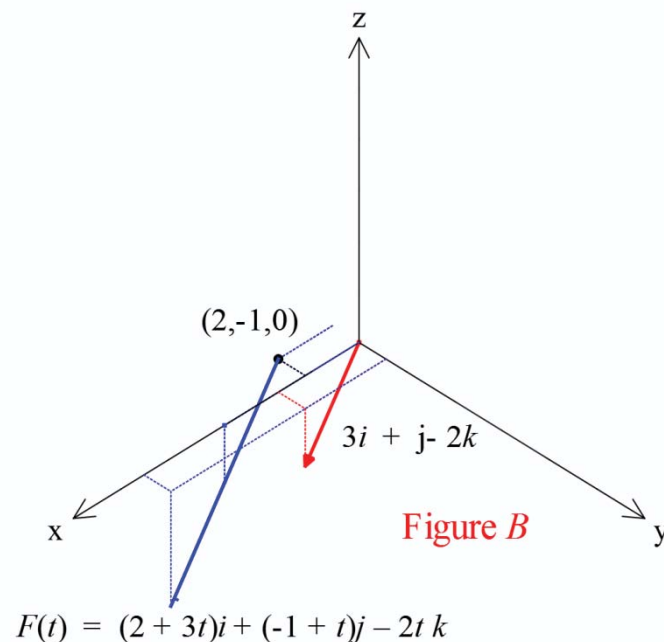
پاسخ

اگر فرض کنیم (x, y, z) یک نقطه روی منحنی مربوط به $\mathbf{F}(t)$ باشد، پس داریم

$$x = 2 + 3t, \quad y = -1 + t, \quad z = -2t$$

بر اساس شماره (۳) بخش ۳.۶ ملاحظه می کنیم که این ها معادله های پارامتری خطی است که شامل

نقطه $(2, -1, 0)$ است و موازی بردار $3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ است. تصویر B



بطور کلی فرض کنید داشته باشیم

$$F(t) = (x_0 + at)i + (y_0 + bt)j + (z_0 + ct)k$$

در معادله بالا x_0, y_0, z_0, a, b, c اعداد ثابت هستند و a, b, c همه صفر نیستند، بلکه ممکن است یکی و یا دو تا صفر باشند اما نه همه آنها. تجزیه و تحلیل شبیه مثال ۲ نشان می دهد منحنی بجا مانده بوسیله F ، یک خط مستقیم است که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می گذرد و موازی بردار $ai + bj + ck$ است. به همین دلیل F را یک تابع خطی **Linear Function** می نامند.

مثال ۳ - فرض کنید

$$F(t) = \cos t i + \sin t j$$

باشد. نشان دهید F ، در جهت خلاف عقربه ساعت، یک دایره واحد در سیستم xy ترسیم می کند که مرکز آن مبدا مختصات است.

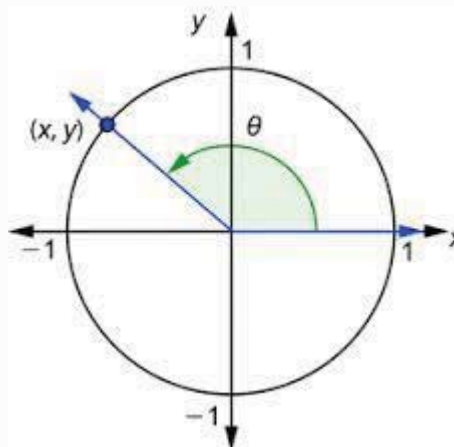
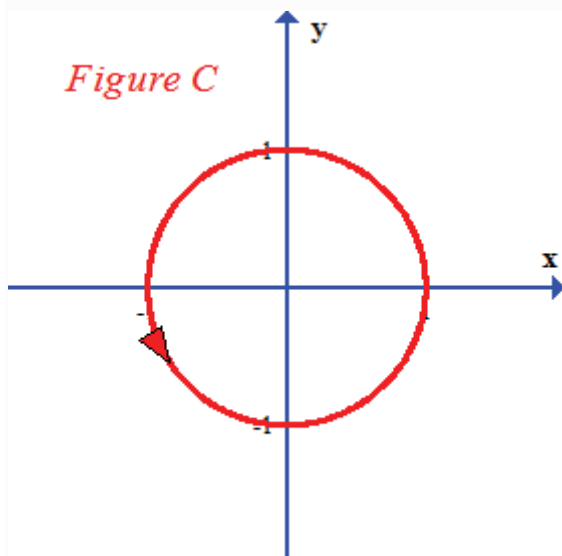
پاسخ

منحنی که F رسم می کند در سیستم xy قرار دارد، زیرا مولفه k صفر است. و چون

$$\|F(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

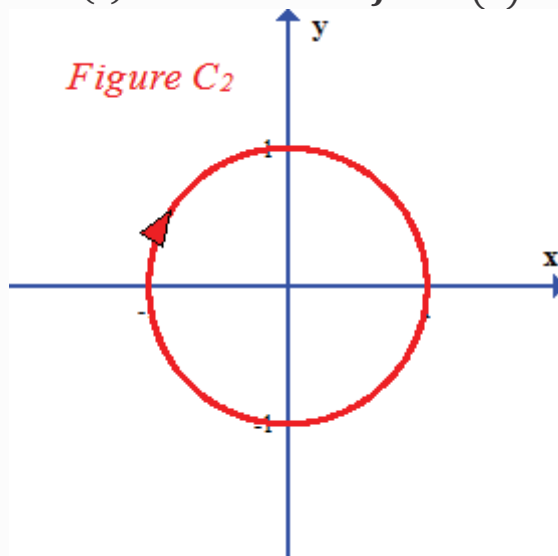
است برای تمام t ها، پس منحنی روی دایره واحد قرار دارد. علاوه بر این، چون $F(t)$ نسبت به قسمت مثبت محور x یک زاویه به اندازه t رادیان ایجاد می کند و t تمام اعداد حقیقی را در بر می گیرد، پس هر نقطه ای روی دایره واحد، $F(t)$ است. در نتیجه تمام دایره بوسیله F طی می شود. و در نهایت، هنگامی که t افزایش پیدا می کند، بردار $F(t)$ در جهت خلاف عقربه ساعت اطراف دایره می چرخد. تصویر C

تصویر C



از این به بعد دایره مثال ۳ را دایره واحد استاندارد می نامیم. اگر بخواهیم دایره واحد موافق جهت عقربه ساعت رسم کنیم از فرمول زیر استفاده می کنیم. تصویر C_2

$$G(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \quad (۱)$$



مثال ۴ - فرض کنید داشته باشیم

$$F(t) = \cos t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t \mathbf{k}$$

نمودار منحنی که توسط F ایجاد می شود ، رسم کنید.

پاسخ

این منحنی هم یک دایره است. برای نشان دادن این موضوع ، فرض می کنیم (x, y, z) یک نقطه روی منحنی مربوط به $F(t)$ باشد. پس

$$x = \cos t, \quad y = \cos t, \quad z = \sqrt{2} \sin t$$

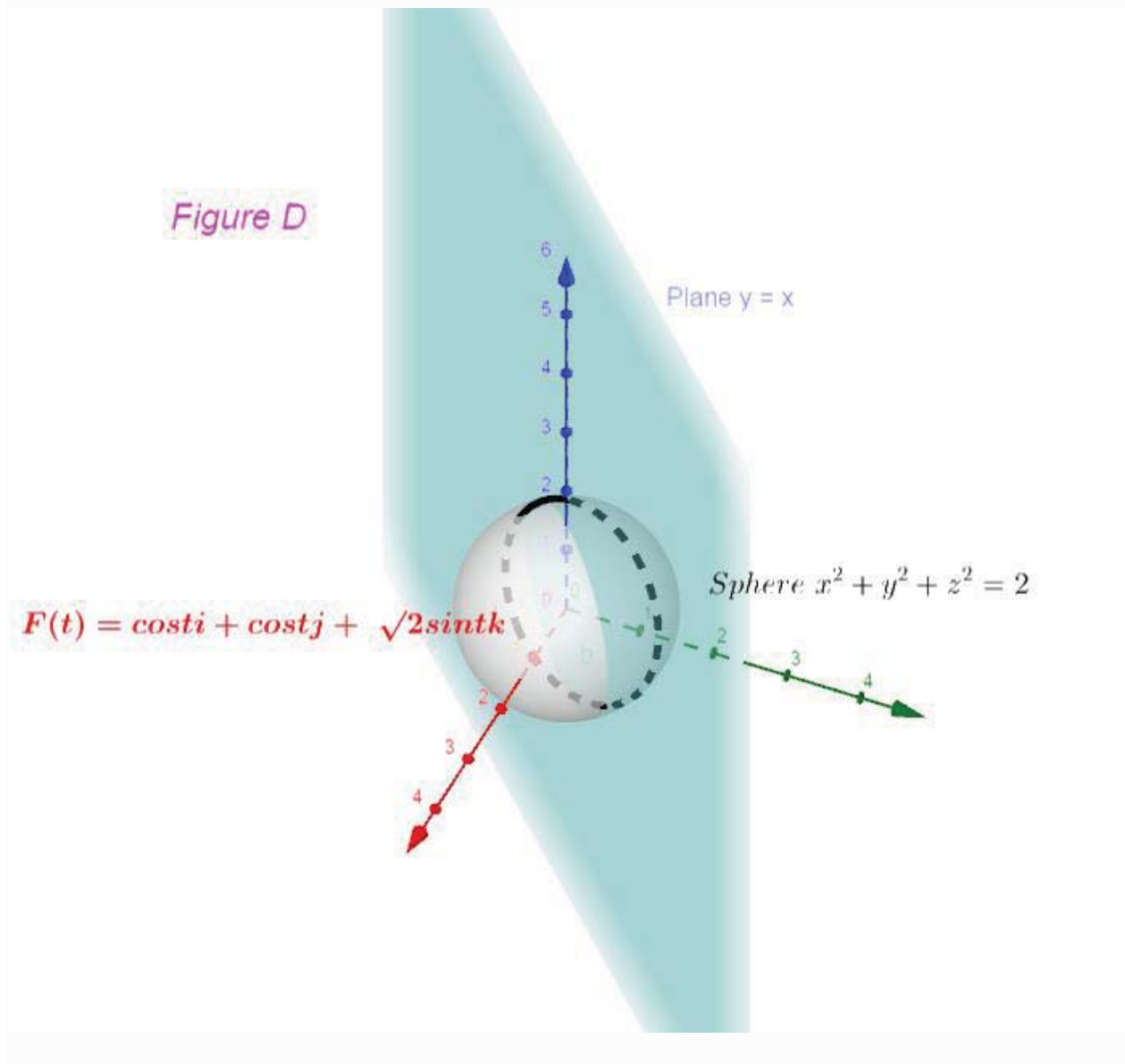
از این معادله ها معادله زیر را بدست می آوریم.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \cos^2 t + 2 \sin^2 t = 2$$

و همچنین

$$x = y$$

لذا نقطه (x, y, z) روی کره با شعاع $\sqrt{2}$ و روی صفحه $x = y$ قرار دارد. و نتیجه می گیریم که این منحنی روی یک دایره قرار دارد. همچنین می توان نشان داد که هر نقطه ای روی دایره، در حقیقت منحنی ایجاد شده توسط F است. تصویر D



ترکیب های تابع های برداری Combinations of Vector-Valued Functions**تعریف Definition**

فرض می کنیم F و G تابع های برداری باشند. f و g تابع های حقیقی. پس $F + G$ و $F - G$ و fF و $F \cdot G$ و $F \circ G$ و $F \times G$ مطابق زیر تعریف می شوند.

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t) \quad (F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

$$(F - G)(t) = F(t) - G(t) \quad (F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$$

$$(fF)(t) = f(t)F(t) \quad (F \circ g)(t) = F(g(t))$$

مثال ۵ فرض می کنیم داشته باشیم.

$$\begin{aligned} F(t) &= \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \\ G(t) &= -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \\ g(t) &= \sqrt{t} \end{aligned}$$

مطلوب است

$$F + G \quad \text{و} \quad F - G \quad \text{و} \quad gF \quad \text{و} \quad F \cdot G \quad \text{و} \quad F \times G \quad \text{و} \quad F \circ g$$

پاسخ

$$(F + G)(t) = (\cos t - \sin t) \mathbf{i} + (\sin t + \cos t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

$$(F - G)(t) = (\cos t + \sin t) \mathbf{i} + (\sin t - \cos t) \mathbf{j}$$

$$(gF)(t) = \sqrt{t} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{t} \sin t \mathbf{j} + t^{3/2} \mathbf{k}$$

$$(F \cdot G)(t) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t + t^2 = t^2$$

$$(F \times G)(t) = t(\sin t - \cos t) \mathbf{i} - t(\sin t + \cos t) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$(F \circ g)(t) = F(g(t)) = \cos \sqrt{t} \mathbf{i} + \sin \sqrt{t} \mathbf{j} + \sqrt{t} \mathbf{k}$$

دامنه هر کدام از تابع های بالا بجز gF و $F \circ g$ شامل کلیه اعداد حقیقی است. دامنه gF و $F \circ g$ شامل $[0, \infty)$ است.

در مثال بعد ، یک تابع برداری را به مجموع دو تابع برداری دیگر تجزیه می کنیم برای این که منحنی طی شده را رسم کنیم.

مثال ۶ فرض کنید داشته باشیم $H(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ، منحنی طی شده توسط H را رسم کنید.

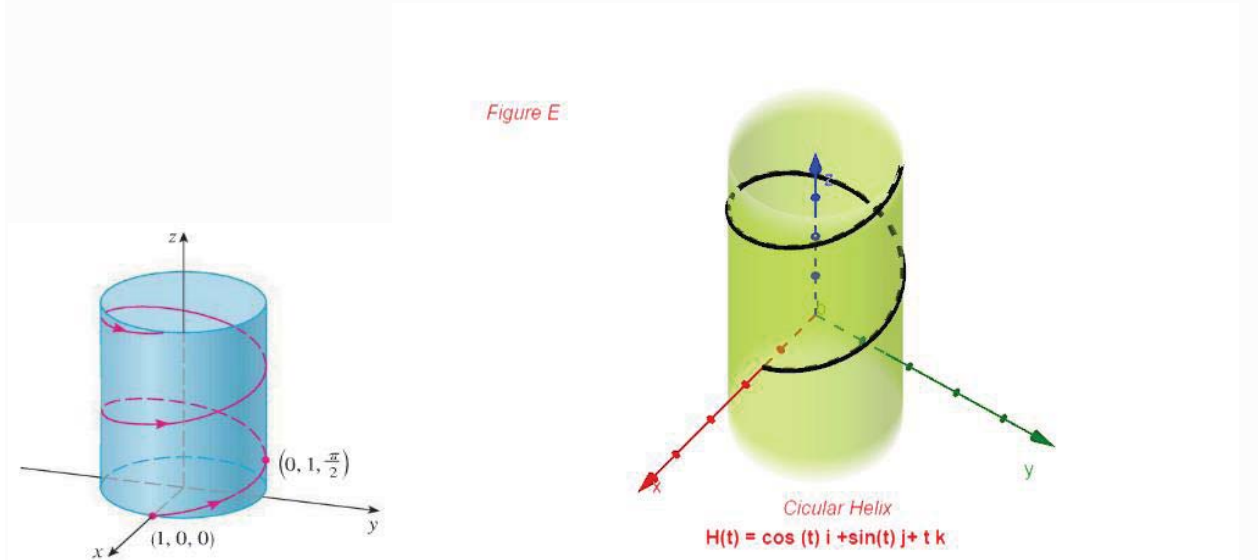
پاسخ

فرض می کنیم $F(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ و $G(t) = t \mathbf{k}$ باشد. پس داریم.

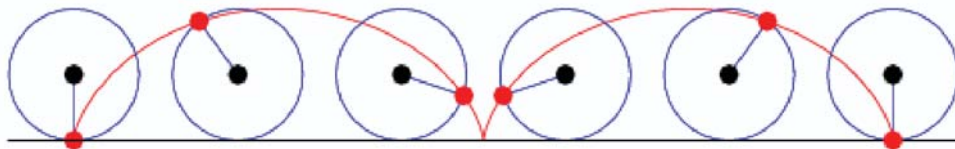
$$H(t) = F(t) + G(t) = F(t) + t \mathbf{k}$$

بطوری که نقطه مربوط به $H(t)$ به اندازه $|t|$ واحد مستقیماً بالا و یا پایین نقطه مربوط به $F(t)$ قرار دارد. چون می دانیم منحنی ایجاد شده بوسیله F دایره واحد استاندارد است ، تصویر C ، منحنی ایجاد شده توسط H در تصویر E نشان داده شده است.

منحنی در تصویر E هلیکس مدور و یا مارپیچ مدور **Circular Helix** نامیده می شود. ملاحظه می کنید که این منحنی روی استوانه مدور $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. تصویر E



تصویر زیر را ملاحظه کنید. به این منحنی سیکلوئید **Cycloid** می گویند. این منحنی بوسیله یک نقطه که روی یک دایره قرار دارد، و این دایره در امتداد یک خط مستقیم غلت می خورد، ایجاد می شود. برای دیدن نمودار متحرک به فصل نمودار های متحرک، فایل سیکلوئید مراجعه کنید.



مثال ۷ - یک دایره به شعاع r در امتداد قسمت مثبت محور x با سرعت یک رادیان در واحد زمان غلت می خورد. فرض می کنیم P یک نقطه روی دایره باشد که در زمان $t = 0$ روی مبدا مختصات قرار دارد. یک تابع برداری F پیدا کنید که منحنی ایجاد شده بوسیله P را توصیف می کند.

پاسخ

همان طور که در تصویر F ملاحظه می کنید، بردار $F(t)$ از مبدا تا P در زمان t را می توان بصورت $a + b$ نوشت، جهت بردار a از مبدا مختصات است به طرف مرکز دایره و جهت بردار b از مرکز دایره است تا P .

برای این که a را بر حسب t بنویسیم، ملاحظه می کنید در زمان t دایره در امتداد محور x مسافت rt غلتیده است. پس rt ضریب مولفه i است. چون r واحد فاصله C تا محور x است، پس r ضریب مولفه j است. در نتیجه داریم، $a = rti + rj$.
برای این که b را بر حسب t بنویسیم، ابتدا فرض می کنیم دایره با سرعت یک رادیان در واحد زمان می غلتد. یعنی می توان گفت t تعداد رادیان هایی است که طی آن $\overrightarrow{CP}$ از زمان صفر چرخیده

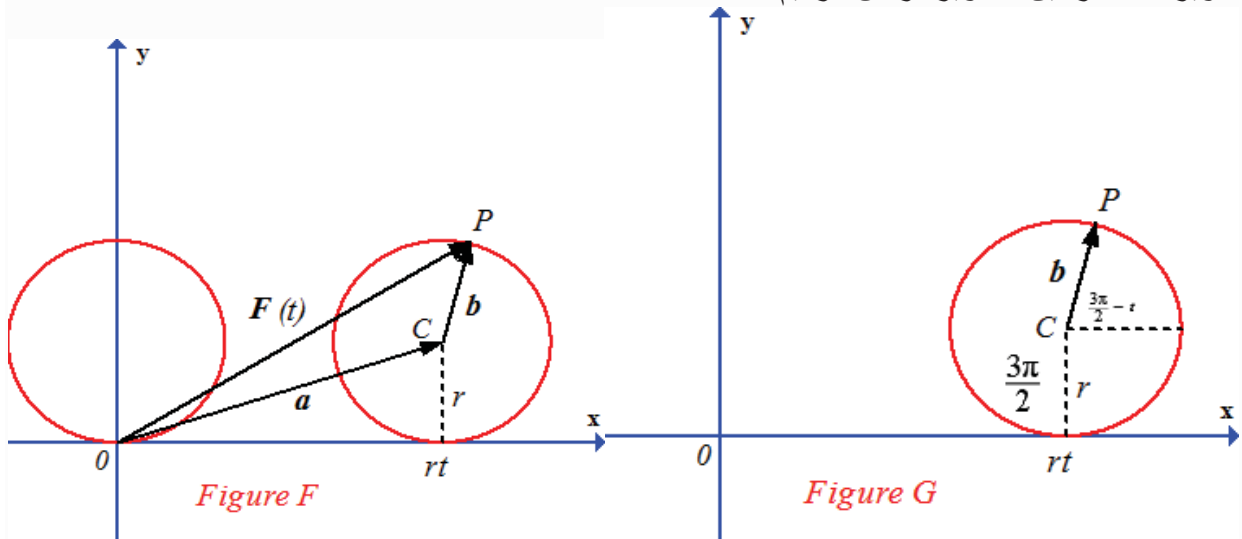
است. پس در زمان t ، بردار $\overrightarrow{CP}$ یک زاویه به اندازه $\frac{3\pi}{2} - t$ رادیان نسبت به قسمت مثبت محور x ایجاد کرده است. تصویر G چون طول b شعاع دایره است، یعنی r ، پس نتیجه میگیریم

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{CP} = r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{i} + r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{j}$$

و در نهایت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (rt\mathbf{i} + r\mathbf{j}) + r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{i} + r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{j} \\ &= r(t - \sin t)\mathbf{i} + r(1 - \cos t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

تصویر H . در این تصویر فرض کردیم $r = 1$ است



همان طور که در تصویر F ملاحظه می کنید، بردار $\mathbf{F}(t)$ از مبدا تا P در زمان t را می توان بصورت $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ نوشت. جهت بردار $\mathbf{a}$ از مبدا مختصات است به طرف مرکز دایره و جهت بردار $\mathbf{b}$ از مرکز دایره است تا P .

برای این که $\mathbf{a}$ را بر حسب t بنویسیم، ملاحظه می کنید در زمان t دایره در امتداد محور x مسافت rt غلتیده است. پس rt ضریب مولفه $\mathbf{i}$ است. چون r واحد فاصله C تا محور x است، پس r ضریب مولفه $\mathbf{j}$ است. در نتیجه داریم، $\mathbf{a} = rt\mathbf{i} + r\mathbf{j}$

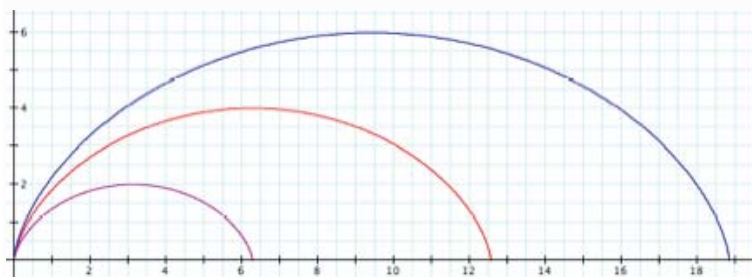
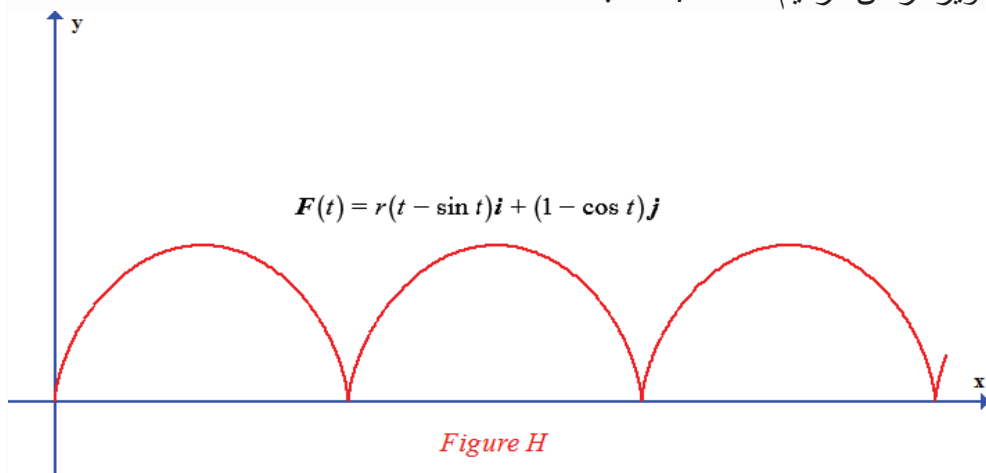
برای این که $\mathbf{b}$ را بر حسب t بنویسیم، ابتدا فرض می کنیم دایره با سرعت یک رادیان در واحد زمان می غلتد. یعنی می توان گفت t تعداد رادیان هایی است که طی آن $\overrightarrow{CP}$ از زمان صفر داوران کرده است. پس در زمان t ، بردار $\overrightarrow{CP}$ یک زاویه به اندازه $\frac{3\pi}{2} - t$ رادیان نسبت به محور x ایجاد کرده است. تصویر G چون طول b شعاع دایره است، یعنی r ، پس نتیجه میگیریم

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{CP} = r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{i} + r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \mathbf{j}$$

و در نهایت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (rt\mathbf{i} + r\mathbf{j}) + r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{i} + r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{j} \\ &= r(t - \sin t)\mathbf{i} + r(1 - \cos t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

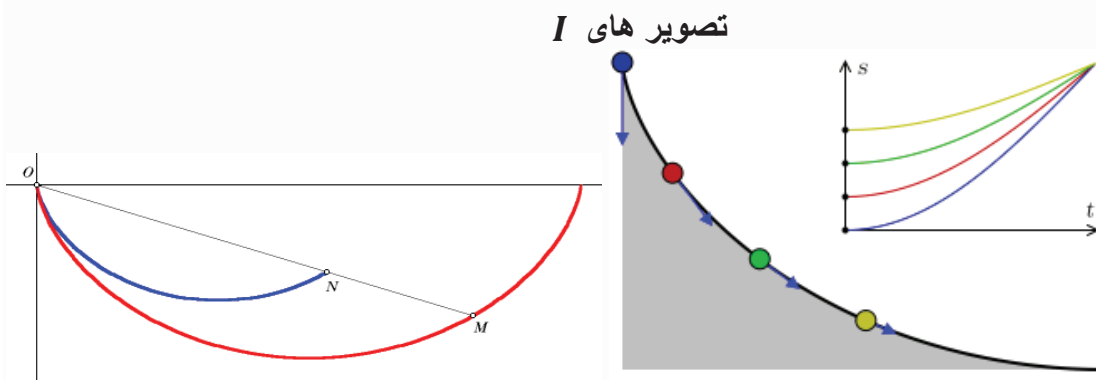
تصویر H . در این تصویر فرض کردیم $r = 1$ است.



$$\begin{aligned} \text{Purple: } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix} & \text{Red: } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(t - \sin t) \\ 2(1 - \cos t) \end{bmatrix} & \text{Blue: } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3(t - \sin t) \\ 3(1 - \cos t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

گر چه فایده سیکلوئید توسط گالیله Galileo شناخته شده بود ، اما این برنولی Bernoulli بود که سیکلوئید را با حل مساله کوتاه ترین زمان را مشهور کرد. مساله عبارت است پیدا کردن منحنی که در طول آن یک شئی که فقط تحت تاثیر جاذبه قرار دارد ، باید حرکت کند و در کوتاه ترین مدت از نقطه O به نقطه M برسد. برنولی نشان داد منحنی که کمترین زمان لازم دارد منحنی سیکلوئید است.

تصویر های I



تمرینات ۴.۱

در تمرینات زیر دامنه و تابع های مولفه تابع های داده شده را پیدا کنید.

۱) $F(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

۲) $F(t) = \tanh t\mathbf{i} - \frac{1}{t^2 - 4}\mathbf{k}$

۳) $F(t) = (t\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + 2\sqrt{t}\mathbf{k})$

۴) $2F - 3G$

اگر

$$F(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \text{ و } G(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

باشد.

۵) $F \times G$

اگر

$$F(t) = t\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{k} \text{ و } G(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$$

باشد.

۶) $F \circ g$

اگر

$$F(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \sqrt{t+2}\mathbf{k} \text{ و } g(t) = t^{1/3}$$

باشد.

در تمرینات زیر نمودار منحنی ایجاد شده توسط تابع برداری را رسم کنید. جهت منحنی را هم ذکر کنید.

۷) $F(t) = t\mathbf{i}$ ، $-1 \leq t \leq \frac{1}{2}$

۸) $F(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

۹) $F(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

۱۰) $F(t) = -16t^2\mathbf{k}$ ، $t \geq 0$

۱۱) $F(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

۱۲) $F(t) = 2\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ، $-\pi \leq t \leq 0$

۱۳) $F(t) = 3\sin t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} - 3\sqrt{2}\cos t\mathbf{k}$

۱۴ - محل تلاقی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و منحنی ایجاد شده بوسیله بردار زیر را پیدا کنید.

$$F(t) = \cos \pi t\mathbf{i} + \sin \pi t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

پاسخ تمرینات ۴.۱

در تمرینات زیر دامنه و تابع های مولفه تابع های داده شده را پیدا کنید.

$$۱) \quad F(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

پاسخ

دامنه $(-\infty, \infty)$ ، مولفه ها $f_1(t) = t$ ، $f_2(t) = t^2$ ، $f_3(t) = t^3$

$$۲) \quad F(t) = \tanh t \mathbf{i} - \frac{1}{t^2 - 4} \mathbf{k}$$

پاسخ

می دانیم که $\tanh t$ برای تمام t ها تعریف شده است. پس دامنه

$(-\infty, -2)$ و $(-2, 2)$ و $(2, \infty)$ است. مولفه ها

$$f_1(t) = \tanh t \quad , \quad f_2(t) = 0 \quad , \quad f_3(t) = -\frac{1}{t^2 - 4}$$

$$۳) \quad F(t) = (t\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + 2\sqrt{t}\mathbf{k})$$

پاسخ

$$F(t) = 2\sqrt{t}\mathbf{i} - 2t^{3/2}\mathbf{j} - (t^3 + 1)\mathbf{k}$$

پس دامنه $[0, \infty)$ است. مولفه ها

$$f_1(t) = 2\sqrt{t} \quad , \quad f_2(t) = -2t^{3/2} \quad , \quad f_3(t) = -(t^3 + 1)$$

$$۴) \quad 2F - 3G$$

اگر

$$F(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad G(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

باشد.

پاسخ

$$(2F - 3G)(t) = (2t - 3\cos t)\mathbf{i} + (2t^2 - 3\sin t)\mathbf{j} + (2t^3 - 3)\mathbf{k}$$

پس دامنه $(-\infty, \infty)$ است. مولفه ها

$$f_1(t) = 2t - 3\cos t \quad , \quad f_2(t) = 2t^2 - 3\sin t \quad , \quad f_3(t) = 2t^3 - 3$$

$$۵) \quad F \times G$$

اگر

$$F(t) = t\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad G(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$$

باشد.

پاسخ

$$(F \times G)(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(1 - \cos t)\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{t}}(t - \sin t)\mathbf{j} - t(t - \sin t)\mathbf{k}$$

پس دامنه $(0, \infty)$ است و مولفه ها

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(1 - \cos t), \quad f_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}(t - \sin t), \quad f_3(t) = -t(t - \sin t)$$

۶) $F \circ g$

اگر

$$F(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{t+2} \mathbf{k} \quad \text{و} \quad g(t) = t^{1/3}$$

باشد

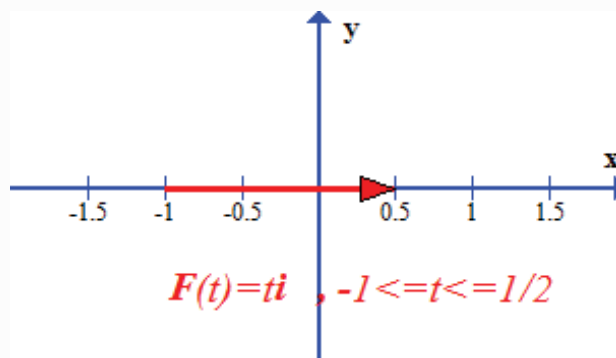
پاسخ

$$F \circ g(t) = \cos t^{1/3} \mathbf{i} + \sin t^{1/3} \mathbf{j} + \sqrt{t^{1/3} + 2} \mathbf{k}$$

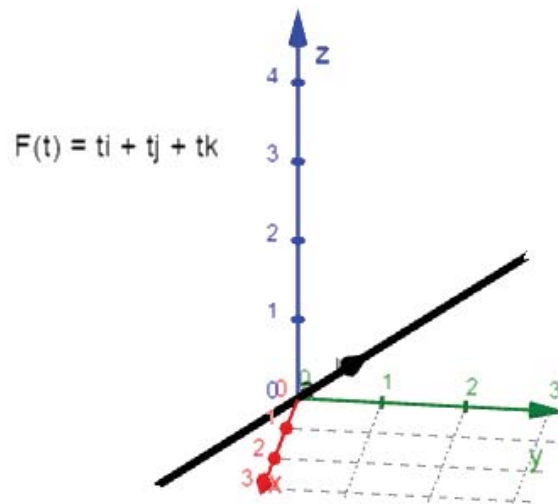
دامنه شامل تمام t ها است، بطوری که $t^{1/3} + 2 \geq 0$ باشد. پس دامنه $[-8, \infty)$ است. مولفه ها

$$f_1(t) = \cos t^{1/3}, \quad f_2(t) = \sin t^{1/3}, \quad f_3(t) = \sqrt{t^{1/3} + 2}$$

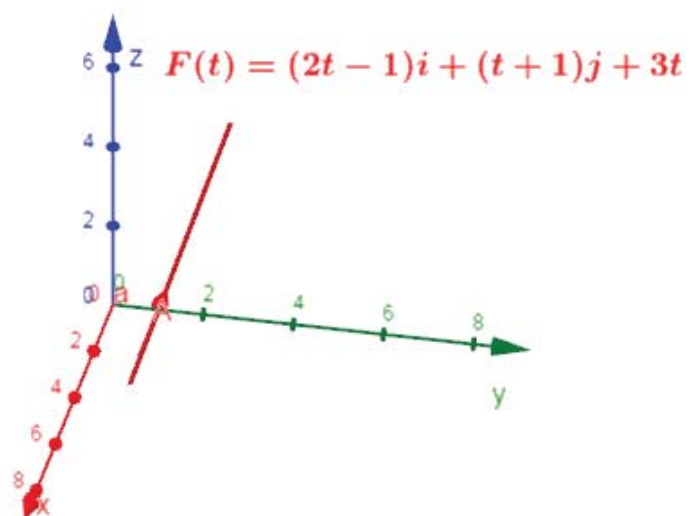
در تمرینات زیر نمودار منحنی ایجاد شده توسط تابع برداری را رسم کنید. جهت منحنی را هم ذکر کنید.

۷) $F(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 

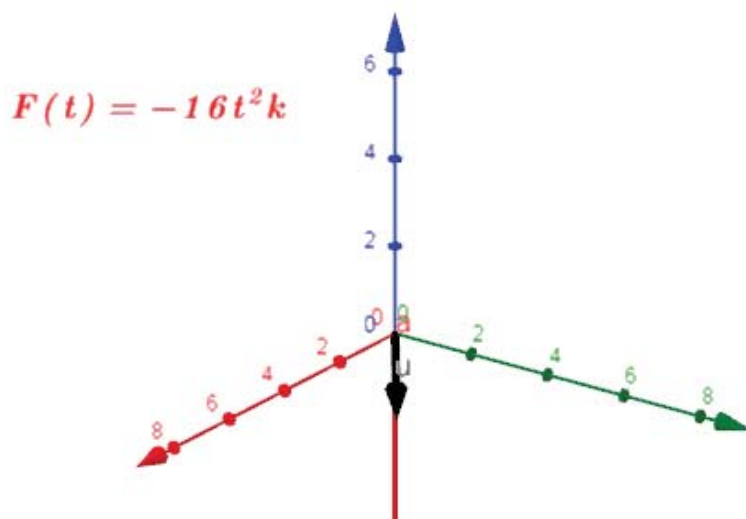
۸) $F(t) = ti + tj + tk$



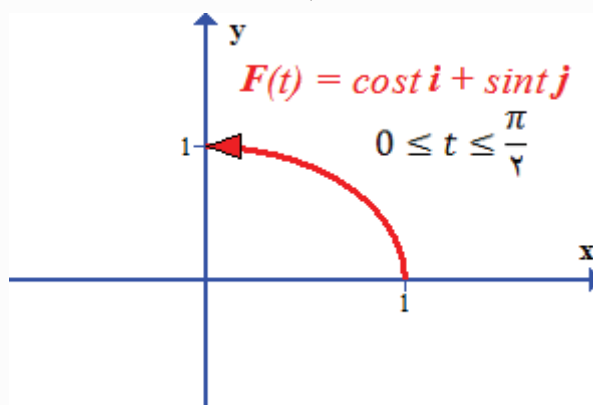
۹) $F(t) = (2t - 1)i + (t + 1)j + 3tk$



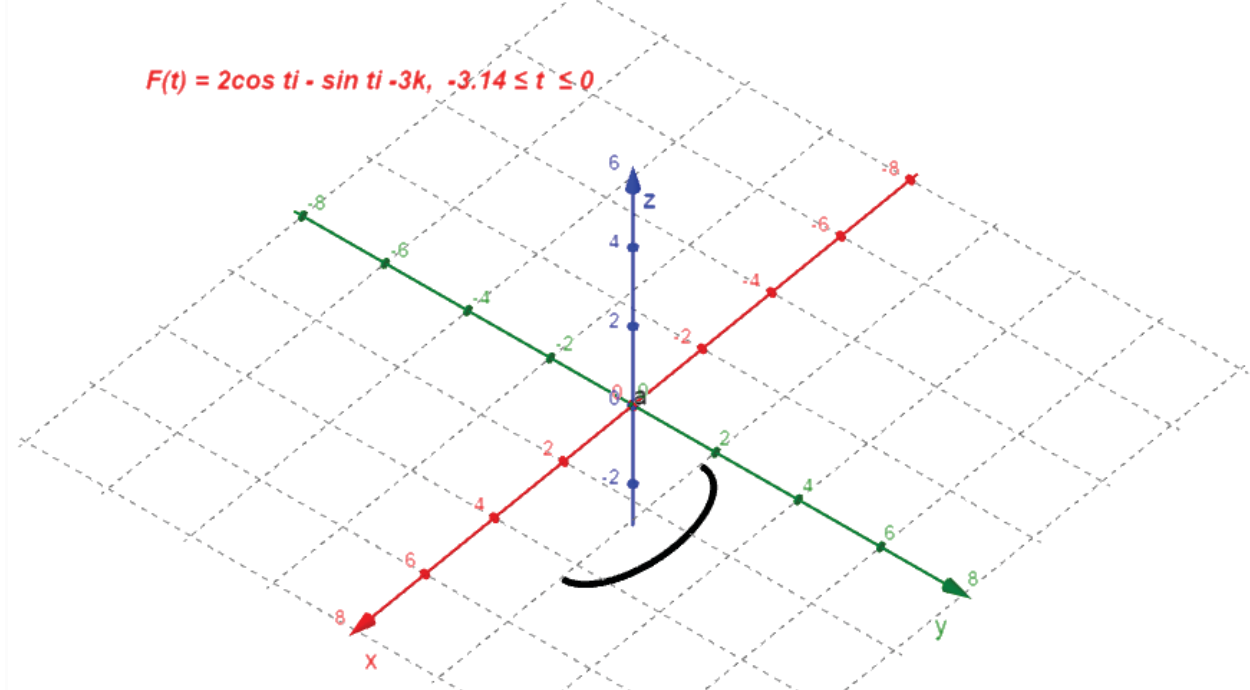
$$۱۰) \mathbf{F}(t) = -16t^2 \mathbf{k}, \quad t \geq 0$$



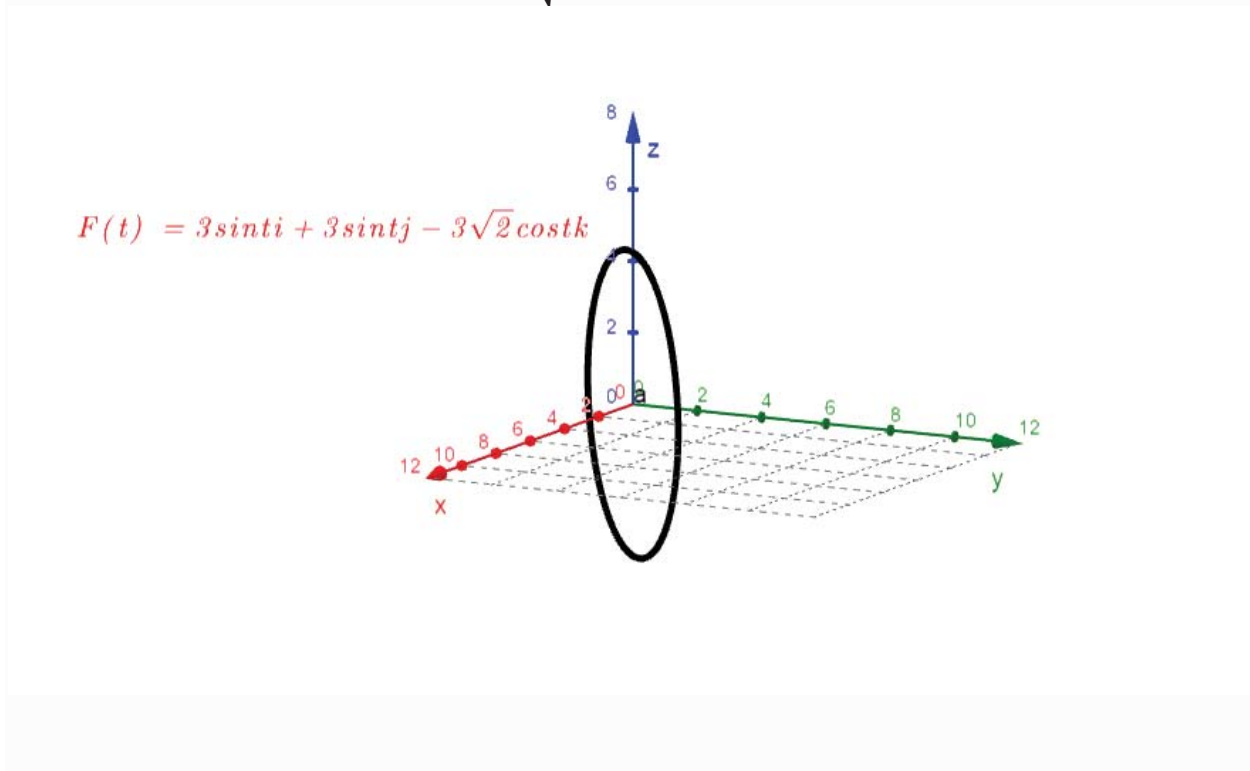
$$۱۱) \mathbf{F}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$



۱۲) $F(t) = 2 \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - 3 \mathbf{k}, \quad -\pi \leq t \leq 0$



۱۳) $F(t) = 3 \sin t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} - 3\sqrt{2} \cos t \mathbf{k}$



۱۴ - محل تلاقی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و منحنی ایجاد شده بوسیله بردار زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{F}(t) = \cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

پاسخ

اگر (x, y, z) روی منحنی باشد، پس $z = t$ ، $y = \sin \pi t$ ، $x = \cos \pi t$ است.

اگر (x, y, z) روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد، پس

$$(\cos \pi t)^2 + (\sin \pi t)^2 + t^2 = 1$$

است، بطوری که $t^2 = 9$ و یا $t = \pm 3$ است. اگر $t = 3$ باشد، پس

$$(x, y, z) = (\cos 3\pi, \sin 3\pi, 3) = (-1, 0, 3)$$

اگر $t = -3$ باشد، پس

$$(x, y, z) = (\cos(-3\pi), \sin(-3\pi), -3) = (-1, 0, -3)$$

لذا نقاط تلاقی $(-1, 0, 3)$ و $(-1, 0, -3)$ هستند.

۴.۲ - حد و پیوستگی تابع های برداری

Limits and Continuity of Vector-Valued Functions

حد و پیوستگی تابع های برداری تقریباً مانند حد و پیوستگی تابع های حقیقی است.

تعریف حد تابع برداری Definition of Limit of Vector-Valued Function

فرض می کنیم F یک تابع برداری باشد که برای تمام نقاط در یک بازه باز که شامل t_0 است، تعریف شده باشد. احتمالاً بجز خود t_0 ،

یک بردار L حد $F(t)$ است هنگامی که t به t_0 نزدیک می شود و یا L حد F در t_0 است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد، بطوری که اگر

$$0 < |t - t_0| < \delta$$

باشد، پس

$$\|F(t) - L\| < \varepsilon$$

باشد. در این صورت می نویسیم

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$$

و می گوییم $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t)$ وجود دارد.

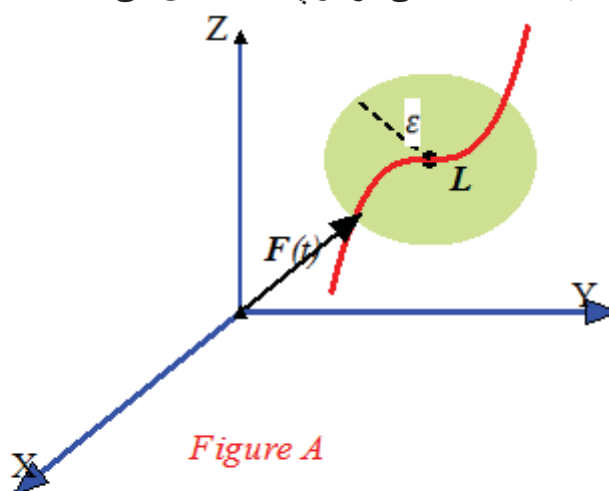
وقتی می گوییم $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ یعنی با نزدیک کردن t تا حد امکان به t_0 می توانیم تا آنجا که ممکن است $F(t)$ را به L نزدیک کنیم. اگر $F(t)$ و L را نقاطی در فضا تصور کنیم، پس

$$\|F(t) - L\| < \varepsilon$$

است، اگر فقط و فقط $F(t)$ در داخل کره ای باشد با شعاع ε و مرکز L تصویر A پس تعریف بالا به تعبیر هندسی چنین است.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$$

است، اگر برای هر توپی با مرکز L یک بازه باز I در همسایگی t_0 وجود دارد، بطوری که F برای هر عددی در I یک نقطه داخلی در توپ اختصاص می دهد.



قضیه حد تابع برداری Limit of Vector-Valued Function Theorem

فرض می کنیم $F(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ باشد. پس F یک حد در t_0 دارد، اگر فقط و فقط f_1, f_2, f_3 در t_0 حد داشته باشند. در این صورت

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \right] i + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \right] j + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \right] k$$

است.

یاد آوری — برای اثبات قضیه های شرط لازم و کافی و یا مانند قضیه بالا، اگر فقط و فقط، باید هر دو شرط را ثابت کنیم. مثلاً وقتی می خواهیم ثابت کنیم A اگر فقط و فقط B باید ثابت کنیم اگر A صحیح باشد پس B صحیح است، و بر عکس اگر B صحیح باشد، پس A صحیح است.

اثبات

ابتدا فرض می کنیم $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L = ai + bj + ck$ باشد. این یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد، بطوری که اگر $0 < |t - t_0| < \delta$ باشد، پس $\|F(t) - L\| < \varepsilon$ است. برای چنین مقادیر t داریم

$$\begin{aligned} |f_1(t) - a| &= \sqrt{(f_1(t) - a)^2} \leq \sqrt{(f_1(t) - a)^2 + (f_2(t) - b)^2 + (f_3(t) - c)^2} \\ &= \|F(t) - L\| < \varepsilon \end{aligned}$$

لذا اگر $0 < |t - t_0| < \delta$ باشد، پس $|f_1(t) - a| < \varepsilon$ است. این ثابت می کند $\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a$ است. به همین طریق می توان نشان داد $\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = b$ و $\lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = c$ است.

بر عکس، فرض می کنیم

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = c$$

باشد، و فرض می کنیم

$$L = ai + bj + ck$$

این یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد، بطوری که اگر $0 < |t - t_0| < \delta$ باشد، پس

$$|f_1(t) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |f_2(t) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |f_3(t) - c| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه اگر $0 < |t - t_0| < \delta$ باشد، پس

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{(f_1(t) - a)^2 + (f_2(t) - b)^2 + (f_3(t) - c)^2}$$

$$< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2} = \varepsilon$$

پس بر اساس تعریف حد داریم

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)\mathbf{k}$$

مثال ۱ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(2 \cos t \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} \right)$$

پاسخ

برای پیدا کردن حد بالا، حد مولفه ها را یک به یک پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(2 \cos t \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} \right) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos t \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) \mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \right) \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \end{aligned}$$

قضیه حد تابع های برداری، راه آسانی برای پیدا کردن فرمول هایی جهت پیدا کردن ترکیب تابع های برداری به ما نشان می دهد.

قضیه حد ترکیب های تابع های برداری

Limits of Combinations of Vector-Valued Functions Theorem

فرض می کنیم $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ تابع های برداری باشند، و f و g تابع های حقیقی. فرض می کنیم $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$ و $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$ وجود داشته باشند و همچنین $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ وجود داشته باشد و $\lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = t_0$ باشد، پس داریم.

- $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} + \mathbf{G})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} - \mathbf{G})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) - \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} f\mathbf{F}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$
- $\lim_{s \rightarrow s_0} (\mathbf{F} \circ g)(s) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$

اثبات

قسمت d را ثابت می کنیم. بقیه قسمت ها هم مانند قسمت d ثابت می شوند.
فرض می کنیم

$F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ و $G(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$ باشد. برای محاسبه $(F \cdot G)(t)$ بر اساس قضیه حد تابع برداری ، $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ در t_0 حد دارند.

پس می توانیم قضایای حد که در مورد تابع های حقیقی خوانده ایم را بکار ببریم.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F \cdot G)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)]$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t)$$

برای محاسبه $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} G(t)$ باید قضیه حد تابع برداری را بکار ببریم.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)\mathbf{k} \right) \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t)\mathbf{k} \right)$$

با ضرب نقطه ای طرف راست معادله بالا داریم.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F \cdot G)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} G(t)$$

مثال ۲ - فرض کنید داشته باشیم.

$$F(t) = \cos \pi t \mathbf{i} + 2 \sin \pi t \mathbf{j} + 4t^5 \mathbf{k} \quad \text{و} \quad G(t) = t \mathbf{i} + t^3 \mathbf{k}$$

مطلوب است $\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t)$ و $\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t)$

پاسخ

برای پیدا کردن حد های خواسته شده ، دو راه داریم.

۱ - می توانیم حاصل ضرب F و G را پیدا کنیم و سپس حد حاصل ضرب را پیدا کنیم.

۲ - ابتدا $\lim_{t \rightarrow 1} F(t)$ و $\lim_{t \rightarrow 1} G(t)$ را پیدا کنیم و سپس این حد ها را ضرب کنیم.

برای پیدا کردن $\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t)$ روش اول را بکار می ببریم. چون داریم

$$(F \cdot G)(t) = (\cos \pi t \mathbf{i} + 2 \sin \pi t \mathbf{j} + 4t^5 \mathbf{k}) \cdot (t \mathbf{i} + t^3 \mathbf{k})$$

$$= t \cos \pi t + 4t^5$$

پس

$$\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (t \cos \pi t + 4t^5) = \cos \pi + 4 = 3$$

برای پیدا کردن $\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t)$ روش دوم را بکار می ببریم. بر اساس قضیه حد تابع برداری

$$\lim_{t \rightarrow 1} F(t) = \cos \pi \mathbf{i} + 2 \sin \pi \mathbf{j} + 4 \mathbf{k} = -\mathbf{i} + 4 \mathbf{k}$$

و

$$\lim_{t \rightarrow 1} G(t) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

لذا

$$\lim_{t \rightarrow 1} (F \cdot G)(t) = (-\mathbf{i} + 4 \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 5$$

تعریف پیوستگی تابع برداری Definition of Continuity of Vector-Valued Function

یک تابع برداری F در نقطه t_0 پیوسته Continuous است، اگر داشته باشیم

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$$

در صورتی که t_0 در دامنه F باشد.

چون پیوستگی بر حسب حد تعریف می شود و چون حد را می توان جز به جز پیدا کرد، پس قضیه زیر را می توان به اسانی ثابت کرد.

قضیه پیوستگی تابع برداری Continuity of Vector-Valued Function

یک تابع برداری F در t_0 پیوسته است، اگر فقط و فقط تابع های مولفه آن در t_0 پیوسته باشند.

قضیه بالا هم برای بازه باز و هم بازه بسته مصداق دارد و صحیح است.

تمرینات ۴.۲

در تمرینات زیر حد تابع داده شده را پیدا کنید و یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

۱) $\lim_{t \rightarrow 4} (i - j + k)$

۲) $\lim_{t \rightarrow \pi} (\tan t i + 3t j - 4k)$

۳) $\lim_{t \rightarrow 2} F(t)$

اگر

$$F(t) = \begin{cases} 5i - \sqrt{2t^2 + 2t + 4}j + e^{-(t-2)}k & \text{برای } t < 2 \\ (t^2 + 1)i + (4 - t^3)j + k & \text{برای } t > 2 \end{cases}$$

باشد.

۴) $\lim_{t \rightarrow 0} (F - G)(t)$

اگر

$$F(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}i + \cos t j + t^3 k$$

$$G(t) = -\pi i + \frac{1 + \cos t}{t} j$$

باشد.

۵) $\lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3} i + \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3} j + \frac{t^2 + 4t - 2t}{t - 3} k \right)$

در تمرینات زیر ، بازه ای که در آن تابع داده شده پیوسته است مشخص کنید.

$$۴) \quad F(t) = ۴j - \sqrt{۵}k$$

$$۷) \quad F(t) = e^t i + e^{-t} j + \sqrt{۲}tk$$

پاسخ تمرینات ۴.۲

در تمرینات زیر حد تابع داده شده را پیدا کنید و یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

$$۱) \quad \lim_{t \rightarrow ۴} (i - j + k) = i + j + k$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad \lim_{t \rightarrow \pi} (\tan t i + ۳t j - ۴k) &= \left(\lim_{t \rightarrow \pi} \tan t \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow \pi} ۳t \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow \pi} (-۴) \right) k \\ &= 0i + ۳\pi j - ۴k = ۳\pi j - ۴k \end{aligned}$$

$$۳) \quad \lim_{t \rightarrow ۲} F(t)$$

اگر

$$F(t) = \begin{cases} ۵i - \sqrt{۲t^۲ + ۲t + ۴}j + e^{-(t-۲)}k & \text{برای } t < ۲ \\ (t^۲ + ۱)i + (۴ - t^۳)j + k & \text{برای } t > ۲ \end{cases}$$

باشد.
پاسخ

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow ۲^-} F(t) &= \lim_{t \rightarrow ۲^-} \left(۵i - \sqrt{۲t^۲ + ۲t + ۴}j + e^{-(t-۲)}k \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow ۲^-} ۵ \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow ۲^-} -\sqrt{۲t^۲ + ۲t + ۴} \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow ۲^-} e^{-(t-۲)} \right) k \\ &= ۵i - ۴j + k \end{aligned}$$

در صورتی که

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow ۲^+} F(t) &= \lim_{t \rightarrow ۲^+} \left((t^۲ + ۱)i + (۴ - t^۳)j + k \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow ۲^+} (t^۲ + ۱)i + \lim_{t \rightarrow ۲^+} (۴ - t^۳)j + \lim_{t \rightarrow ۲^+} (۱)k = ۵i - ۴j + k \end{aligned}$$

چون $\lim_{t \rightarrow ۲^-} F(t) = \lim_{t \rightarrow ۲^+} F(t) = ۵i - ۴j + k$ است ، پس $\lim_{t \rightarrow ۲} F(t) = ۵i - ۴j + k$ است.

$$۴) \lim_{t \rightarrow 0} (F - G)(t)$$

اگر

$$F(t) = e^{-\frac{1}{t^3}} \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$G(t) = -\pi \mathbf{i} + \frac{1 + \cos t}{t} \mathbf{j}$$

باشد.
پاسخ

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F - G)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(e^{-\frac{1}{t^3}} + \pi \right) \mathbf{i} + \left(\cos t - \frac{1 + \cos t}{t} \right) \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k} \right]$$

چون $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{t}$ و لذا $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\cos t - \frac{1 + \cos t}{t} \right)$ وجود ندارد، پس $\lim_{t \rightarrow 0} (F - G)(t)$ وجود ندارد.

$$\begin{aligned} ۵) \lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3} \mathbf{i} + \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3} \mathbf{j} + \frac{t^2 + 4t - 2t}{t - 3} \mathbf{k} \right) \\ = \lim_{t \rightarrow 3} [(t - 2) \mathbf{i} + (t + 1) \mathbf{j} + (t + 6) \mathbf{k}] \\ = \lim_{t \rightarrow 3} (t - 2) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow 3} (t + 1) \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow 3} (t + 6) \mathbf{k} \\ = \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} + 9 \mathbf{k} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر، بازه ای که در آن تابع داده شده پیوسته است مشخص کنید.

$$۶) F(t) = 4 \mathbf{j} - \sqrt{5} \mathbf{k} \quad (-\infty, \infty)$$

$$۷) F(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2t} \mathbf{k}$$

چون $\sqrt{2t}$ در $[0, \infty)$ پیوسته است، پس F در این بازه پیوسته است.

۴.۳ - مشتق و انتگرال تابع های برداری

Derivatives and Integrals of Vector-Valued Functions

تعریف مشتق و انتگرال تابع های برداری هم خیلی شبیه تعریف مشتق و انتگرال تابع های حقیقی است.

تعریف مشتق تابع برداری Definition of Derivative of a Vector-Valued Function

فرض می کنیم t_0 یک عدد در دامنه یک تابع برداری F باشد. اگر

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

وجود داشته باشد، این حد را مشتق F در t_0 می نامیم و می نویسیم

$$F'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

در این صورت می گوئیم F در t_0 یک مشتق دارد، و یا F در t_0 مشتق پذیر است.

مشتق F را تابع برداری F' تعریف می کنیم که دامنه آن شامل تمام اعداد t است، بطوری که F در t مشتق پذیر باشد، و مقدار آن برای هر عدد t در دامنه اش، $F'(t)$ است. نماد لاینیز برای مشتق F نماد $\frac{dF}{dt}$ است.

تفسیر هندسی $F'(t_0)$ به طریق زیر است.

منحنی ایجاد شده توسط F را C می نامیم. فرض می کنیم P روی منحنی مربوط به $F(t)$ باشد و P_0 مربوط به $F(t_0)$ پس $F(t) - F(t_0)$ همان جهت بردار قاطع $\overrightarrow{P_0P}$ دارد. پس اگر $t > t_0$ باشد، پس

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

هم همان جهت $\overrightarrow{P_0P}$ را دارد. تصویر A

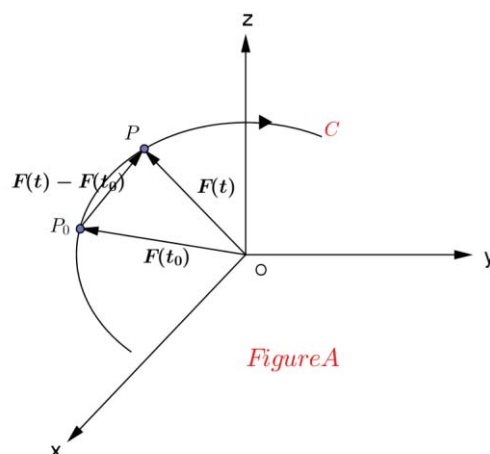
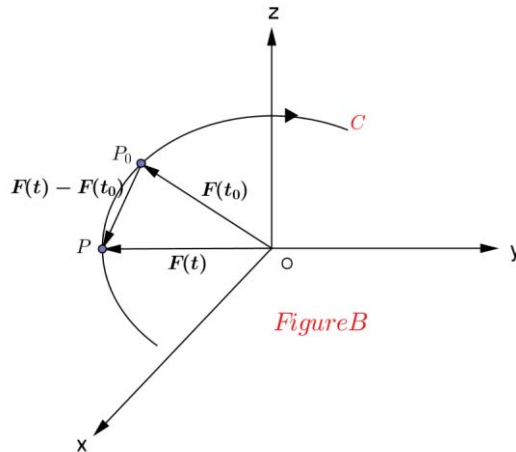


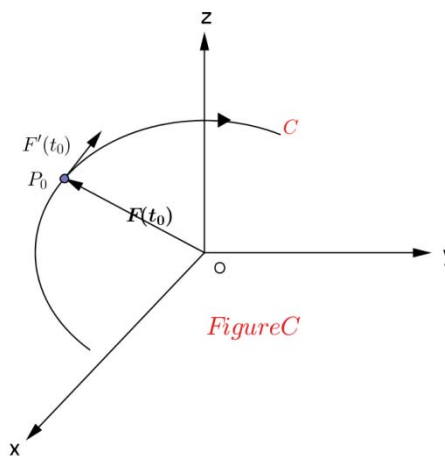
Figure A

در صورتی که اگر $t < t_0$ باشد، پس جهت $\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ تغییر می کند،

یعنی در جهت $\overrightarrow{PP_0}$ قرار می گیرد. تصویر B



پس اگر $F'(t_0)$ وجود داشته باشد، آن حد بردار های موازی بردار های قاطع است که از P_0 عبور می کنند و در همان جهت منحنی C است که توسط F ایجاد می شود. پس منطقی است اگر بگوییم $F'(t_0)$ خط مماس بر C در نقطه P_0 است. تصویر C



برای دیدن تصویر متحرک مشتق تابع برداری به فصل نمودار های متحرک، فایل مشتق تابع برداری مراجعه کنید.

اگر $F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ باشد، پس

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}\mathbf{i} + \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}\mathbf{j} + \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0}\mathbf{k}$$

با استفاده از قضیه حد تابع برداری بخش ۴.۲ ملاحظه می کنید که $F'(t_0)$ را می توان مستقیماً از مشتق های تابع های مولفه پیدا کرد.

قضیه مشتق تابع برداری Derivative of Vector-Valued Function

فرض می کنیم $F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ باشد، پس F در t_0 مشتق پذیر است، اگر فقط و فقط f_1, f_2, f_3 در t_0 مشتق پذیر باشد. در این صورت داریم.

$$F'(t) = f'_1(t)\mathbf{i} + f'_2(t)\mathbf{j} + f'_3(t)\mathbf{k}$$

در نتیجه، پیدا کردن مشتق های تابع های برداری به همان اسانی و یا مشکلی تابع های حقیقی است.

مثال ۱- فرض کنید $F(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ باشد. نشان دهید $F' = \mathbf{0}$ است. توجه داشته باشید $\mathbf{0}$ به صورت برجسته نشان دادیم. زیرا این خود یک بردار است.

پاسخ

چون $f_1(t) = a$ و $f_2(t) = b$ و $f_3(t) = c$ است، یعنی تابع های مولفه همگی تابع های ثابت هستند، پس داریم.

$$F'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

پس می توانیم بگوییم مشتق یک تابع برداری ثابت، $\mathbf{0}$ است. با $\mathbf{0}$ اشتباه نشود.

مثال ۲- فرض می کنیم $F(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}$ باشد. نشان دهید

$$\frac{dF}{dt} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

است.

پاسخ

در این حالت داریم.

$$f_1(t) = x_0 + at, \quad f_2(t) = y_0 + bt, \quad f_3(t) = z_0 + ct$$

پس بر اساس قضیه مشتق تابع برداری، داریم.

$$\frac{dF}{dt} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

پس مشتق یک تابع برداری خطی، یک تابع برداری ثابت است.

مثال ۳- فرض کنید $F(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ باشد. $F'(\pi)$ را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا، مشتق های مولفه ها را بدست می آوریم. پس داریم.

$$F'(t) = (\cos t - t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

سپس π را جانشین t می کنیم.

$$F'(\pi) = [-1 - \pi(0)]\mathbf{i} + [0 + \pi(-1)]\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

در بقیه این بخش ، اغلب به تابع های برداری برخورد می کنیم که در بازه ها ، تعریف شده هستند. اگر I یک بازه باشد ، پس می گوییم F در I مشتق پذیر است ، اگر مولفه های F در I مشتق پذیر باشند. اگر I یک بازه بسته $[a, b]$ باشد ، این یعنی تابع ها مولفه مشتق های یک طرفه در a و b دارند. مثلاً تابع زیر

$$F(t) = |t|i + |1 - t|j$$

در $[0, 1]$ مشتق پذیر است ، اما در $[-1, 1]$ مشتق پذیر نیست ، چون $F'(0)$ وجود ندارد. چون $F'(1)$ وجود ندارد.

تقریباً تمام قواعدی که در مورد مشتق های تابع های حقیقی در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان گفتیم ، برای تابع های برداری هم صادق است ، اصالت آنها هم با کمی تغییر مانند اثبات آن تابع ها است که در آن کتاب آمده است. پس قضیه زیر را بدون اثبات می آوریم.

قضیه مشتق های ترکیب های تابع های برداری

Differentiation of combinations of Vector-Valued Function Theorem

فرض می کنیم f, G, F در t_0 مشتق پذیر باشند. و g در s_0 مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $g(s_0) = t_0$ پس رابطه های زیر برقرار هستند.

- a) $(F + G)'(t_0) = F'(t_0) + G'(t_0)$
- b) $(F - G)'(t_0) = F'(t_0) - G'(t_0)$
- c) $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F'(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$
- d) $(F \cdot G)'(t_0) = F'(t_0) \cdot G(t_0) + F(t_0) \cdot G'(t_0)$
- e) $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$
- f) $(F \circ g)'(s_0) = F'(g(s_0))g'(s_0) = F'(t_0)g'(s_0)$

مثال ۴ - فرض می کنیم $F(t) = \arctan t i + 5k$ و $G(t) = i + \ln t j - 2tk$ باشد. مطلوب

است $(F \cdot G)'(t)$ و $(F \times G)'(t)$

پاسخ

دو روش برای پیدا کردن هر کدام از مشتق ها وجود دارد.

۱ - ابتدا حاصل ضرب ها را پیدا کنیم و سپس مشتق بگیریم.

۲ - ابتدا F' و G' را پیدا کنیم و سپس قضیه مشتق های ترکیب تابع های برداری را بکار ببریم.

برای پیدا کردن $(F \cdot G)'(t)$ روش اول را بکار می ببریم.

$$(F \cdot G)(t) = \arctan t - 1 \circ t$$

$$(F \cdot G)'(t) = \frac{1}{t^2 + 1} - 1 \circ$$

برای پیدا کردن $(F \times G)'(t)$ روش دوم را بکار می ببریم.

$$F'(t) = \frac{1}{t^2 + 1} i \quad \text{و} \quad G'(t) = \frac{1}{t} j - 2k$$

$$F'(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{t^2+1} & \ln t & -2t \end{vmatrix} = \frac{2t}{t^2+1}j + \frac{\ln t}{t^2+1}k$$

$$F(t) \times G'(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \arctan t & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{t}i + 2\arctan t j + \frac{\arctan t}{t}k$$

در نهایت

$$(F \times G)'(t) = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$$

$$= -\frac{1}{t}i + \left(\frac{2t}{t^2+1} + 2\arctan t\right)j + \left(\frac{\ln t}{t^2+1} + \frac{\arctan t}{t}\right)k$$

نتیجه مهم قضیه مشتق های ترکیب های تابع های برداری قضیه فرعی زیر است.

قضیه فرعیفرض می کنیم F در بازه I مشتق پذیر باشد، و فرض می کنیم یک عدد مانند c وجود دارد بطوری که

$$\|F(t)\| = c, \quad t \in I$$

پس

$$F(t) \cdot F'(t) = 0, \quad t \in I$$

اثباتچون فرض کردیم $\|F(t)\| = c$ پس داریم.

$$(F \cdot F)(t) = F(t) \cdot F(t) = \|F(t)\|^2 = c^2, \quad t \in I$$

پس $F \cdot F$ یک تابع حقیقی ثابت است، و بر اساس مثال ۱ مشتق آن ۰ است. و بر اساس قضیه مشتق های ترکیب های تابع های برداری، قسمت d داریم.

$$F'(t) \cdot F(t) + F(t) \cdot F'(t) = (F \cdot F)'(t) = 0$$

بطوری که

$$F(t) \cdot F'(t) = 0 \quad t \in I$$

قضیه فرعی بالا می گوید اگر $\|F\|$ یک تابع حقیقی ثابت باشد، پس برای هر t در دامنه F یکی از تساوی های زیر برقرار است.

$$۱) \quad F(t) = 0$$

$$۲) \quad F'(t) = 0$$

$$۳) \quad F(t) \text{ و } F'(t) \text{ عمود هستند}$$

یک حالت مخصوص - اگر S یک کره با مرکزیت مبدا مختصات باشد و اگر F نماد یک شئی باشد که روی S حرکت می کند ، پس $\|F\|$ یک تابع ثابت است ، بطوری که $F(t)$ عمود است بر $F'(t)$ برای تمام t ها.

مشتق مرتبه دوم F

$$F''(t) = f_1''(t)\mathbf{i} + f_2''(t)\mathbf{j} + f_3''(t)\mathbf{k}$$

مثلا اگر $F(t) = (t^{1/2} + t)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$ باشد ، پس داریم.

$$F''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4e^{2t}\mathbf{k}$$

تندی **Velocity** یا سرعت برداری عبارت است از یک اندازه گیری برداری از مقدار و جهت جا بجایی .

سرعت **Speed** یک کمیت عددی است ، مثلا عددی که روی سرعت سنج اتومبیل مشاهده می کنید ، سرعت اتومبیل را در ساعت نشان می دهد.

شتاب **Acceleration** میزان تغییر در سرعت یک جسم است و یک کمیت برداری است.

تندی و شتاب Velocity and Acceleration

مهمترین کاربرد مشتق های تابع های برداری در فیزیک ، هنگام مطالعه حرکت مشاهده می شود. هنگامی که یک شئی در فضا حرکت می کند ، مختصات x, y, z مکان آن شئی ، تابع هایی از زمان هستند. فرض می کنیم این تابع ها ، دو مرتبه مشتق پذیر باشند. مکان یا بردار موضع ، تندی ، سرعت ، و شتاب را به طریق زیر تعریف می کنیم.

$$\text{Position بردار موضع } \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\text{Velocity تندی یا سرعت برداری } \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\text{Speed سرعت } \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\text{Acceleration شتاب } \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

بردار مکان یا بردار موضع **Position Vector** که با نماد $\mathbf{r}(t)$ نشان داده می شود ، اغلب بنام بردار شعاعی **Radial Vector** یا **Radius Vector** نامیده می شود. به همین سبب نماد $\mathbf{r}$ بکار برده می شود. $\mathbf{r}(t)$ معمولاً بوسیله یک پاره خط جهت دار از مبدا مختصات تا مکان یا موضع شی در زمان t نشان داده می شود. اگر t_0 ثابت باشد و $t \neq t_0$ باشد ، پس بردار $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ را بردار تغییر مکان یا بردار جا بجایی **Displacement Vector** نامیده می شود. این بردار تغییر مکان از مکان شی در زمان t_0 تا مکان شی در زمان t را نشان می دهد تصویر D

در تصویر سمت چپ $\mathbf{r}(t_0)$ مکان شئی در زمان صفر است و $\mathbf{r}(t)$ مکان شئی پس طی t واحد زمان است. در تصویر سمت راست به ترتیب $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ آمده است. در تصویر سمت چپ بردار جا بجایی با نماد $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ نشان داده شده و در تصویر سمت راست با نماد $\Delta \vec{r}$

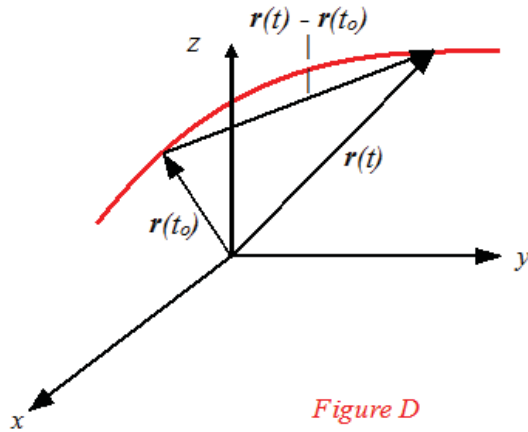
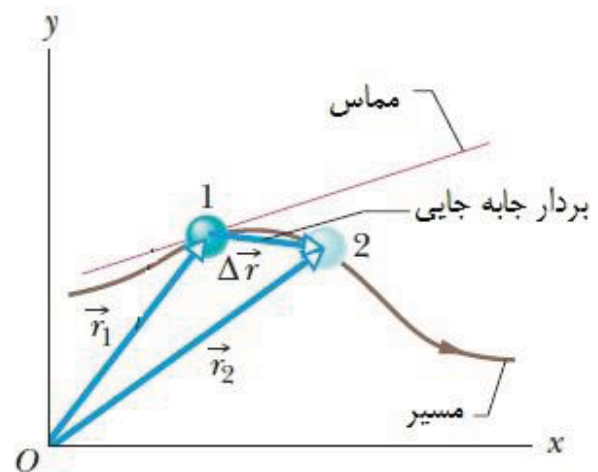


Figure D



میانگین تندى یا تندى متوسط Average Velocity برابر است با نسبت جا بجایی به مدت سپرى شده

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

و چون

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

پس تندى عبارت است از حد میانگین تندى و یا حد تندى متوسط.

برای این که فرق بین سرعت Speed و تندى Velocity روشن بشود ، توضیح بیشتری می دهیم. سرعت عبارت است از مسافت طی شده در واحد زمان.

$$\text{سرعت} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{مدت زمان سپرى شده}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\text{سرعت} = \frac{\text{کیلو متر}}{\text{ساعت}} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$$

تندى عبارت است از سرعت با یک جهت. مثلاً می گوییم مسافت ۱۳۰ متر در ۱۰۰ ثانیه به طرف مشرق و یا در جهت مشرق حرکت کردیم

$$\text{متر در ثانیه به طرف مشرق} = \frac{۱۳۰ \text{ متر}}{۱۰۰ \text{ ثانیه}} = \frac{۱}{۳} \text{ در جهت مشرق} = \text{تندى}$$

مثال ۵ – فرض کنید یک شی در نقطه (a, b, c) ثابت قرار دارد. نشان دهید $\mathbf{v} = \mathbf{a} = \mathbf{0}$ است. **پاسخ**
مکان ثابت است پس داریم.

$$\mathbf{r}(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

در نتیجه

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

مثال ۶ – فرض کنید بردار موضع یا بردار مکان یک شئی مطابق زیر باشد.
 $\mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}$
تندی، سرعت، و شتاب شئی را پیدا کنید.

پاسخ
تندی

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

پس شتاب

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

و سرعت

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

در مثال ۶، شئی در امتداد یک خط حرکت می کنند که معادله پارامتری آن مطابق زیر است.

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

با تندی ثابت و شتاب صفر.

اگر بردار موضع مطابق زیر بود

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at^2)\mathbf{i} + (y_0 + bt^2)\mathbf{j} + (z_0 + ct^2)\mathbf{k}$$

در صورتی که a یا b و c صفر نباشد، باز هم شئی روی همان خط حرکت می کرد. اما تندی و شتاب مطابق زیر می بود.

$$\mathbf{v}(t) = 2at\mathbf{i} + 2bt\mathbf{j} + 2ct\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = 2a\mathbf{i} + 2b\mathbf{j} + 2c\mathbf{k}$$

در این حالت، شئی هنگامی که زمان افزایش پیدا می کرد، تند تر حرکت می کرد. و شتاب $\mathbf{0}$ نبود، اما ثابت می بود. مثلاً، هنگامی که با اتومبیل شروع به حرکت می کنید، بطوریکه پدال گاز را فشار می دهید. پس به تدریج سرعت می گیرید، اما شتاب شما $\mathbf{0}$ است، زیرا سرعت شما ناگهان کم یا زیاد نمی شود. بلکه بطور یکنواخت سرعت شما زیاد می شود.

در مثال بعدی، حرکت یک شئی که یک منحنی سیکلوئیدی ایجاد می کند مورد مطالعه قرار می دهیم. می توانید این طور تصور کنید که یک شئی به صورت یک نقطه روی لبه چرخ یک اتومبیل قرار دارد و این اتومبیل با سرعت یکنواخت در امتداد یک خط مستقیم حرکت می کند.

مثال ۷ - فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{r}(t) = r(t - \sin t)\mathbf{i} + r(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

مقادیر t بطوری که $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ

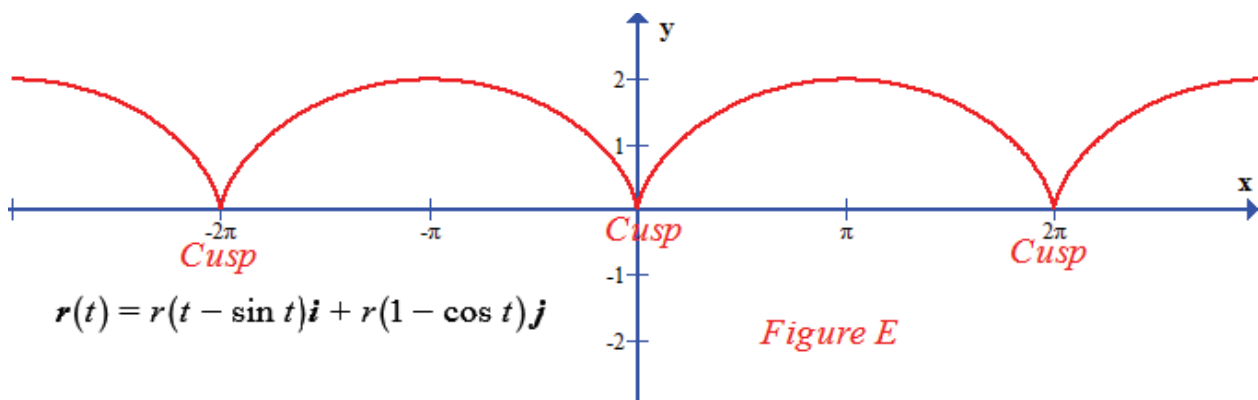
مشتق $\mathbf{r}$ را پیدا می کنیم.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r(1 - \cos t)\mathbf{i} + r \sin t\mathbf{j}$$

پس $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ است، اگر فقط و فقط داشته باشیم.

$$r(1 - \cos t) = 0 = r \sin t$$

رابطه آخر، یعنی t باید مضرب های صحیح 2π باشد. تصویر E



در مثال ۷ دیدیم اگر t مضرب صحیح 2π باشد، پس $\mathbf{r}(t)$ مربوط است به نقاط مجزا و یا منفرد بنام نقاط بازگشت **Cusps** که روی محور x قرار دارند. درست در این نقاط **سیکلونید** است که سرعت برداری و یا تندى $\mathbf{0}$ است. یعنی $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ است.

مثال ۸ - یک شئی روی یک دایره به شعاع $r_0 > 0$ در جهت خلاف عقربه ساعت با سرعت ثابت $v_0 > 0$ حرکت می کند. نشان دهید که بردار موضع شئی مطابق معادله زیر است.

$$\mathbf{r}(t) = r_0 \left(\cos \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{i} + \sin \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{j} \right)$$

فرمول هایی هم برای سرعت برداری و شتاب شئی پیدا کنید.

پاسخ

یک سیستم مختصات xy ترسیم می کنیم بطوری که دایره روی صفحه xy قرار بگیرد و مرکز آن مبدا مختصات باشد و شئی در زمان صفر در قسمت مثبت x باشد و خلاف جهت عقربه ساعت اطراف دایره حرکت کند. برای هر زمانی از t فرض می کنیم $\theta(t)$ زاویه بین بردار $\mathbf{r}(t)$ و قسمت مثبت محور x باشد. تصویر F پس داریم.

$$\mathbf{r}(t) = r_0 [\cos \theta(t)\mathbf{i} + \sin \theta(t)\mathbf{j}] \quad (1)$$

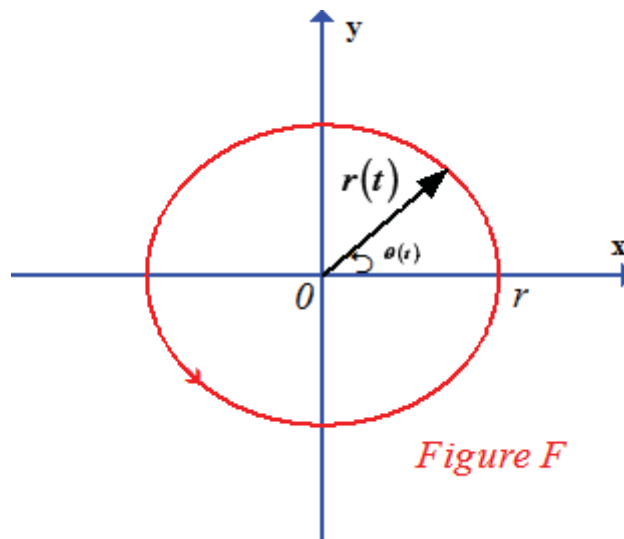


Figure F

برای بدست آوردن یک عبارت برای $\theta(t)$ بر حسب v_0 و r_0 و t از دو طرف معادله (۱) مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\mathbf{v}(t) = r_0 \theta'(t) [-\sin \theta(t) \mathbf{i} + \cos \theta(t) \mathbf{j}] \quad (2)$$

چون شئی خلاف جهت عقربه ساعت حرکت می کند، θ افزایش پیدا می کند، در نتیجه $\theta'(t) > 0$ است. لذا چون $r_0 > 0$ است، فرمول (۲) تلویحا می گوید

$$\|\mathbf{v}(t)\| = |r_0 \theta'(t)| \sqrt{(-\sin \theta(t))^2 + (\cos \theta(t))^2} = |r_0 \theta'(t)| = r_0 \theta'(t) \quad (3)$$

اما بر اساس فرض مساله $\|\mathbf{v}(t)\| = v_0$ است، پس شماره (۳) می شود $\theta'(t) = \frac{v_0}{r_0}$

چون بر اساس فرضی که کردیم $\theta(0) = 0$ است، می توانیم انتگرال بگیریم تا بدست آوریم

$$\theta(t) = \int \theta'(t) dt = \int \frac{v_0}{r_0} dt = \frac{v_0 t}{r_0}$$

نتیجه بالا را در شماره (۱) می گذاریم.

$$\mathbf{r}(t) = r_0 \left(\cos \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{i} + \sin \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{j} \right)$$

با دو مرتبه مشتق گرفتن از بردار موضع، داریم.

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \left(-\sin \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{i} + \cos \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{j} \right)$$

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{v_0^2}{r_0} \left(\cos \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{i} + \sin \frac{v_0 t}{r_0} \mathbf{j} \right) = -\frac{v_0^2}{r_0} \mathbf{r}(t)$$

تصویر G

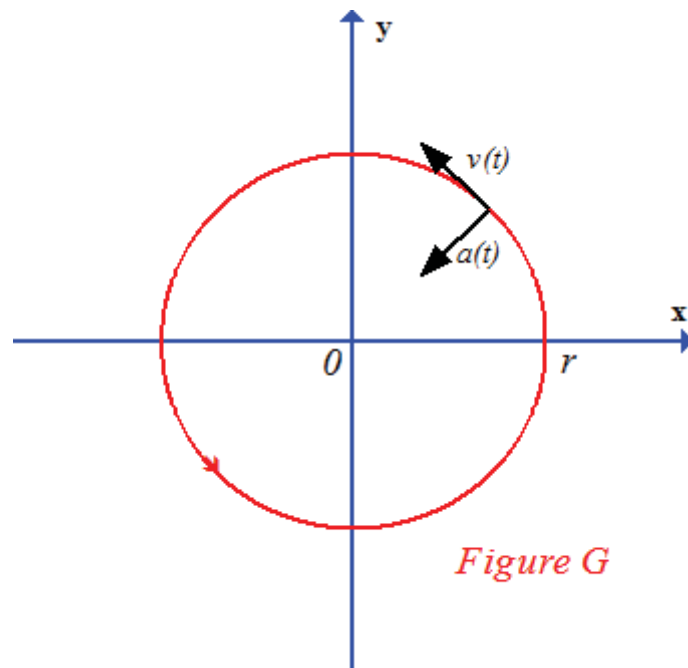
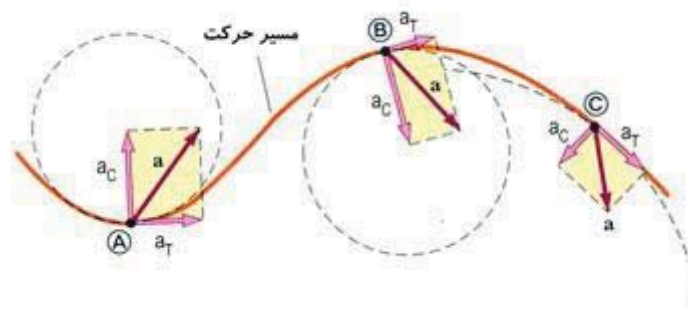


Figure G

توجه داشته باشید که گر چه مقدار سرعت v در مثال ۸ ثابت است ، اما سرعت برداری $\mathbf{v}$ ثابت نیست.

همچنین توجه داشته باشید که جهت شتاب بطرف مرکز دایره است. این نوع شتاب را **شتاب مرکزگرا Centripetal Acceleration** می نامند ، و هر نیرویی که ایجاد شتاب مرکزگرا کند ، نیروی مرکزگرا **Centripetal Force** نامیده می شود.

در تصویر زیر شتاب مرکزگرا مشاهده می کنید. اتومبیل در حال حرکت در جاده مریچی است. $\mathbf{a}_c$ شتاب مرکزگرا است.



برای مشاهده نمودار متحرک شتاب مرکزگرا به فصل نمودار های متحرک ، فایل شتاب مرکزگرا مراجعه کنید.

چون بر اساس شماره (۱) داریم $\|\mathbf{r}\| = r_0$ ، پس مقدار شتاب مطابق زیر است.

$$\|\mathbf{a}\|(t) = \frac{v_0^2}{r_0} \|\mathbf{r}(t)\| = \frac{v_0^2}{r_0} \quad (۴)$$

حالا فرض کنید یک ماهواره در یک مدار دایره ای شکل گرد زمین می چرخد و فقط تحت تاثیر جاذبه زمین است. یک فرمول در مورد ارتباط سرعت v_0 ماهواره به شعاع r_0 دوران بدست می آوریم. مقیاس v_0 فوت در ثانیه و مقیاس r_0 فوت است. برای این کار ، براساس قانون جاذبه نیوتن ، مقدار شتاب $\|a\|$ یک شی که به اندازه r_0 فوت تا مرکز زمین فاصله دارد و فقط تحت تاثیر جاذبه زمین است ، مطابق زیر است.

$$\|a(t)\| = \frac{C}{r_0^2} \quad (5)$$

در فرمول بالا C یک عدد ثابت است. با تلفیق فرمول شماره (۵) و (۴) داریم.

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{C}{r_0^2} \quad \text{یا} \quad v_0^2 = \frac{C}{r_0} \quad (6)$$

چون قانون جاذبه حتی برای یک شی که روی سطح زمین قرار دارد ، صادق است ، یعنی اگر r_0 مساوی شعاع کره زمین باشد ، که تقریباً مساوی ۳۹۶۰ مایل است ، و چون شتاب در رابطه با جاذبه روی سطح زمین تقریباً مساوی ۳۲ فوت در ثانیه است ، پس داریم.

$$32 = \frac{C}{(3960)^2 (5280)^2}$$

$$C \approx 32 (3960)^2 (5280)^2$$

حالا فرض کنید یک ماهواره که ۴۱۰۰ مایل از مرکز زمین فاصله دارد ، با سرعت یکنواخت v_0 در یک مدار دایره ای شکل حرکت می کند. پس بر اساس شماره (۶) داریم.

$$v_0 = \sqrt{\frac{C}{r_0}} = \sqrt{\frac{32 (3960)^2 (5280)^2}{(4100)(5280)}} \approx 25421/2 \quad \text{فوت در ثانیه}$$

که تقریباً ۶ / ۱۷۳۳۲ مایل در ساعت است.

تعریف انتگرال های تابع های برداری Integrals of Vector-Valued Functions

فرض می کنیم

$$F(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

باشد ، و f_1, f_2, f_3 در $[a, b]$ پیوسته باشند. انتگرال $\int_a^b F(t)dt$ و $\int F(t)dt$ را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt \right) i + \left(\int_a^b f_2(t)dt \right) j + \left(\int_a^b f_3(t)dt \right) k$$

$$\int F(t)dt = \left(\int f_1(t)dt \right) i + \left(\int f_2(t)dt \right) j + \left(\int f_3(t)dt \right) k$$

مثال ۹ - فرض کنید

$$F(t) = ti + t^2j + \sin tk$$

باشد. $\int F(t)dt$ و $\int_0^\pi F(t)dt$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned}\int F(t)dt &= \left(\int t dt\right)i + \left(\int t^2 dt\right)j + \left(\int \sin t dt\right)k \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + C_1\right)i + \left(\frac{1}{3}t^3 + C_2\right)j + (-\cos t + C_3)k\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}\int_0^\pi F(t)dt &= \left(\frac{1}{2}t^2 \Big|_0^\pi\right)i + \left(\frac{1}{3}t^3 \Big|_0^\pi\right)j + \left(-\cos t \Big|_0^\pi\right)k \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 i + \frac{1}{3}\pi^3 j + 2k\end{aligned}$$

اگر

$$F(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

باشد، و f_1, f_2, f_3 پیوسته و مشتق پذیر باشند، پس طبق تعریف و قضیه گفته شده، داریم.

$$\begin{aligned}\int F'(t)dt &= \int [f'_1(t)i + f'_2(t)j + f'_3(t)k] dt \\ &= \left(\int f'_1(t)dt\right)i + \left(\int f'_2(t)dt\right)j + \left(\int f'_3(t)dt\right)k \\ &= [f_1(t) + C_1]i + [f_2(t) + C_2]j + [f_3(t) + C_3]k \\ &= (f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k) + (C_1i + C_2j + C_3k) \\ &= F(t) + (C_1i + C_2j + C_3k)\end{aligned}$$

این ثابت می کند که

$$\int F'(t)dt = F(t) + C \quad (7)$$

در شماره (۷) بردار C یک بردار ثابت است. فرمول شماره (۷) هنگام مطالعه حرکت خیلی مفید است. زیرا سرعت برداری v مشتق تابع موضع r است و شتاب a مشتق سرعت برداری v است. پس از شماره (۷) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}\int v(t) dt &= \int r'(t)dt = r(t) + C \\ \int a(t)dt &= \int v'(t)dt = v(t) + C\end{aligned}$$

ما این دو فرمول را هنگام بحث قانون دوم حرکت نیوتن استفاده می کنیم.

شکل برداری قانون دوم حرکت نیوتن

The Vector Form of Newton's Second Law of Motion

اساسی ترین قانون فیزیکی در مورد حرکت ، قانون دوم حرکت نیوتن است. اگر در یک زمان t یک شئی با جرم m تحت تاثیر یک نیروی $F(t)$ قرار بگیرد ، شتابی به اندازه $a(t)$ می گیرد. یا به عبارت دیگر ، شتاب یک جسم برابر است با مجموع نیرو های وارد بر آن تقسیم بر جرم آن جسم. قانون دوم حرکت نیوتن می گوید

$$F(t) = m a(t) \quad (۸)$$

اگر جرم جسم و نیروی وارد بر آنرا بدانیم ، از فرمول شماره (۸) می توانیم شتاب جسم را پیدا کنیم. چون سرعت برداری $Velocity$ انتگرال شتاب است و بردار موضع یا مکان انتگرال سرعت برداری است ، پس اگر جرم جسم را بدانیم ، می توانیم موقعیت آنرا پیدا کنیم. همچنین می توان مکان اولیه و سرعت اولیه وارد بر جسم را پیدا کنیم ، اگر نیروی وارد بر جسم را بدانیم. برای مثال حرکت یک شئی را در نظر بگیرید که نزدیک یک نقطه P روی سطح زمین ، و فقط تحت تاثیر نیروی جاذبه حرکت می کند. طبق قانون جاذبه نیوتن ، نیروی جاذبه بر جسم ، تقریباً ثابت است و جهت آن بطرف پائین است. یعنی به طرف مرکز زمین. سیستم مختصات را طوری انتخاب می کنیم قسمت مثبت محور z از مرکز زمین شروع می شود و جهت آن به طرف بالا و از P عبور می کند. لذا شتاب $-gk$ است. g یک عدد ثابت است و تقریباً ۳۲ فوت در ثانیه و یا ۹.۸ متر در ثانیه است.

مثال ۱۰ - یک شئی با موقعیت اولیه r_0 و سرعت برداری اولیه v_0 ، دارای شتاب ثابت $-gk$ است. نشان دهید مکان شئی در هر زمانی از t مطابق زیر است.

$$r(t) = -\frac{1}{2}gt^2k + tv_0 + r_0$$

پاسخ

بر اساس فرض مساله $a(t) = -gk$ است. دو مرتبه انتگرال می گیریم. ، پس داریم.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int -gk dt = -gtk + C \quad (۹)$$

$$r(t) = \int v(t) dt = -\frac{1}{2}gt^2k + tC + C_1 \quad (۱۰)$$

در رابطه های بالا C و C_1 بردار های ثابت هستند. بر اساس فرض مساله $v(0) = v_0$ است ،

پس اگر در شماره (۹) فرض کنیم $t = 0$ است ، پس داریم $C = v_0$ به همین طریق

$$r(0) = r_0$$

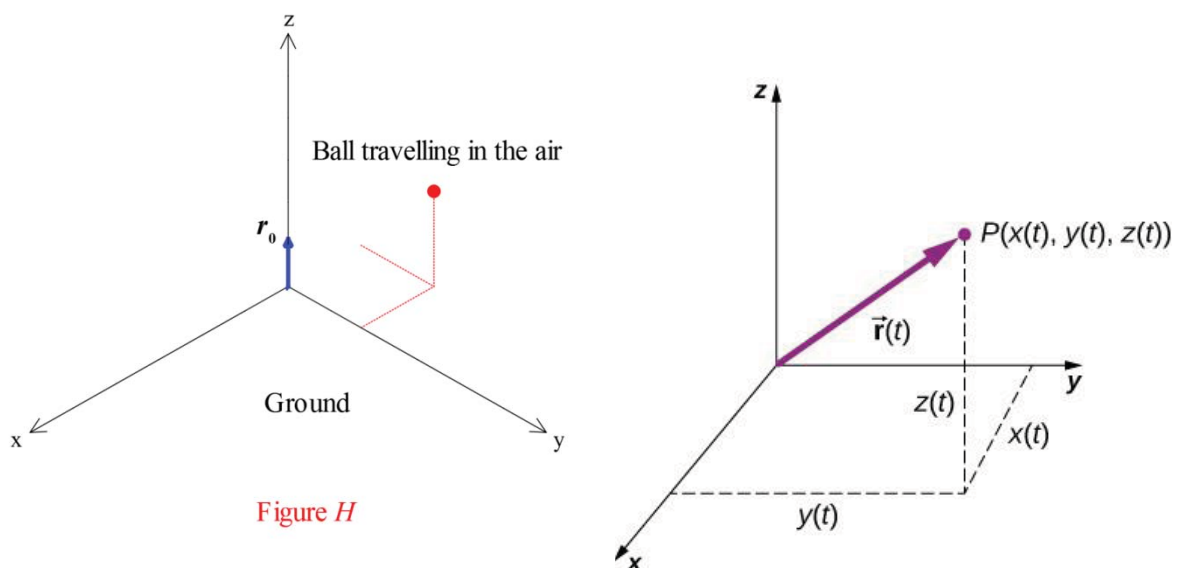
است ، بطوری که $C_1 = r_0$ است ، لذا (۱۰) را می توان به طریق زیر باز نویسی کرد.

$$r(t) = -\frac{1}{2}gt^2k + tv_0 + r_0$$

مثال ۱۱ - یک توپ بیس بال که ۴ فوت بالاتر از زمین قرار دارد ، ضربه ای به سرعت ۱۰۰ فوت در ثانیه با زاویه $\frac{\pi}{6}$ به آن وارد می شود. در چه زمانی توپ به زمین برخورد می کند؟

پاسخ

سیستم مختصات را طوری انتخاب می کنیم صفحه xy نمایش زمین بازی باشد و توپ در صفحه yz حرکت می کند ، و مولفه j بردار موضع آن در حال افزایش است. مکان اولیه توپ هم $r_0 = 4k$ است. تصویر H .



چون زاویه اولیه $\frac{\pi}{6}$ و سرعت اولیه توپ ۱۰۰ فوت در ثانیه است بطوری که $\|v_0\| = 100$ است ، پس سرعت برداری اولیه مطابق زیر بدست می آید.

$$v_0 = 100 \left(\cos \frac{\pi}{6} j + \sin \frac{\pi}{6} k \right) = 100 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} j + \frac{1}{2} k \right) = 50 \left(\sqrt{3} j + k \right)$$

از مثال ۱۰ می دانیم که مکان توپ از طریق معادله زیر بدست می آید.

$$r(t) = -\frac{1}{2}gt^2 k + tv_0 + r_0$$

بجای r_0 و v_0 مقادیرشان را که در بالا بدست آوردیم ، می گذاریم. پس داریم.

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 k + t \left[50 \left(\sqrt{3} j + k \right) \right] + 4k \\ &= 50 \sqrt{3} t j + \left(4 + 50t - \frac{1}{2}gt^2 \right) k \end{aligned}$$

هنگامی که توپ به زمین برخورد می کند ، مولفه k در $r(t)$ باید صفر باشد. هنگامی این اتفاق می افتاد که $t > 0$ باشد ، بطوری که

$$4 + 50t - \frac{gt^2}{2} = 0$$

باشد. یعنی

$$t = \frac{50 + \sqrt{2500 + 8g}}{g}$$

اگر $g = 32$ حساب کنیم ، $t \approx 3/2$ است. یعنی توپ بعد از $3/2$ ثانیه به زمین برخورد می کند.

در تصویر زیر ، زمین بیس بال و بازیکن که در حال ضربه وارد کردن بر توپ است ، ملاحظه می کنید.



در تصویر زیر پس از وارد شدن ضربه بر توپ و توپ در حال پرواز در هوا است.



تمرینات ۴.۳

در تمرینات زیر مشتق تابع را پیدا کنید.

$$۱) \quad F(t) = i + tj + t^5 k$$

$$۲) \quad F(t) = (1+t)^{3/2} i - (1-t)^{3/2} j + \frac{2}{3} tk$$

$$۳) \quad F(t) = \tan ti + j + \sec tk$$

$$۴) \quad F(t) = \cosh ti + \sinh tj - \sqrt{t} k$$

$$۵) \quad {}^4F - {}^2G; F(t) = {}^2 \sec ti - {}^3 j + \csc tk \quad \text{و} \quad G(t) = {}^3 ti - t^2 j - {}^4 \csc tk$$

$$۶) \quad F \times G; F(t) = {}^2 \sec ti - {}^3 j + \csc tk \quad \text{و} \quad G(t) = \ln tk$$

$$۷) \quad F \circ g; F(t) = \ln ti - {}^4 e^{2t} j + \frac{t-1}{t} k \quad \text{و} \quad g(t) = \sqrt{t}$$

در تمرینات زیر انتگرال را پیدا کنید.

$$۸) \quad \int \left(t^2 i - (3t-1)j - \frac{1}{t^3} k \right) dt$$

$$۹) \quad \int_0^1 (e^t i + e^{-t} j + {}^2 tk) dt$$

$$۱۰) \quad \int_{-1}^1 \left[(1+t)^{3/2} i + (1-t)^{3/2} j \right] dt$$

در تمرینات زیر ، سرعت برداری ، مقدار سرعت ، و شتاب شی را که دارای تابع موضع داده شده است ، پیدا کنید.

$$۱۱) \quad r(t) = \cos t i + \sin tj - {}^1 e^t k$$

$$۱۲) \quad r(t) = {}^2 ti + t^2 j + \ln tk$$

$$۱۳) \quad r(t) = e^t \sin ti + e^t \cos tj + e^t k$$

در تمرین زیر ، موضع ، سرعت برداری و مقدار سرعت شی را که دارای شتاب ، سرعت برداری اولیه و موضع اولیه داده شده است ، پیدا کنید.

$$۱۴) \quad a(t) = -{}^3 k; v_0 = i + j; r_0 = 0$$

پاسخ تمرینات ۴.۳

در تمرینات زیر مشتق تابع را پیدا کنید.

۱) $F(t) = i + tj + t^5 k$

$$F'(t) = j + 5t^4 k$$

۲) $F(t) = (1+t)^{3/2} i - (1-t)^{3/2} j + \frac{2}{3} tk$

$$F'(t) = \frac{3}{2}(1+t)^{1/2} i + \frac{3}{2}(1-t)^{1/2} j + \frac{2}{3} k$$

۳) $F(t) = \tan ti + j + \sec tk$

$$F'(t) = \sec^2 t i + \sec t \tan t k$$

۴) $F(t) = \cosh ti + \sinh tj - \sqrt{t} k$

$$F'(t) = \sinh ti + \cosh tj - \frac{1}{2\sqrt{t}} k$$

۵) $F = 2G; F(t) = 2 \sec ti - 3j + \csc tk$ و $G(t) = 3ti - t^2 j - 4 \csc tk$

$$(2F - 3G)(t) = (8 \sec t - 6t)i + (6t^2 - 12)j + 12 \csc tk$$

پس

$$(2F - 3G)'(t) = (8 \sec t \tan t - 6)i + 12tj - 12 \csc t \cot tk$$

۶) $F \times G; F(t) = 2 \sec ti - 3j + \csc tk$ و $G(t) = \ln tk$

$$(F \times G)(t) = -3 \ln ti - 2 \sec t \ln t j$$

پس

$$(F \times G)'(t) = -\frac{3}{t} i - \left(2 \sec t \tan t \ln t + \frac{2}{t} \sec t \right) k$$

۷) $F \circ g; F(t) = \ln ti - 4e^{t^2} j + \frac{t-1}{t} k$ و $g(t) = \sqrt{t}$

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t)$$

$$= \left(\frac{1}{t} i - 8e^{t^2} j + \frac{1}{(\sqrt{t})^2} k \right) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t} i - \frac{4e^{t^2}}{\sqrt{t}} j + \frac{1}{2} t^{-3/2} k$$

در تمرینات زیر انتگرال را پیدا کنید.

$$۸) \int \left(t^2 \mathbf{i} - (3t - 1)\mathbf{j} - \frac{1}{t^3} \mathbf{k} \right) dt = \frac{t^3}{3} \mathbf{i} - \left(\frac{3}{2} t^2 - t \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2t^2} \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} ۹) \int_0^1 (e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) dt &= e^t \Big|_0^1 \mathbf{i} - e^{-t} \Big|_0^1 \mathbf{j} + t^2 \Big|_0^1 \mathbf{k} \\ &= (e - 1) \mathbf{i} + (1 - e^{-1}) \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۰) \int_{-1}^1 \left[(1+t)^{3/2} \mathbf{i} + (1-t)^{3/2} \mathbf{j} \right] dt &= \frac{2}{5} (1+t)^{5/2} \Big|_{-1}^1 \mathbf{i} - \frac{2}{5} (1-t)^{5/2} \Big|_{-1}^1 \mathbf{j} \\ &= \frac{8}{5} \sqrt{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \end{aligned}$$

در تمرینات زیر ، سرعت برداری ، مقدار سرعت ، و شتاب شی را که دارای تابع موضع داده شده است ، پیدا کنید.

$$\begin{aligned} ۱۱) \mathbf{r}(t) &= \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} - 16t^2 \mathbf{k} \\ \mathbf{v}(t) &= -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - 32t \mathbf{k} \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + (-32t)^2} = \sqrt{1 + 1024t^2} \\ \mathbf{a}(t) &= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - 32 \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \mathbf{r}(t) &= 2t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k} \\ \mathbf{v}(t) &= 2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \frac{1}{t} \mathbf{k} \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{2t^2 + 1}{t} \\ \mathbf{a}(t) &= 2 \mathbf{j} - \frac{1}{t^2} \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۳) \mathbf{r}(t) &= e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \\ \mathbf{v}(t) &= (e^t \sin t + e^t \cos t) \mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t) \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= e^t \sqrt{2} \\ \mathbf{a}(t) &= 2e^t \cos t \mathbf{i} - 2e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \end{aligned}$$

در تمرین زیر ، موضع ، سرعت برداری و مقدار سرعت شی را که دارای شتاب ، سرعت برداری اولیه و موضع اولیه داده شده است ، پیدا کنید.

$$۱۴) \quad a(t) = -۳۲k; v_0 = i + j; r_0 = 0$$

$$v(t) = \int a(t)dt = \int -۳۲kdt = -۳۲tk + C$$

$$r(t) = \int v(t)dt = \int (-۳۲tk + C)dt = -۱۶t^۲k + Ct + C_۱$$

چون $v(0) = v_0 = i + j$ است ، پس داریم $C = i + j$ بطوری که

$$v(t) = i + j - ۳۲tk$$

و چون $r(0) = r_0 = 0$ است ، پس داریم $C_۱ = 0$ بطوری که

$$r(t) = ti + tj - ۱۶t^۲k$$

و در نهایت

$$\|v(t)\| = \sqrt{۱ + ۱ + (-۳۲t)^۲} = \sqrt{۲ + ۱۰۲۴t^۲}$$

۴.۴ - منحنی های فضایی و طول آنها Space Curves and Their Lengths

در بخش ۴.۱ در مورد منحنی هایی که توسط تابع های برداری ایجاد می شوند بحث کردیم. از این به بعد کلمه منحنی را بکار می بریم.

تعریف

یک منحنی فضایی A Space Curve و یا فقط منحنی Curve, برد یک تابع برداری پیوسته در یک بازه اعداد حقیقی است.

تمام تابع های برداری که تا کنون مورد بحث قرار داده ایم، پیوسته هستند و در نتیجه برد آنها منحنی هستند. در بسیاری از کتب فارسی زبان کلمه خم بجای منحنی بکار برده شده است. اما، ما همان کلمه منحنی را بکار می بریم. بطور کلی، هر نقطه، خط، پاره خط، دایره، سهمی، سیکلوئید، هلیکس مدور، همه منحنی هستند. ما معمولاً C را برای نامیدن و یا مشخص کردن یک منحنی بکار می بریم. و $\mathbf{r}$ برای نامیدن یک تابع برداری که برد آن یک منحنی C است، بکار می بریم. در این صورت می گوییم C توسط $\mathbf{r}$ پارامتری شده و یا $\mathbf{r}$ پارامتری شده C است.

اما، گاهی هم $\mathbf{r}$ را به عنوان منحنی بکار می بریم، مثلاً می گوییم منحنی

$$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

تابع های مولفه یک تابع برداری $\mathbf{r}$ معمولاً بوسیله x, y, z مشخص می شوند. پس

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

یک تابع برداری است، که برد آن یک منحنی است.

پارامتر کردن Parametrize

پارامتری سازی Parametrization

پارامتریزه شده Parametrized

یک عامل قابل اندازه گیری Parameter

در نتیجه معادله های پارامتری منحنی مطابق زیر است.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

مثال ۱- فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته در بازه I باشد. نشان دهید که نمودار f یک منحنی است، و یک پارامتری شده آن منحنی پیدا کنید.

پاسخ

تابع برداری $\mathbf{r}$ که مطابق زیر تعریف شده است، پیوسته است و منحنی f را ایجاد می کند. تصویر A

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} \quad t \in I$$

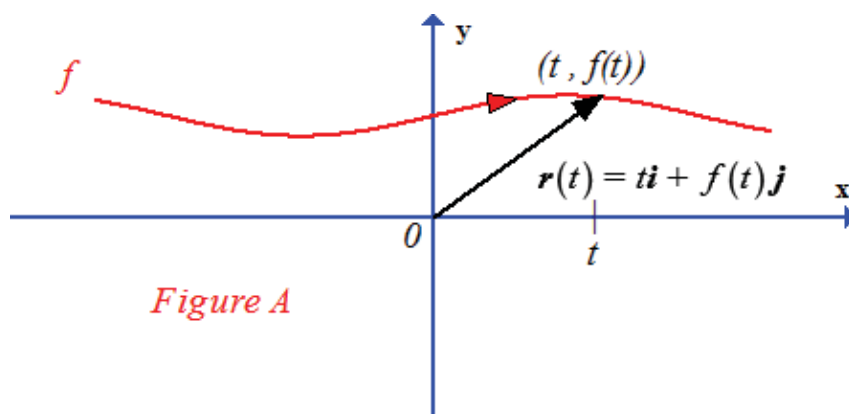


Figure A

پس نمودار f برد r است. همانطور که ملاحظه کردید، می توان نمودار هر تابع حقیقی پیوسته را پارامتری کرد. مثلا اگر داشته باشیم $f(t) = \ln t$ پس

$$r(t) = ti + \ln t j, \quad t > 0$$

نمودار f را پارامتری می کند.

خواص منحنی ها Properties of Curves

بین خواص متعدد منحنی ها، سه نمونه آنها را ذکر می کنیم. یعنی بسته بودن، هموار بودن، قطعه به قطعه هموار بودن.

بسته Closed

یکنواخت یا هموار Smooth

قطعه به قطعه هموار Piecewise Smooth

تعریف اول - بسته بودن Being Closed

یک منحنی C بسته است اگر یک پارامتری شده داشته باشد که دامنه اش بازه $[a, b]$ باشد، بطوری که $r(a) = r(b)$ باشد. تصویر B سمت راست بسته است و سمت چپ بسته نیست.

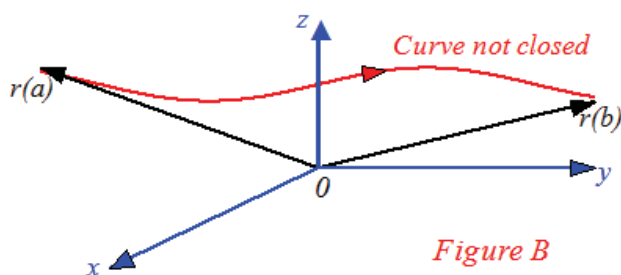
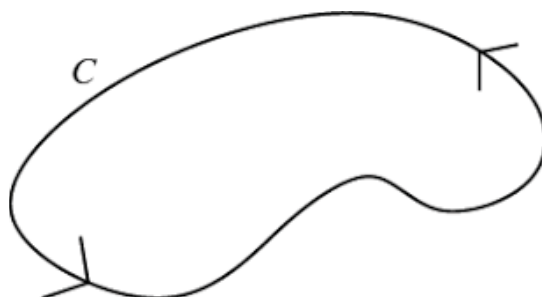


Figure B



می توان گفت یک منحنی بسته است، اگر نقطه ابتدایی و نقطه پایانی روی هم قرار دارند. مثلا

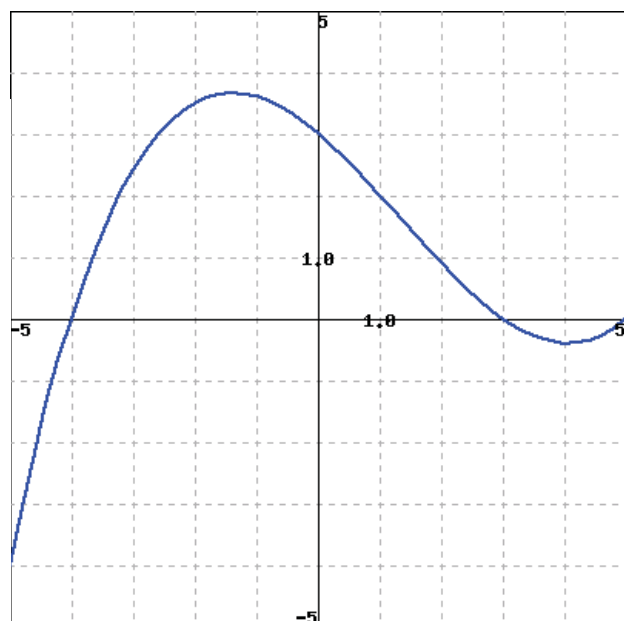
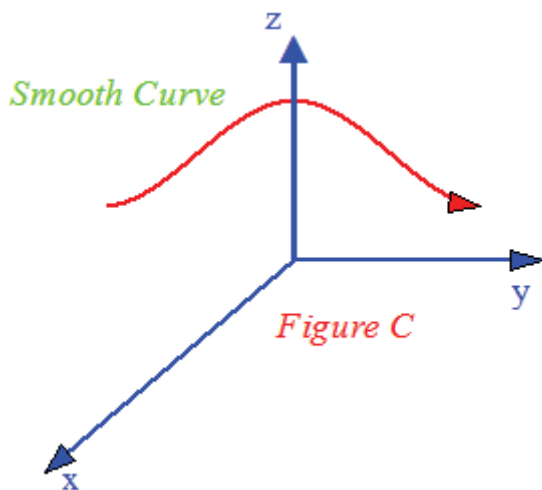
$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

معادله بالا دایره واحد را پارامتری می کند و چون $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ پس دایره واحد استاندارد، بسته است.

در حقیقت هر دایره و یا بیضی، پیوسته است. پاره خط ها، هلیکس های مدور، سیکلوئید ها، بسته نیستند.

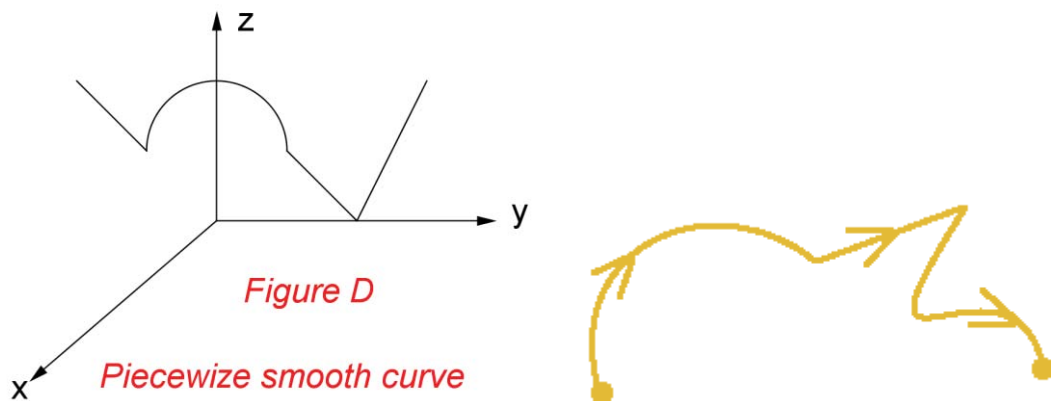
تعریف دوم - یکنواخت بودن یا هموار بودن Being Smooth

یک تابع برداری $\mathbf{r}$ تعریف شده در یک بازه I ، یکنواخت است اگر $\mathbf{r}$ یک مشتق پیوسته در I داشته باشد و $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ باشد برای هر یک از نقاط داخلی $t \in I$. یک منحنی C یکنواخت است اگر یک پارامتری شده یکنواخت داشته باشد. تصویر C



تعریف سوم - قطعه قطعه هموار بودن Being Piecewise Smooth

یک تابع برداری پیوسته $\mathbf{r}$ که در یک بازه I تعریف شده باشد، قطعه قطعه هموار است اگر I از تعداد محدودی بازه فرعی تشکیل شده باشد بطوری که در هر یک از این بازه های فرعی $\mathbf{r}$ هموار باشد و اگر $\mathbf{r}$ در هر یک از نقاط داخلی I مشتق های یک طرفه داشته باشد. یک منحنی C قطعه قطعه هموار است اگر یک پارامتری شده قطعه قطعه هموار داشته باشد. تصویر D



به زبان ساده ، یک منحنی یکنواخت و یا هموار است ، اگر شامل یک قطعه بوده و هیچ گوشه تندی نداشته باشد. تصویر C
 یک منحنی قطعه قطعه هموار است ، اگر شامل یک قطعه بوده و تعداد محدودی گوشه های تند داشته باشد. تصویر D

مثال ۲ - نشان دهید که یک دایره واحد استاندارد ، هموار یا یکنواخت است.

پاسخ

دایره نامبرده شده را می توان به طریق زیر پارامتری کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad \text{برای} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

تابع $\mathbf{r}$ در $[0, 2\pi]$ مشتق پذیر است و

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

پس $\mathbf{r}'$ در $[0, 2\pi]$ پیوسته است ، و

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

از رابطه بالا نتیجه می گیریم که $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ است برای هر t در $[0, 2\pi]$. لذا این دایره یکنواخت است.

مثال ۳ - نشان دهید که هلیکس زیر یکنواخت است.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

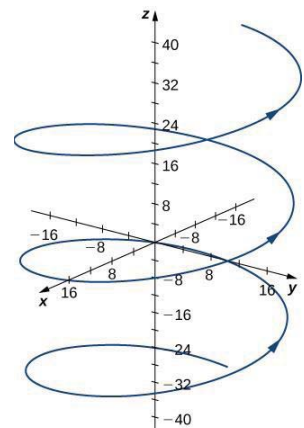
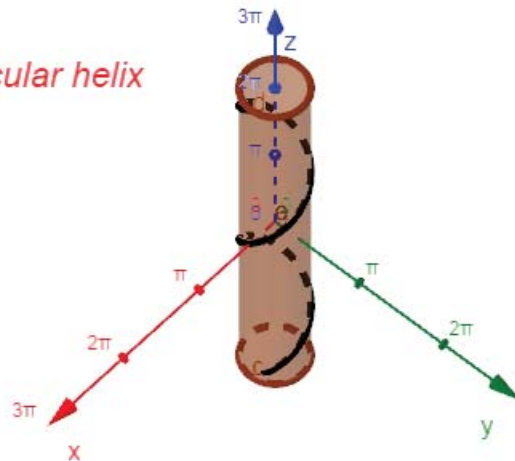
پاسخ

چون $\mathbf{r}' = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ است ، پس $\mathbf{r}'$ پیوسته است و $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ است برای تمام t ها ، لذا هلیکس هموار است. تصویر E

Figure E

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

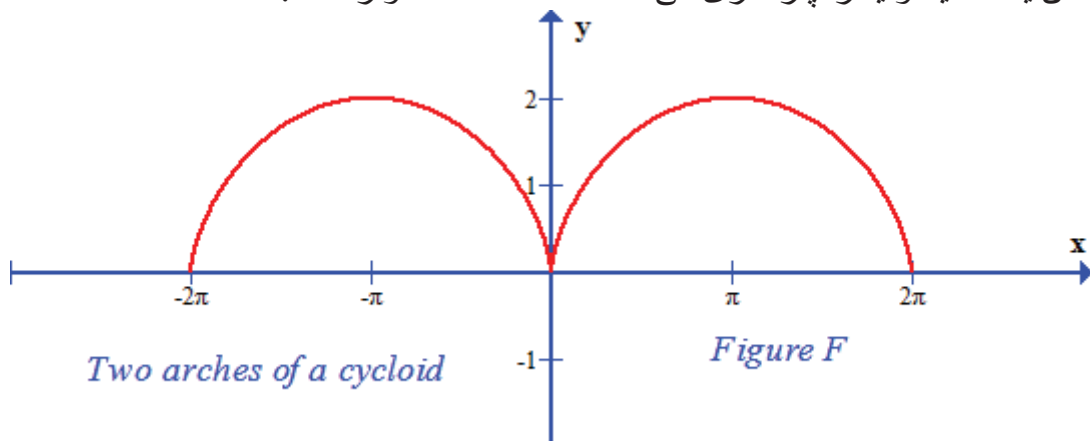
Circular helix



مثال ۴ - نشان دهید که منحنی

$$\mathbf{r}(t) = r(t - \sin t) \mathbf{i} + r(1 - \cos t) \mathbf{j} \quad \text{برای} \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

که دو کمان یک سیکلوئید را پارامتری می کند، قطعه قطعه هموار است.



پاسخ

$$\mathbf{r}'(t) = r(1 - \cos t) \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j}$$

گر چه $\mathbf{r}'$ پیوسته است، اما $\mathbf{r}$ هموار و یکنواخت نیست، زیرا $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$ است. ولی $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ اگر $t \neq 0$ ، $t \neq -2\pi$ ، $t \neq 2\pi$ باشد، پس $\mathbf{r}$ در بازه های $[-2\pi, 0]$ و $[0, 2\pi]$ هموار است، لذا $\mathbf{r}$ قطعه قطعه هموار است. تصویر F

فرض کنید (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) دو نقطه متمایز در فضا باشند، معادله های پارامتری زیر را در نظر بگیرید.

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad z = z_0 + (z_1 - z_0)t \quad (1)$$

چون $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ است برای $t = 0$ و $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ است برای $t = 1$ ، پس شماره (۱) معادله های پارامتری خطی است که از (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) می گذرد. علاوه بر این

$$\mathbf{r}(t) = [x_0 + (x_1 - x_0)]\mathbf{i} + [y_0 + (y_1 - y_0)]\mathbf{j} + [z_0 + (z_1 - z_0)]\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

یک پارامتری شده هموار برای پاره خط از (x_0, y_0, z_0) تا (x_1, y_1, z_1) است.

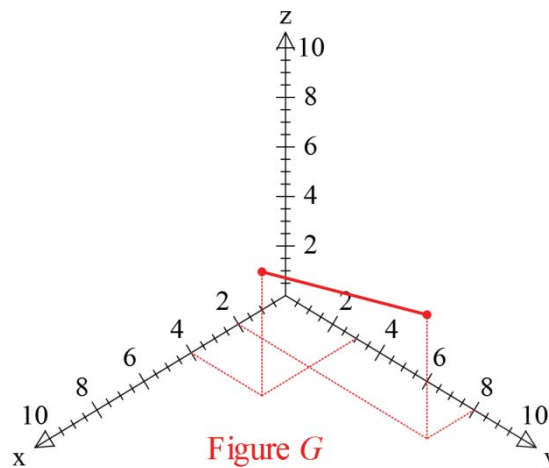
مثال ۵ - یک پارامتری شده هموار برای پاره خط از $(4, 3, 5)$ تا $(2, 8, 5)$ پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از روش بالا، با $x_0 = 4$ ، $y_0 = 3$ ، $z_0 = 5$ ، $x_1 = 2$ ، $y_1 = 8$ ، $z_1 = 5$ داریم.

$$\mathbf{r}(t) = (4 - 2t)\mathbf{i} + (3 + 5t)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

معادله بالا یک پارامتری شده هموار برای آن پاره خط است. تصویر G



$$\mathbf{r}(t) = (4 - 2t)\mathbf{i} + (3 + 5t)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

طول یک منحنی Length of a Curve

همان روشی را که در مورد محاسبه طول منحنی روی یک صفحه در بخش ۳.۳ کتاب انتگرال آوا توسط همین قلم، بکار بردیم، برای محاسبه طول منحنی در فضا، بکار می بریم. اما توجه داشته باشیم، هنگام محاسبه طول یک منحنی که پارامتری شده است، بیش از یک مرتبه محاسبه نکنیم. مثلاً دایره واحد پارامتری شده زیر را ملاحظه کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

اگر بخواهیم طول منحنی بالا را محاسبه کنیم، دو مرتبه محیط دایره را محاسبه کرده ایم. حتی در معادله پارامتری شده زیر

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

نقطه $(1, 0)$ دو مرتبه محاسبه می شود. برای $t = 0$ و $t = 2\pi$
 برای شروع، طول ساده ترین منحنی را محاسبه می کنیم. فرض می کنیم C پاره خطی باشد که نقاط (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) را در فضا به هم وصل می کند. تصویر H

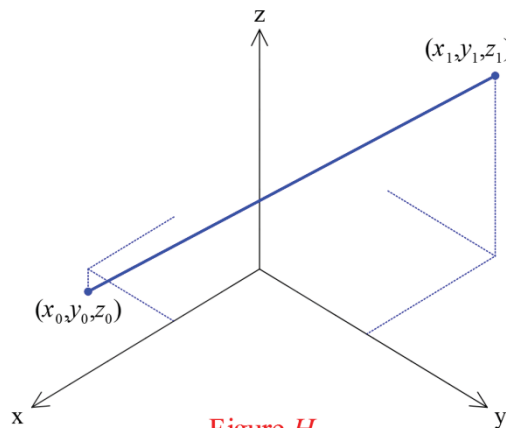


Figure H

پس طول منحنی C را فاصله بین دو نقطه تعریف می کنیم.

$$\mathcal{L} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (2)$$

حالا فرض می کنیم C یک منحنی هموار باشد و

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad , \quad a \leq t \leq b$$

یک پارامتری شده هموار برای C باشد.

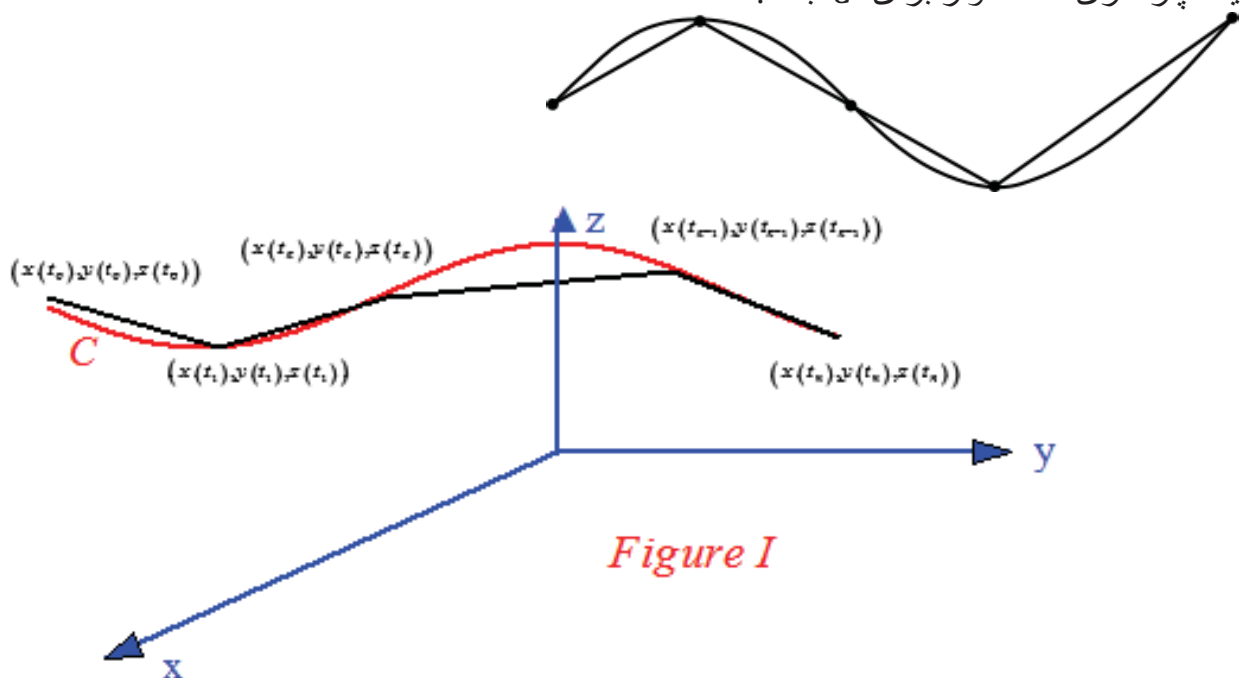


Figure I

فرض می کنیم $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ یک پارش $Partition$ بازه $[a, b]$ باشد. و فرض می کنیم L منحنی چند بری سیاه رنگ باشد. تصویر I طول قسمت k ام منحنی C را $\Delta \mathcal{L}_k$ می نامیم. اگر Δt_k کوچک باشد، پس $\Delta \mathcal{L}_k$ تقریباً مساوی طول پاره خط مربوطه خواهد بود. به عبارت دیگر

$$\Delta \mathcal{L}_k \approx \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}$$

بر اساس قضیه مقدار میانگین اعدادی مانند u_k, v_k, w_k در $[t_{k-1}, t_k]$ وجود دارد بطوری که

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(u_k)\Delta t_k, \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(v_k)\Delta t_k, \\ z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(w_k)\Delta t_k$$

در رابطه بالا $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ است. در نتیجه

$$\Delta \mathcal{L}_k \approx \sqrt{(x'(u_k))^2 (\Delta t_k)^2 + (y'(v_k))^2 (\Delta t_k)^2 + (z'(w_k))^2 (\Delta t_k)^2}$$

و یا

$$\Delta \mathcal{L}_k = \sqrt{(x'(u_k))^2 + (y'(v_k))^2 + (z'(w_k))^2} \Delta t_k \quad (3)$$

پس مجموعاً طول C ، که مجموع $\Delta \mathcal{L}_1, \Delta \mathcal{L}_2, \dots, \Delta \mathcal{L}_n$ است، تقریباً مطابق زیر است.

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(u_k))^2 + (y'(v_k))^2 + (z'(w_k))^2} \Delta t_k \quad (4)$$

که این خود تقریباً مطابق زیر است.

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

و چون

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

است، نتیجه می گیریم $\mathcal{L}$ باید تقریباً $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ باشد. پس به تعریف زیر می رسم.

تعریف طول یک منحنی Definition of the Length of a Curve

فرض می کنیم C یک منحنی پارامتری شده قطعه قطعه هموار $\mathbf{r}$ باشد که در $[a, b]$ تعریف شده است. پس طول C مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt \quad (5)$$

اگر داشته باشیم

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

پس شماره (۵) را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (۶)\end{aligned}$$

مثال ۶ - طول آن قسمت هلیکس برای $0 \leq t \leq 2\pi$ را پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

پاسخ

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

مثال ۷ - طول منحنی زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{2} t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

پاسخ

بر اساس (۶) داریم.

$$\mathcal{L} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt = \int_{-1}^1 (1 + 3t^2) dt = (t + t^3) \Big|_{-1}^1 = 4$$

اگر تابع مثال ۷ کمی فرق داشت ، مثلاً به صورت زیر می بود

$$\mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

پس طول منحنی مربوطه به صورت زیر می بود.

$$\mathcal{L} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt$$

متأسفانه ، محاسبه این انتگرال با وسایل ابتدایی غیر ممکن است. مقدار آن فقط بطور تقریب می توان بدست آورد. مثلاً از طریق قانون دوزنقه ای و یا قانون سیمپسون ، در حقیقت طول بیشتر منحنی ها ، فقط با تقریب می توان پیدا کرد.

اگر C از دو منحنی C_1 و C_2 تشکیل شده باشد ، بطوری که هر کدام هموار باشد ، پس طول C مساوی مجموع طول های C_1 و C_2 است.

استقلال پارامتری سازی Independence of Parametrization

هر منحنی چندین پارامتری سازی دارد. مثلاً پاره خطی که از $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $(1, 1, 1)$ می گذرد، به طرق زیر پارامتری می شود.

$$r_1(t) = ti + tj + tk, \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

$$r_2(t) = (t-2)i + (t-2)j + (t-2)k, \quad \frac{9}{4} \leq t \leq 3$$

$$r_3(t) = t^2i + t^2j + t^2k, \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

اگر با استفاده از تعریف بالا، طول r_1, r_2, r_3 را بدست آوریم، به یک نتیجه می رسیم. می توان نشان داد که برای محاسبه طول با استفاده از هر پارامتری شده هر منحنی قطعه قطعه هموار، باز به یک نتیجه می رسیم.

پس می گوییم محاسبه طول منحنی مستقل از پارامتری سازی است.

طول یک نمودار قطبی Length of a Polar Graph

با کمک تعریف طول یک منحنی که در بالا ذکر شد، می توان یک فرمول برای طول یک منحنی قطبی $r = f(\theta)$ در فضا پیدا کرد. در صورتی که f' در یک بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشد. نمودار قطبی $r = f(\theta)$ دقیقاً منحنی پارامتری شده زیر است.

$$r(\theta) = \overbrace{r \cos \theta}^x i + \overbrace{r \sin \theta}^y j = f(\theta) \cos \theta i + f(\theta) \sin \theta j$$

پس

$$r'(\theta) = [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]i + [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta]j$$

لذا

$$\begin{aligned} \|r'(\theta)\|^2 &= [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]^2 + [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta]^2 \\ &= [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 \end{aligned}$$

در نهایت بر اساس تعریف طول یک منحنی، طول یک نمودار قطبی مطابق زیر است.

$$\mathcal{L} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta \quad (7)$$

مثال ۸ - طول دایره $r = 3$ را پیدا کنید.

پاسخ

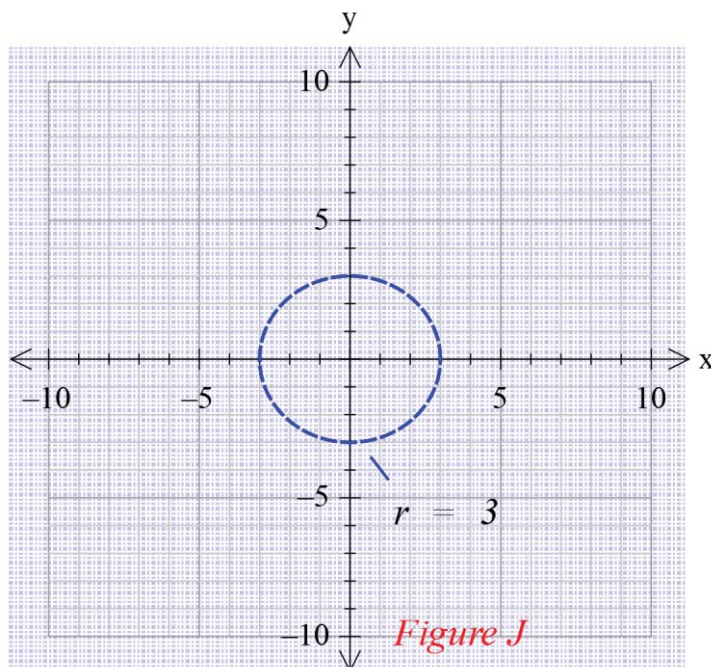
یک معادله قطبی دایره $r = 3$ است، برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ لذا داریم

$$f(\theta) = 3 \text{ و } f'(\theta) = 0$$

پس بر اساس شماره (۷) داریم.

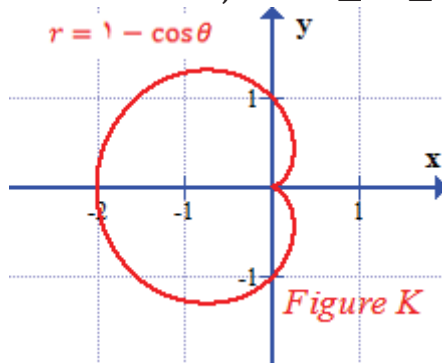
$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{3^2 + 0^2} d\theta = 6\pi$$

تصویر J



مثال ۹ - طول منحنی کاردیواید Cardioid یا منحنی قلب شکل زیر را پیدا کنید. تصویر K

$$r = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



پاسخ

چون $f(\theta) = 1 - \cos \theta$ است، پس $f'(\theta) = \sin \theta$ است. لذا بر اساس شماره (۷) داریم.

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta$$

با استفاده از همانی مثلثاتی $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ و این حقیقت که $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ است برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ پس داریم.

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left(-\cos \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 8$$

تابع طول قوس یا کمان The Arc Length Function

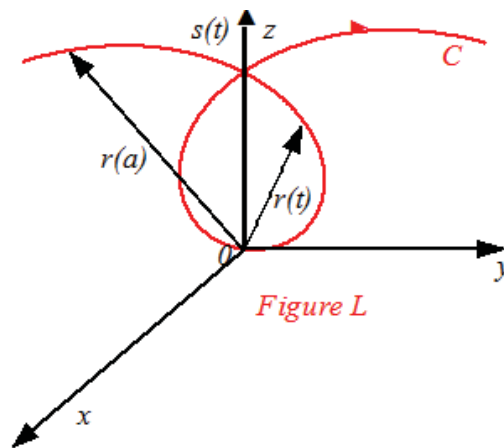
فرض می کنیم C یک کمان هموار که در بازه I مطابق زیر پارامتری شده است.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I$$

و فرض می کنیم a یک عدد ثابت در I باشد. تابع طول کمان s را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} du, \quad t \in I \quad (8)$$

توجه داشته باشید که اگر $t \geq a$ باشد، پس $s(t)$ طول آن قسمت منحنی بین $\mathbf{r}(a)$ و $\mathbf{r}(t)$ است. تصویر L



و اگر $\mathbf{r}(t)$ نمایانگر مکان یک شی در زمان $t \geq a$ باشد، پس $s(t)$ مسافت طی شده توسط شی بین زمان a و زمان t است.

اگر از عبارت شماره (۸) نسبت به t مشتق بگیریم، خواهیم داشت.

$$s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

و یا

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} \right) \quad (9)$$

اگر $\mathbf{r}$ مکان یک شی در حال حرکت باشد و $\mathbf{v}$ سرعت برداری آن، پس بر اساس شماره (۹) و تعریف سرعت در بخش ۴.۳ داریم.

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\| \geq 0 \quad (10)$$

مثال ۱۰ - فرض کنید $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ باشد. $\frac{ds}{dt}$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\end{aligned}$$

تمرینات ۴.۴

در تمرینات زیر مشخص کنید کدام یک از پارامتریزه شده ها Parametrizations هموار، کدام یک قطعه قطعه هموار، و کدام یک هیچ یک از اینها است.

- ۱) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
- ۲) $\mathbf{r}(t) = |t|\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
- ۳) $\mathbf{r}(t) = (1+t)^{3/2}\mathbf{i} + (1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{3t}{4}\mathbf{k}$
- ۴) $\mathbf{r}(t) = \cos^2 t\mathbf{i} + \sin^2 t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
- ۵) $\mathbf{r}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

در تمرینات زیر یک پارامتریزه شده هموار برای منحنی توضیح داده شده، پیدا کنید.

۶ - خط مستقیم از $(-3, 2, 1)$ تا $(4, 0, 5)$

۷ - دایره در سیستم xy بطوری که مرکز آن روی مبدا مختصات و شعاع آن ۶ باشد.

۸ - نیم دایره در سیستم xy که از نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ می گذرد.

۹ - ربع دایره در صفحه $z = 4$ که نقاط انتهایی آن $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 4\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 4\right)$ است و مرکز آن $(0,0,4)$ است.

۱۰ - نمودار $y = \tan x$ برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

در تمرینات زیر طول منحنی را پیدا کنید.

$$۱۱) \mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$۱۲) \mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{3/2} \mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{3/2} \mathbf{j} + \frac{1}{4} t \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$۱۳) \mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2} t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$۱۴) \mathbf{r}(t) = 2(t^2 - 1)^{3/2} \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{8}$$

در تمرینات زیر $\frac{ds}{dt}$ را پیدا کنید.

$$۱۵) \mathbf{r}(t) = \sin^2 t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j} + \frac{2}{3} t^{3/2} \mathbf{k}$$

$$۱۶) \mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

$$۱۷) \mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

در تمرین زیر طول نمودار قطبی را پیدا کنید.

$$۱۸) r = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad a > 0$$

در تمرین زیر با استفاده از قانون سیمپسون **Simpson's Rule** با $n = 4$ طول منحنی را بطور تقریب پیدا کنید.

$$۱۹) \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

پاسخ تمرینات ۴.۴

در تمرینات زیر مشخص کنید کدام یک از پارامتریزه شده ها Parametrizations هموار، کدام یک قطعه قطعه هموار، و کدام یک هیچ یک از اینها است.

$$۱) \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

پس $\mathbf{r}'$ پیوسته است و $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ برای تمام مقادیر t پس $\mathbf{r}$ هموار است.

$$۲) \quad \mathbf{r}(t) = |t|\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & , t < 0 \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & , t > 0 \end{cases}$$

پس $\mathbf{r}'$ پیوسته است و در بازه های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ صفر نیست. چون مشتق های یک طرفه در صفر به ترتیب $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ وجود دارند، پس نتیجه می گیریم $\mathbf{r}$ قطعه قطعه هموار است.

$$۳) \quad \mathbf{r}(t) = (1+t)^{3/2}\mathbf{i} + (1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{3}{4}t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{3}{4}(1+t)^{1/2}\mathbf{i} - \frac{3}{4}(1-t)^{1/2}\mathbf{j} + \frac{3}{4}\mathbf{k} \quad , \quad -1 < t < 1$$

و چون مشتق های یک طرفه وجود دارند و لذا $\mathbf{r}'$ پیوسته و غیر صفر در $[-1, 1]$ پس $\mathbf{r}$ هموار است.

$$۴) \quad \mathbf{r}(t) = \cos^2 t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -2 \cos t \sin t \mathbf{i} + 2 \sin t \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

چون $\mathbf{r}$ پیوسته است و $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ است اگر $t = 0$ باشد، پس $\mathbf{r}$ قطعه قطعه هموار است.

$$۵) \quad \mathbf{r}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t - 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

پس $\mathbf{r}'$ پیوسته است و $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ است اگر فقط $t = 0$ باشد، پس $\mathbf{r}$ قطعه قطعه هموار است.

در تمرینات زیر یک پارامتریزه شده هموار برای منحنی توضیح داده شده، پیدا کنید.

۶ - خط مستقیم از $(-3, 2, 1)$ تا $(4, 0, 5)$

پاسخ

پاره خط، موازی $4\mathbf{k} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{i}$ و از $(-3, 2, 1)$ شروع می شود، پس پارامتریزه شده مطابق زیر است.

$$\mathbf{r}(t) = (-3 + 7t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + (1 + 4t)\mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

و $\mathbf{r}$ هموار است.

۷ - دایره در سیستم xy بطوری که مرکز آن روی مبدا مختصات و شعاع آن ۶ باشد.
پاسخ

$$\mathbf{r}(t) = 6 \cos t \mathbf{i} + 6 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۸ - نیم دایره در سیستم xy که از نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ می گذرد.
پاسخ

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

۹ - ربع دایره در صفحه $z = 4$ که نقاط انتهایی آن $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 4\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 4\right)$ است و مرکز آن $(0, 0, 4)$ است.
پاسخ

توجه دارید که ربع دایره در صفحه xy که از $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ تا $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ ادامه داشته باشد ، مربوط است به ربع دایره $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ تا $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$ در مختصات قطبی ، این ما را به معادله زیر راهنمایی می کند.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

۱۰ - نمودار $y = \tan x$ برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

پاسخ

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

در تمرینات زیر طول منحنی را پیدا کنید.

۱۱) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[3 \cos^2 t (-\sin t)]^2 + [3 \sin^2 t \cos t]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3[\sin t \cos t] dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cos t dt = 6 \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6 \end{aligned}$$

$$۱۲) \quad \mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+t)^{3/2} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t)^{3/2} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} t \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{3}(1+t)^3 + \frac{1}{3}(1-t)^3 + \frac{1}{3}} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} t \Big|_{-1}^1 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$۱۳) \quad \mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2} t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} dt = \int_0^1 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = (e^t - e^{-t}) \Big|_0^1 = e - e^{-1} \end{aligned}$$

$$۱۴) \quad \mathbf{r}(t) = 2(t^2 - 1)^{3/2} \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{36t^3(t^2 - 1) + 9t^4 + 9t^4} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} 6 \sqrt{t^3 + t^5} dt = \int_1^{\sqrt{2}} 6t \sqrt{t^2 + 1} dt = 2(t^2 + 1)^{3/2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = 54 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر $\frac{ds}{dt}$ را پیدا کنید.

$$۱۵) \quad \mathbf{r}(t) = \sin^2 t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{3}} t^{3/2} \mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + t} = \sqrt{4 + t}$$

$$۱۶) \quad \mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{2 + t^2} \end{aligned}$$

$$۱۷) \mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 1} = \sqrt{3 - 2 \cos t}$$

در تمرین زیر طول نمودار قطبی را پیدا کنید.

$$۱۸) r = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad a > 0$$

$$\mathcal{L} = \int_0^\pi \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} d\theta = a \int_0^\pi 1 d\theta = a \theta$$

در تمرین زیر با استفاده از قانون سیمپسون **Simpson's Rule** با $n = 4$ طول منحنی را بطور تقریب پیدا کنید.

$$۱۹) \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{-1}^1 \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &\approx \frac{2}{12} \left[\sqrt{2} + 4 \sqrt{\frac{17}{16}} + 2 * 1 + 4 \sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{2} \right] \approx 2 / 17911 \end{aligned}$$

۴.۵ – بردارهای مماس و عمود بر منحنی ها

Tangent Lines and Normal Lines to Curves

خطوط مماس و عمود بر یک تابع حقیقی f بوسیله مشتق f' تعریف می شود. حالا ما هم مشتق های تابع های برداری را برای تعریف خطوط مماس و عمود بر منحنی ها در فضا بکار می بریم. البته اینجا، خطوط مماس و عمود، بردار هستند و نه خط.

مماس بر منحنی ها Tangents to Curves

چون منحنی هموار الزاما یک پارامتریزه شده هموار دارد، پس در این بخش فرض می کنیم هر پارامتریزه شده ای برای یک منحنی هموار، الزاما هموار است.

تعریف بردار مماس Definition of Tangent Vector

فرض می کنیم C یک منحنی هموار باشد و $\mathbf{r}$ یک پارامتریزه شده هموار C و تعریف شده در بازه I باشد. پس برای هر نقطه داخلی t در بازه I ، بردار مماس $T(t)$ در نقطه $\mathbf{r}(t)$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|} \quad (1)$$

طبق تعریف (۱) بردار $T(t)$ یک بردار واحد منحصر به فرد است. جهت بردار مماس هم همان جهت C است. تصویر A

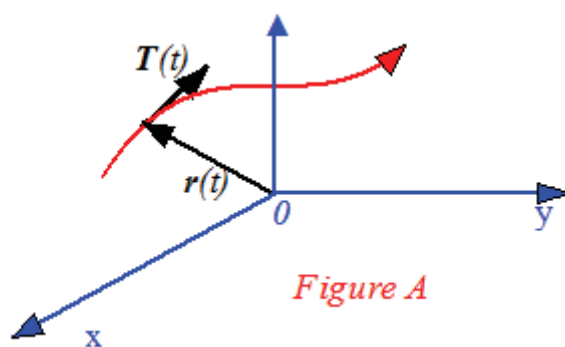


Figure A

مثال ۱ – دایره با شعاع r که به صورت زیر پارامتریزه شده است، در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}(t) = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

یک فرمول برای بردار مماس $T(t)$ پیدا کنید، و $T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

چون داریم

$$\mathbf{r}'(t) = -r \sin t \mathbf{i} + r \cos t \mathbf{j}$$

پس

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r$$

پس بر اساس شماره (۱) داریم.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

و در نهایت

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$$

توجه دارید که برای تابع مکان $\mathbf{r}(t)$ در مثال ۱ داریم.

$$\mathbf{T}(r) \cdot \mathbf{r}(t) = (-\sin t)(r \cos t) + (\cos t)(r \sin t) = 0$$

است برای تمام t ها. این یعنی بردار مماس عمود است بر بردار مکان برای تمام t ها. تصویر B

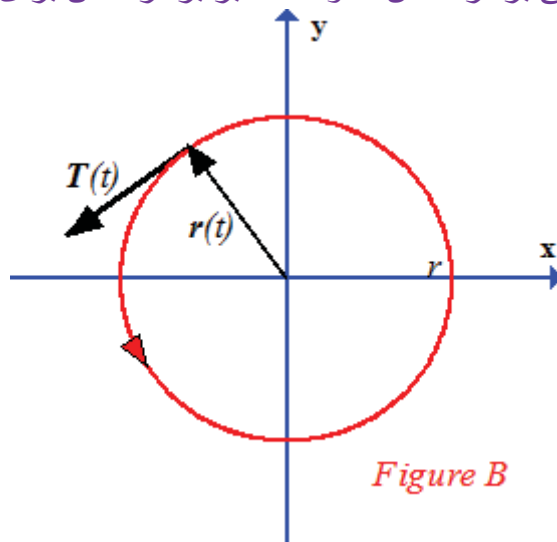


Figure B

مثال ۲ - یک فرمول برای بردار مماس $\mathbf{T}(t)$ بر هلیکس مدور زیر پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

پاسخ

ابتدا مشتق و طول آن حساب می کنیم.

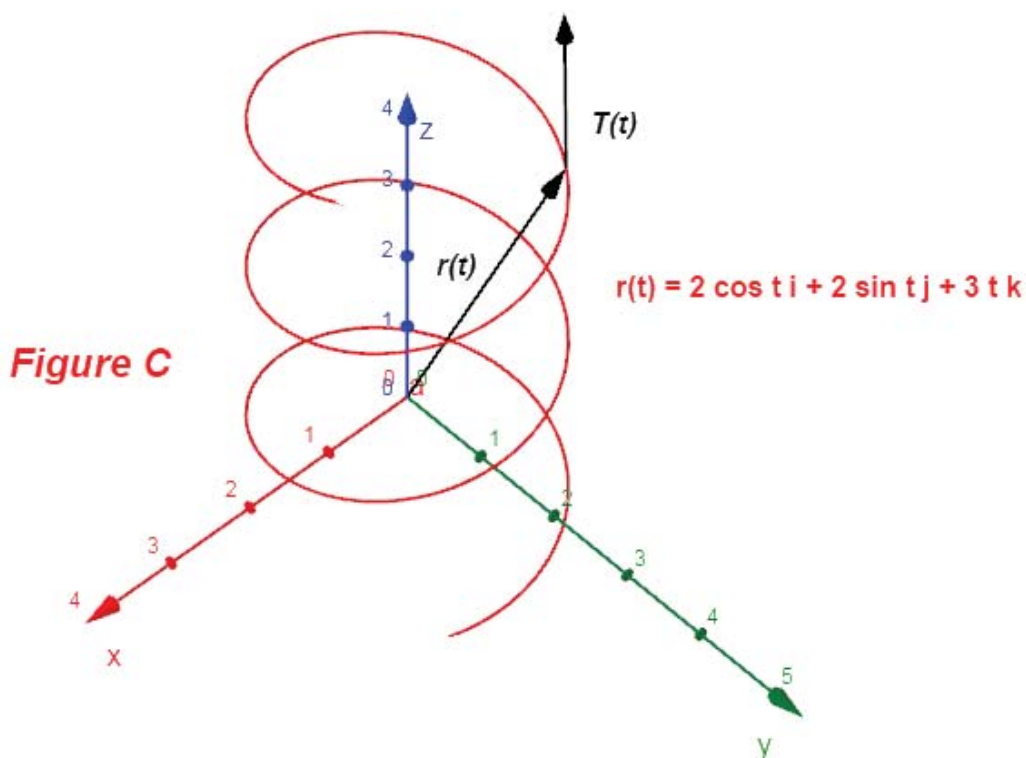
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$$

$$\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

پس بر اساس (۱) داریم.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{k}$$

تصویر C



نرمال یا بردار عمود بر منحنی Normal to Curve

خط عمود بر نمودار یک تابع حقیقی، در یک نقطه داده شده، طبق تعریف عبارت است از خط عمود بر مماس در آن نقطه. به همین طریق در تعریف بردار نرمال بر یک منحنی در فضا، انتظار داریم بردار نرمال، عمود بر بردار مماس باشد. اما چون تعداد زیادی بردار در فضا وجود دارد که بر یک بردار داده شده عمود باشد، تصویر D ، باید راهی پیدا کنیم که فقط یکی از آنها را انتخاب کنیم.

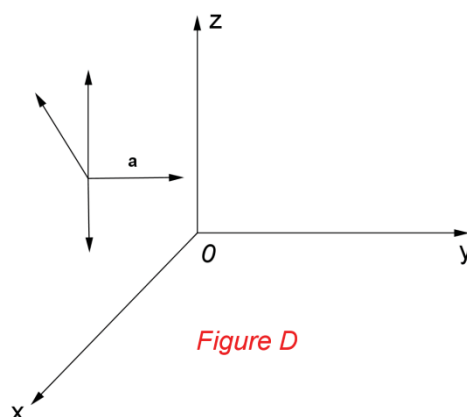


Figure D

حالا فرض کنید یک منحنی هموار C یک یک پارامتریزه شده $\mathbf{r}$ داشته باشد، بطوری که نه فقط هموار است، بلکه یک مشتق $\mathbf{r}'$ دارد، که این هم هموار است. پس بردار مماس $\mathbf{T}$ ، که بر حسب $\mathbf{r}'$ تعریف شده است، مشتق پذیر است. علاوه بر این، $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ است برای تمام t ها در دامنه $\mathbf{T}$ بر اساس قضیه فرعی بخش ۴.۳ هر گاه $\mathbf{T}'(t)$ وجود داشته باشد، پس رابطه زیر برقرار است.

$$\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$$

پس اگر $\mathbf{T}'(t) \neq 0$ باشد، لذا $\mathbf{T}'(t)$ عمود است بر $\mathbf{T}(t)$ و بردار واحد در جهت $\mathbf{T}'(t)$ بردار عمود مورد نظر ما بر C در $\mathbf{r}(t)$ است.

تعریف بردار نرمال یا بردار عمود بر منحنی Definition of Normal Vector to a Curve

فرض می کنیم C یک منحنی هموار باشد، و فرض می کنیم $\mathbf{r}$ یک پارامتریزه شده هموار C تعریف شده در بازه I باشد، بطوری که $\mathbf{r}'$ هم هموار باشد. پس برای هر نقطه داخلی t در بازه I ، که $\mathbf{T}'(t) \neq 0$ باشد، بردار نرمال $\mathbf{N}(t)$ در نقطه $\mathbf{r}(t)$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|} \quad (2)$$

مثال ۳- یک فرمول برای نرمال بر دایره زیر پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j}$$

پاسخ

از مثال ۱ می دانیم که

$$\mathbf{T}(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

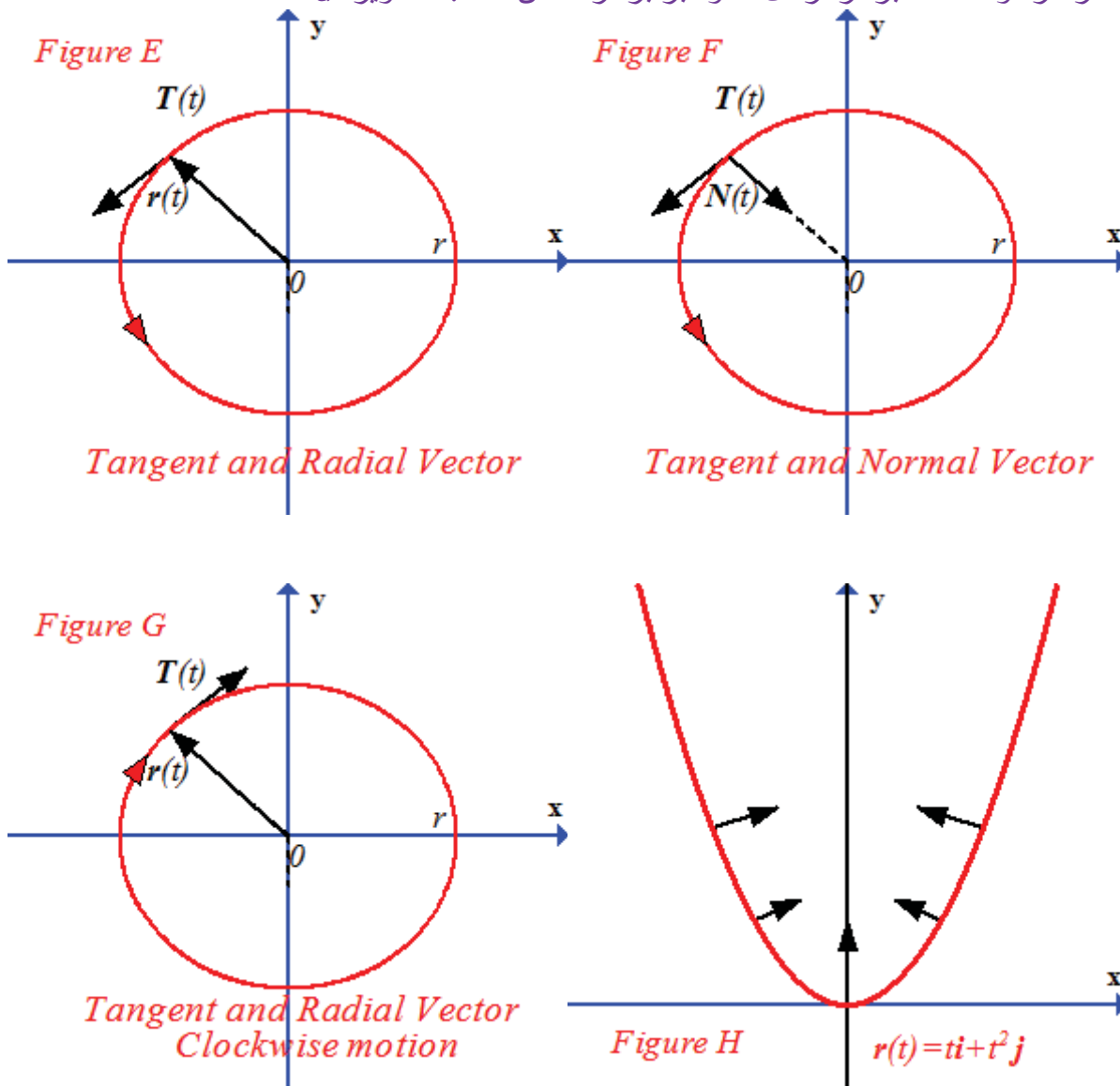
پس

$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

چون $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$ است برای تمام t ها پس بر اساس (۲) داریم.

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} = -\frac{1}{r} \mathbf{r}(t)$$

از مثال ۳ نتیجه می گیریم که جهت نرمال بر خط سیر یک شئی در حال حرکت خلاف جهت عقربه ساعت حول یک دایره، بطرف مرکز دایره، و خلاف جهت بردار رادیال و یا بردار مکان است. در تصویر E بردار رادیال یا بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ و بردار مماس $\mathbf{T}(t)$ را ملاحظه می کنید. در تصویر F بردار نرمال $\mathbf{N}(t)$ را ملاحظه می کنید که جهت آن به طرف مرکز دایره و روی بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ قرار دارد. برای روشن شدن این موضوع، بقیه بردار $\mathbf{r}(t)$ با خط چین نشان داده ایم. اگر مسیر حرکت شئی موافق جهت عقربه ساعت باشد، باز هم جهت بردار نرمال بطرف مرکز دایره است. در هر دو حالت، بردار نرمال عمود بر بردار مماس است. تصویر G



مثال ۴ - فرمولی برای نرمال بر سهمی زیر پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

پاسخ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{i} + \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{j}$$

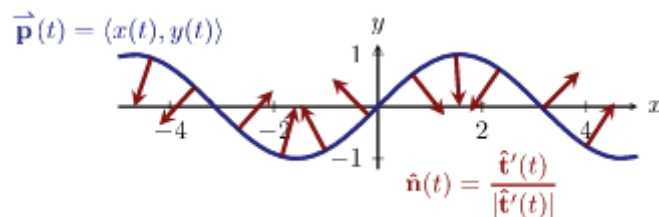
$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-4t}{(1 + 4t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{2}{1 + 4t^2}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{-2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{j}$$

تصویر H

منحنی هایی که در مثال های ۳ و ۴ ملاحظه کردید، در صفحه xy قرار دارند. در هر کدام از آنها، هر نقطه ای که گودی Concave به طرف بالا باشد، بردار نرمال دارای مولفه $\mathbf{j}$ مثبت است، یعنی بردار نرمال به طرف بالا اشاره می کند، در هر نقطه ای که گودی Concave به طرف پایین است، بردار نرمال دارای مولفه $\mathbf{j}$ منفی است، یعنی بردار نرمال به طرف پایین اشاره می کند. این خواص در تمام منحنی هایی که در صفحه xy قرار دارند، وجود دارند. بردار های نرمال برای تابع سینوس در تصویر I ملاحظه می کنید.

تصویر I



مثال ۵ - یک فرمول برای نرمال هلیکس مدور زیر پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

پاسخ

بر اساس مثال ۲ داریم.

$$\mathbf{T}(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{k}$$

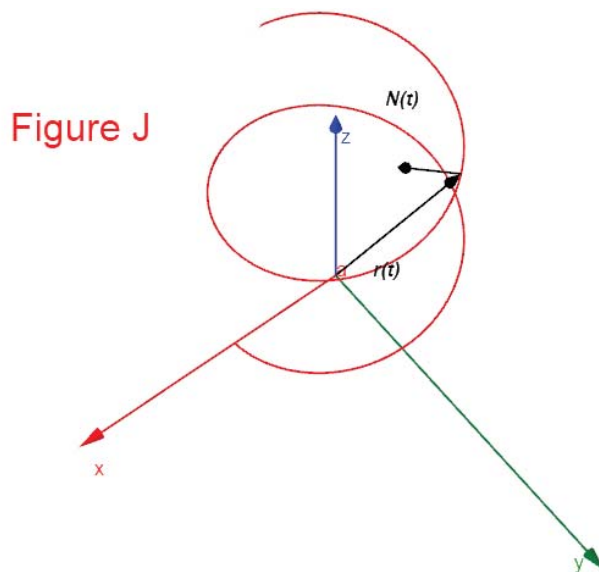
پس

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{j} \quad \text{و} \quad \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

در نتیجه بر اساس شماره (۲) داریم.

$$N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left\| \frac{dT}{dt} \right\|} = \frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cos t \mathbf{i} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \sin t \mathbf{j}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} \\ = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

همانطور که در مثال ۵ ملاحظه می کنید، نرمال بر هلیکس همیشه عمود بر محور z و به طرف این محور اشاره می کند. تصویر J



مولفه های مماس و نرمال شتاب Tangential and Normal Components of Acceleration

چون بردار مماس T و بردار نرمال N در هر نقطه روی یک منحنی هموار C ، بر هم عمود هستند، پس بر اساس بحث ما در بخش ۳.۴ در مورد تجزیه یک بردار، نتیجه می گیریم هر برداری مانند b که روی صفحه توسط T و N مشخص شده باشد، می تواند به صورت زیر بیان شود. تصویر K .

$$b = b_T T + b_N N$$

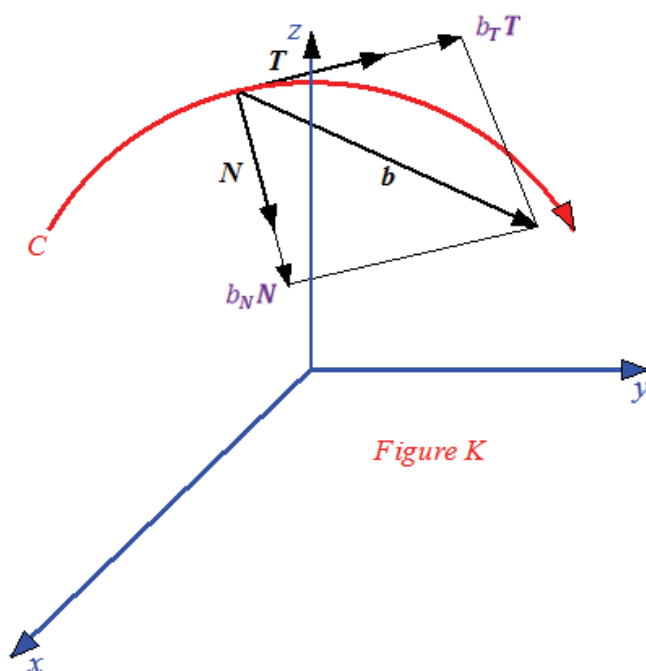


Figure K

در فرمول بالا b_T را مولفه مماس و b_N را مولفه نرمال b می نامیم.

مولفه مماس Tangential Component

مولفه نرمال Normal Component

حالا نشان می دهیم که بردار سرعت و بردار شتاب یک شئی در حال حرکت در امتداد C , روی صفحه ای قرار دارند که توسط T و N مشخص شده است و سپس مولفه های مماس و نرمال آنها را پیدا می کنیم.

جهت بررسی سرعت برداری v , فرض می کنیم r نمایش مکان شئی باشد و باز فرض می کنیم T و N وجود داشته باشند. پس بر اساس شماره (۱) داریم.

$$v = \frac{dr}{dt} = \left\| \frac{dr}{dt} \right\| T = \|v\| T \quad (۳)$$

پس مولفه مماس سرعت برداری v , مقدار سرعت $\|v\|$ شئی است و مولفه نرمال سرعت برداری صفر است.

برای پیدا کردن شتاب a , از طرفین رابطه شماره (۳) مشتق می گیریم.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\|v\|}{dt} T + \|v\| \frac{dT}{dt}$$

چون

$$\frac{dT}{dt} = \left\| \frac{dT}{dt} \right\| N$$

است، پس بر اساس (۲) معادله شتاب a مطابق زیر است.

$$a = \frac{d\|v\|}{dt} T + \|v\| \left\| \frac{dT}{dt} \right\| N$$

لذا

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} \quad (۴)$$

در شماره (۴)

$$a_T = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \quad \text{و} \quad a_N = \|\mathbf{v}\| \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| \quad (۵)$$

اعداد a_T و a_N به ترتیب مولفه مماس شتاب و مولفه نرمال شتاب هستند.

مولفه مماس شتاب Tangential Component of Acceleration

مولفه نرمال شتاب Normal Component of Acceleration

چون $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردار های واحدی هستند که متقابلاً بر هم عمود هستند ، از شماره (۴) نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}) \cdot (a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}) = a_T^2 \|\mathbf{T}\|^2 + a_N^2 \|\mathbf{N}\|^2 \\ &= a_T^2 + a_N^2 \end{aligned}$$

لذا چون محاسبه a_N از طریق شماره (۵) مشکل است ، می توان آنرا بوسیله a_T و $\mathbf{a}$ بدست آورد.

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} \quad (۶)$$

مثال ۶ - فرض می کنیم $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$ باشد. مطلوب است مولفه های مماس و نرمال شتاب.

پاسخ

از $\mathbf{r}$ مشتق می گیریم.

$$\mathbf{v} = 2t \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

و

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(2t)^2 + 1 + (2t)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$$

بر اساس شماره (۵)

$$a_T = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

برای محاسبه a_N می دانیم که

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \mathbf{i} + 2 \mathbf{k}$$

بطوری که

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

پس بر اساس (۶) داریم.

$$a_N = \sqrt{\|a\|^2 - a_T^2} = \sqrt{8 - \frac{64t^2}{8t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$

جهت های منحنی ها Orientations of Curves

هر پارامتریزه شده قطعه قطعه هموار $r = xi + yj + zk$ یک منحنی C در تمام نقاط C یک بردار مماس دارد، بجز تعداد محدودی از نقاط. چون جهت هر کدام از بردار های مماس در همان جهت منحنی است، پس می گوییم جهت r جهت C را مشخص می کند. تصویر L بردار های سیاه رنگ، بردار های مماس هستند.

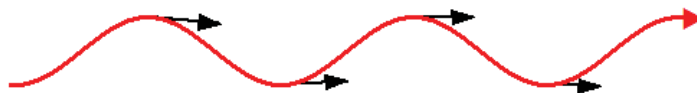


Figure L

همان طور که می توانیم در بزرگراه، در دو جهت حرکت کنیم، دو جهت هم برای منحنی های قطعه قطعه هموار وجود دارد. جهت تصویر M مخالف جهت تصویر L است. همان طور که ملاحظه می کنید جهت بردار های مماس هم عوض شدند.

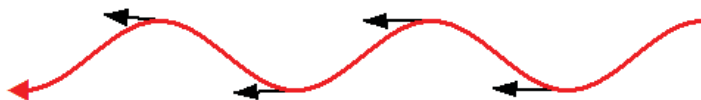


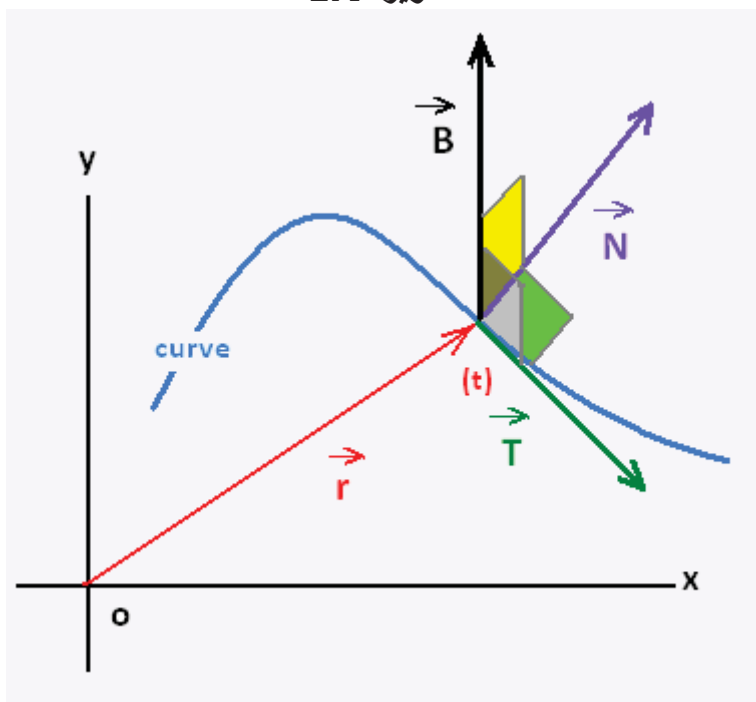
Figure M

بردار نرمال دوم یا قائم دوم Binormal Vector

نرمال دوم مطابق زیر تعریف می شود.

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

یعنی ضرب برداری مماس واحد و نرمال واحد. پس نرمال دوم هم بر بردار مماس عمود است و هم بر بردار نرمال. تصویر LM .

تصویر LM 

مثال ۷ - بردار نرمال دوم تابع برداری زیر را پیدا کنید.

$$r(t) = ti + \sin tj + \cos tk$$

پاسخ

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + \cos tj - \sin tk)$$

$$N(t) = -\sin tj - \cos tk$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + \cos tj - \sin tk)$$

تمرینات ۴.۵

در تمرینات زیر ابتدا نشان دهید که $\|r'(t)\|$ همان است که داده شده. سپس مماس و نرمال منحنی پارامتریزه شده r را پیدا کنید.

$$۱) \quad r(t) = (t^2 + 4i) + 2tj; \|r'(t)\| = 2\sqrt{t^2 + 1}$$

$$۲) \quad r(t) = \cos t i + \cos t j + \sqrt{2} \sin t k; \|r'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$۳) \quad r(t) = 2ti + t^2j + \frac{1}{3}t^3k; \|r'(t)\| = 2 + t^2$$

در تمرینات زیر مولفه مماس و نرمال شتاب را پیدا کنید. یعنی a_N و a_T

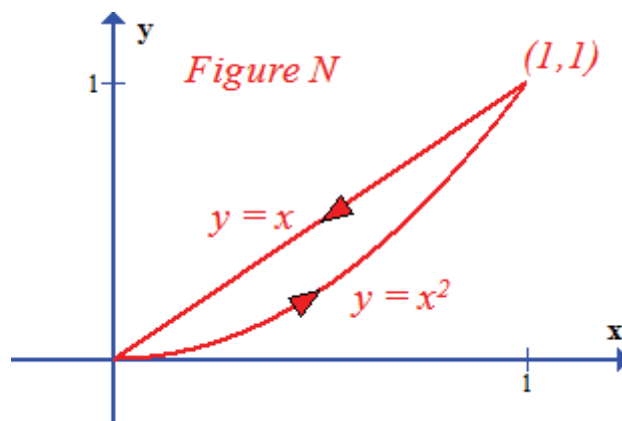
$$۴) \quad r(t) = r(t - \sin t)i + r(1 - \cos t)j$$

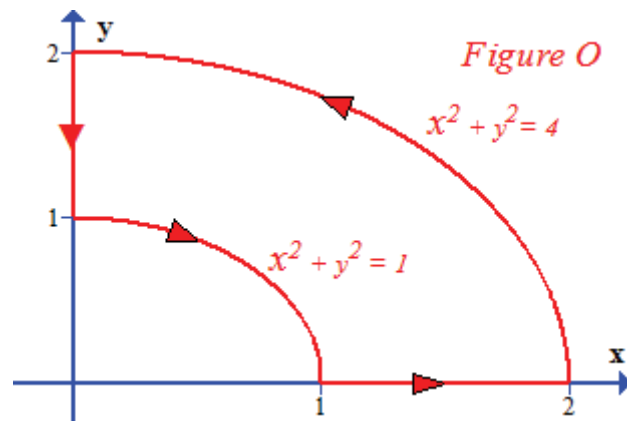
$$۵) \quad r(t) = 2ti + t^2j + \frac{1}{3}t^3k$$

در تمرینات زیر یک پارامتریزه شده قطعه قطعه هموار و اگر ممکن باشد، هموار، برای منحنی با جهت داده شده پیدا کنید.

۶ - نیم دایره در صفحه yz که از $(0,0,4)$ شروع می شود، از $(0,-4,0)$ می گذرد و به $(0,0,-4)$ ختم می شود.

۷ - منحنی تصویر N



۸ - منحنی تصویر O 

۹ - نرمال دوم هلیکس مثال ۵ را پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۴.۵

در تمرینات زیر ابتدا نشان دهید که $\|\mathbf{r}'(t)\|$ همان است که داده شده. سپس مماس و نرمال منحنی پارامتریزه شده $\mathbf{r}$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad \mathbf{r}(t) &= (t^2 + ۴)\mathbf{i} + ۲t\mathbf{j}; \|\mathbf{r}'(t)\| = ۲\sqrt{t^2 + ۱} \\
 \mathbf{r}'(t) &= ۲t\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} \\
 \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(۲t)^2 + ۲^2} = ۲\sqrt{t^2 + ۱} \\
 \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{۲t\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}}{۲\sqrt{t^2 + ۱}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + ۱}}\mathbf{i} + \frac{۱}{\sqrt{t^2 + ۱}}\mathbf{j} \\
 \mathbf{T}'(t) &= \frac{\sqrt{t^2 + ۱} - \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + ۱}}}{t^2 + ۱}\mathbf{i} - \frac{t}{(t^2 + ۱)^{3/2}}\mathbf{j} \\
 &= \frac{۱}{(t^2 + ۱)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{t}{(t^2 + ۱)^{3/2}}\mathbf{j} \\
 \|\mathbf{T}'(t)\| &= \sqrt{\frac{۱}{(t^2 + ۱)^3} + \frac{t^2}{(t^2 + ۱)^3}} = \frac{۱}{t^2 + ۱} \\
 \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{۱}{\sqrt{t^2 + ۱}}\mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{t^2 + ۱}}\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad \mathbf{r}(t) &= \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sqrt{۲}\sin t\mathbf{k}; \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{۲} \\
 \mathbf{r}'(t) &= -\sin t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \sqrt{۲}\cos t\mathbf{k} \\
 \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\sin t)^2 + \left(\sqrt{۲}\cos t\right)^2} = \sqrt{۲} \\
 \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{۲}}\mathbf{i} - \frac{\sin t}{\sqrt{۲}}\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{-\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-\sin t)^2} = 1$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k}$$

$$۳) \quad \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}; \|\mathbf{r}'(t)\| = 2 + t^2$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = 2 + t^2$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2}{2+t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{2+t^2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2+t^2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-4t}{(2+t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{2(2+t^2) - 4t^2}{(2+t^2)^2}\mathbf{j} + \frac{2t(2+t^2) - 2t^3}{(2+t^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{-4t}{(2+t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{4-2t^2}{(2+t^2)^2}\mathbf{j} + \frac{4t}{(2+t^2)^2}\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{1}{(2+t^2)^2} \sqrt{(-4t)^2 + (4-2t^2)^2 + (4t)^2}$$

$$= \frac{1}{(2+t^2)^2} \sqrt{16 + 16t^2 + 4t^4} = \frac{2}{2+t^2}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{-2t}{2+t^2}\mathbf{i} + \frac{2-t^2}{2+t^2}\mathbf{j} + \frac{2t}{2+t^2}\mathbf{k}$$

در تمرینات زیر مولفه مماس و نرمال شتاب را پیدا کنید. یعنی a_N و a_T

۴) $\mathbf{r}(t) = r(t - \sin t)\mathbf{i} + r(1 - \cos t)\mathbf{j}$

$$\mathbf{v} = r(1 - \cos t)\mathbf{i} + r \sin t\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{v}'\| = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = \sqrt{r^2(1 - \cos t)}$$

$$a_T = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{r^2 \sin t}{\sqrt{r^2(1 - \cos t)}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r \sin t \mathbf{i} + r \cos t \mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2$$

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^4 \sin^2 t}{r^2(1 - \cos t)}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2(1 - \cos^2 t)}{1 - \cos t}} \\ &= \frac{|r|}{\sqrt{1 - \cos t}} \sqrt{1 - \cos t} \end{aligned}$$

۵) $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{k}$

$$\mathbf{v} = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9t^2 + t^2} = \sqrt{4 + 10t^2}$$

$$a_T = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{10t}{\sqrt{4 + 10t^2}}$$

$$\mathbf{a} = 2 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4(1 + t^2)$$

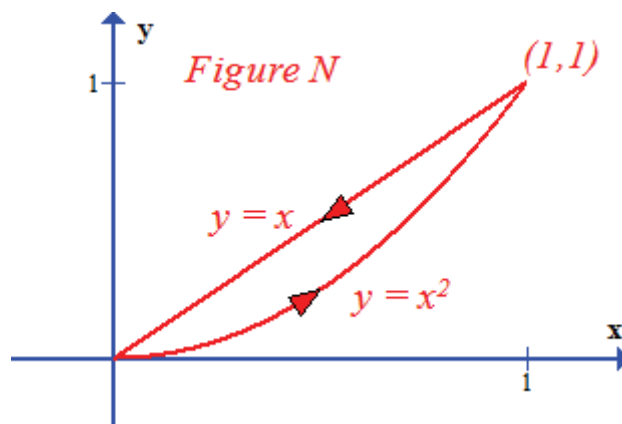
$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{4(1 + t^2) - \frac{100t^2}{4 + 10t^2}} = 2$$

در تمرینات زیر یک پارامتریزه شده قطعه قطعه هموار و اگر ممکن باشد ، هموار ، برای منحنی با جهت داده شده پیدا کنید.

۶ - نیم دایره در صفحه yz که از $(0,0,4)$ شروع می شود ، از $(0,-4,0)$ می گذرد و به $(0,0,-4)$ ختم می شود.
پاسخ

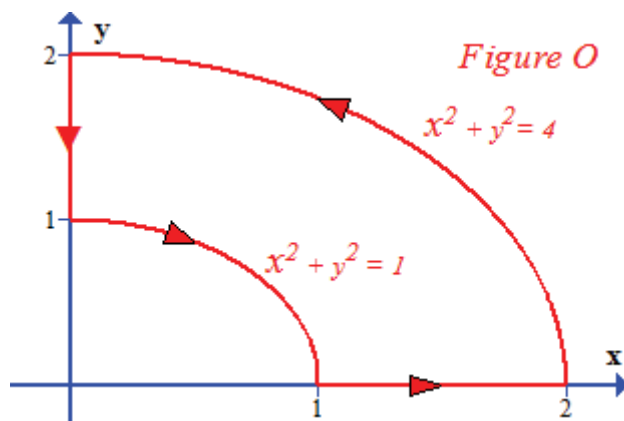
$$\mathbf{r}(t) = -4 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos t \mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

۷ - منحنی تصویر N



پاسخ

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} , & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j} , & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

۸ - منحنی تصویر O 

پاسخ

$$r(t) = \begin{cases} (t+1)i & , 0 \leq t \leq 1 \\ 2 \cos \frac{\pi}{4}(t-1)i + 2 \sin \frac{\pi}{4}(t-1)j & , 1 \leq t \leq 2 \\ (4-t)j & , 2 \leq t \leq 3 \\ \sin \frac{\pi}{4}(t-3)i + \cos \frac{\pi}{4}(t-3)j & , 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

۹ - نرمال دوم هلیکس مثال ۵ را پیدا کنید.

پاسخ

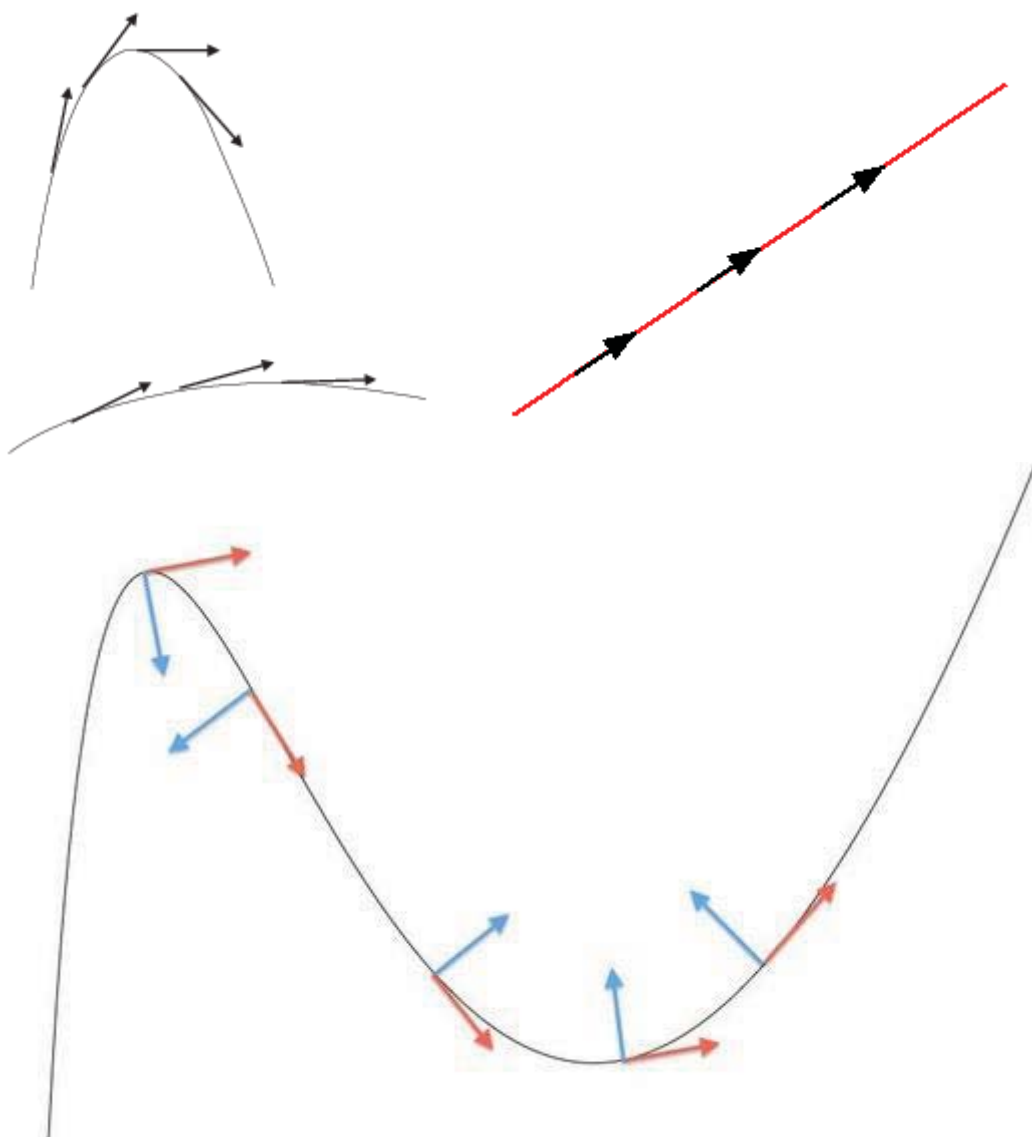
با استفاده از نتایج مثال ۵ داریم.

$$b = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin t & \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} \sin t i - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos t j + \frac{2}{\sqrt{13}} k$$

۴.۶ - خمیدگی یا انحنا Curvature

فرض می‌کنیم C یک منحنی هموار باشد. طول بردار مماس همیشه ۱ است. جهت بردار مماس از یک نقطه تا نقطه دیگر ممکن است تغییر کند. این بستگی به رفتار منحنی دارد. مثلاً اگر منحنی، یک خط مستقیم باشد، پس جهت بردار مماس ثابت است. همان طور که در تصویر زیر ملاحظه می‌کنید. اگر خمیدگی ملایم باشد، جهت بردار مماس هم کمی تغییر می‌کند. اما اگر خمیدگی منحنی زیاد باشد، جهت بردار مماس هم زیادتر تغییر می‌کند. همانطور که در تصاویر زیر ملاحظه می‌کنید.



تصاویر بالا نشان می‌دهد که نرخ یا میزان تغییر $\frac{dT}{ds}$ بردار مماس نسبت به تابع طول کمان s کاملاً بستگی به میزان پیچ و خم منحنی دارد. چون

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt}$$

پس

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|}$$

رابطه بالا ما را به تعریف انحنا زیر سوق می دهد.

تعریف خمیدگی Definition of Curvature

فرض می کنیم C یک پارامتریزه شده هموار $\mathbf{r}$ باشد، بطوری که $\mathbf{r}'$ مشتق پذیر باشد. پس خمیدگی C مطابق زیر تعریف می شود.

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|} \quad (۱)$$

بر اساس تعریف بالا $k(t)$ یک عدد نامنفی است. ممکن است $k(t)$ صفر باشد، در حقیقت انحنا یک خط مستقیم در تمام نقاط صفر است. چون بردار مماس ثابت است. همچنین به آسانی می توانیم انحنا یک دایره را مشخص کنیم.

مثال ۱ - نشان دهید که انحنا یک دایره به شعاع r مساوی $\frac{1}{r}$ است.

پاسخ

اگر مرکز دایره (x_0, y_0) باشد، پس دایره را مطابق زیر پارامتری می کنیم.

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + r \cos t)\mathbf{i} + (y_0 + r \sin t)\mathbf{j}$$

پس

$$\mathbf{r}'(t) = -r \sin t \mathbf{i} + r \cos t \mathbf{j}$$

همچنین

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = r \quad \text{و} \quad \mathbf{T}(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

پس بر اساس شماره (۱) داریم.

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{r} \|- \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}\| = \frac{1}{r}$$

پس دایره به شعاع r دارای انحنا ثابت $\frac{1}{r}$ است. از مثال ۱ نتیجه می گیریم که هر چه شعاع دایره بزرگ تر باشد، خمیدگی آن کمتر است. به همین علت در قدیم تصور می کردند که زمین صاف و

هموار است و خمیدگی ندارد. شعاع بزرگ زمین، باعث می شود که انسان روی زمین خمیدگی زمین را احساس نکند.

چون انحنای یک دایره به شعاع r مساوی $\frac{1}{r}$ است، پس شعاع انحنا Radius of Curvature یک منحنی C در نقطه P در رابطه با t مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

پس شعاع خمیدگی یک دایره، شعاع آن است. شعاع خمیدگی در مسائل مهندسی مهم است. نماد ρ که تلفظ می شود “رو” از حروف یونانی است برای r انگلیسی.

در مثال زیر، منحنی داده شده، انحنای متغیر دارد.

مثال ۲ – انحنای سهمی که مطابق زیر پارامتریزه شده است، پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

پاسخ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}}\mathbf{j}$$

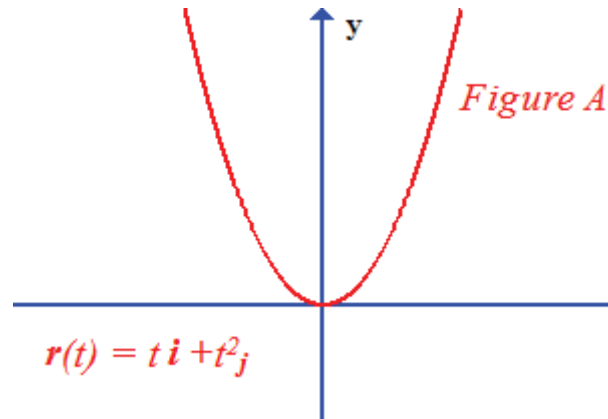
$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{-4t}{(1 + 4t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \frac{2}{1 + 4t^2}$$

و در نهایت

$$k(t) = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|} = \frac{\frac{2}{1 + 4t^2}}{(1 + 4t^2)^{1/2}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

ملاحظه می کند که انحنا سهمی هنگامی که $t = 0$ باشد، به حد اعلا می رسد و هنگامی که $|t|$ افزایش می یابد، انحنا نقصان می یابد. تصویر A و چون منحنی نسبت به محور y قرینه است، پس انحنا برای t و $-t$ یکسان است.



فرمول دیگری برای انحنا Alternative Formulas for Curvature

با استفاده از تجزیه بردارهای سرعت و شتاب به مولفه های مماس و نرمال، می توان فرمولی برای انحنا بدست آورد که از فرمول (۱) ساده تر است. فرض می کنیم r یک پارامتریزه شده هموار یک منحنی هموار C با بردار مماس T و بردار نرمال N باشد. فرمول های (۳) و (۴) بخش ۴.۵ به خاطر بیاورید که گفتیم.

$$v = \|v\|T \quad \text{و} \quad a = a_T T + a_N N$$

و چون $T \times T = 0$ است، پس

$$\begin{aligned} v \times a &= (\|v\|T) \times (a_T T + a_N N) \\ &= [(\|v\|T) \times (a_T T)] + [(\|v\|T) \times (a_N N)] \\ &= (\|v\|a_N)(T \times N) \quad (۲) \end{aligned}$$

چون بر اساس شماره (۵) بخش ۴.۵ داریم

$$a_N = \|v\| \left\| \frac{dT}{dt} \right\|$$

و چون T و N بردارهای واحد و متقابلاً بر هم عمود هستند، پس بر اساس شماره (۲) داریم.

$$\|v \times a\| = \|v\|a_N = \|v\|^2 \left\| \frac{dT}{dt} \right\|$$

اما

$$k = \frac{\left\| \frac{dT}{dt} \right\|}{\left\| \frac{dr}{dt} \right\|} = \frac{\left\| \frac{dT}{dt} \right\|}{\|v\|}$$

پس

$$k = \frac{\|v \times a\|}{\|v\|^3} \quad (۳)$$

مثال ۳ – با استفاده از فرمول (۳) انحنای منحنی زیر را پیدا کنید.

$$r(t) = \frac{1}{3}t^3 \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

پاسخ

$$v = \frac{dr}{dt} = t^2 \mathbf{i} + \sqrt{2}t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\|v\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j}$$

$$v \times a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & \sqrt{2}t & 1 \\ 2t & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} - \sqrt{2}t^2 \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \|v \times a\| &= \sqrt{\left(-\sqrt{2}t\right)^2 + (2t)^2 + \left(-\sqrt{2}t^2\right)^2} \\ &= \sqrt{2 + 4t^2 + 2t^4} = \sqrt{2}(t^2 + 1) \end{aligned}$$

$$k = \frac{\|v \times a\|}{\|v\|^3} = \frac{\sqrt{2}(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^3} = \frac{\sqrt{2}}{(t^2 + 1)^2}$$

در صورتی که شئی در صفحه xy حرکت کند، داریم.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$$

با محاسبه ضرب برداری در شماره (۳) فرمول زیر بدست می آید.

$$k = \frac{\left| \frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (۴)$$

اگر $x = t$ باشد، پس y هم تابع x است، پس

$$k = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (۵)$$

مثال ۴ - فرض کنید یک کمان سیکلوئید مطابق زیر توصیف شده باشد.

$$\mathbf{r}(t) = r(t - \sin t)\mathbf{i} + r(1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < 2\pi$$

با استفاده از شماره (۴) انحنا را پیدا کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin t) & y(t) &= r(1 - \cos t) \\ \frac{dx}{dt} &= r(1 - \cos t) & \frac{dy}{dt} &= r \sin t \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= r \sin t & \frac{d^2 y}{dt^2} &= r \cos t \\ k &= \frac{|r(1 - \cos t)(r \cos t) - (r \sin t)(r \sin t)|}{\left[[r^2(1 - \cos t)^2] + r^2 \sin^2 t \right]^{3/2}} \\ &= \frac{r^2(1 - \cos t)}{[r^2(2 - 2 \cos t)]^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2} r \sqrt{1 - \cos t}} \end{aligned}$$

تمرینات ۴.۶

با استفاده از شماره (۱)، انحنای منحنی ایجاد شده توسط $\mathbf{r}$ را پیدا کنید.

$$۱) \quad \mathbf{r}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$۲) \quad \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t\mathbf{k}$$

$$۳) \quad \mathbf{r}(t) = 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$$

در تمرینات زیر انحنای منحنی پارامتریزه شده توسط $\mathbf{r}$ را پیدا کنید.

$$۴) \quad \mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$$

$$۵) \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

در تمرین زیر با استفاده از شماره (۵) انحنای نمودار معادله داده شده را پیدا کنید.

$$۶) \quad y = \ln x$$

۷- نقطه ای را روی نمودار $y = e^x$ پیدا کنید که در آن انحنا حد اکثر ممکن است.

۸ - نشان دهید که مقدار انحنای هلیکس $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ثابت است.

در تمرین زیر ابتدا انحنای $\mathbf{r}$ را پیدا کنید و سپس شعاع انحنا را در مقدار داده شده t_0 پیدا کنید.

$$۹) \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}; t_0 = 1$$

پاسخ تمرینات ۴.۶

با استفاده از شماره (۱)، انحناى منحنی ایجاد شده توسط $\mathbf{r}$ را پیدا کنید.

$$۱) \quad \mathbf{r}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

پاسخ

بر اساس تمرین شماره ۱ بخش ۴.۵ داریم.

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{t^2 + 4}}{2\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{1}{2(t^2 + 4)^{3/2}}$$

$$۲) \quad \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t\mathbf{k}$$

پاسخ

بر اساس تمرین شماره ۲ بخش ۴.۵ داریم.

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$۳) \quad \mathbf{r}(t) = 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$$

پاسخ

بر اساس تمرین شماره ۳ بخش ۴.۵ داریم.

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\frac{2}{2+t^2}}{2+t^2} = \frac{2}{(2+t^2)^2}$$

در تمرینات زیر انحناى منحنی پارامتریزه شده توسط $\mathbf{r}$ را پیدا کنید.

$$۴) \quad \mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$$

پاسخ

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sqrt{2} \mathbf{j} \\
 \mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}t & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \mathbf{k} \\
 \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| &= \sqrt{2} \\
 k &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\delta) \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

پاسخ

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{i} + e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
 \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + 1} \\
 &= \sqrt{e^{2t}(\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t) + 1} \\
 &= \sqrt{2e^{2t} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = [e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t)]\mathbf{i} \\
 &\quad + [e^t(-\sin t - \cos t) + e^t(\cos t - \sin t)]\mathbf{j} \\
 &= \sqrt{2}e^t \cos t \mathbf{i} - \sqrt{2}e^t \sin t \mathbf{j} \\
 \mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t(\sin t + \cos t) & e^t(\cos t - \sin t) & 1 \\ \sqrt{2}e^t \cos t & -\sqrt{2}e^t \sin t & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \sqrt{2}e^t \sin t \mathbf{i} + \sqrt{2}e^t \cos t \mathbf{j} - \sqrt{2}e^{2t} \mathbf{k} \\
 \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| &= \sqrt{2}e^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (-e^2)^2} = \sqrt{2}e^t \sqrt{1 + e^{2t}} \\
 k &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}e^t (1 + e^{2t})^{1/2}}{(2e^{2t} + 1)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

در تمرین زیر با استفاده از شماره (۵) انحنای نمودار معادله داده شده را پیدا کنید.

۶) $y = \ln x$

پاسخ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2}} = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

۷ - نقطه ای را روی نمودار $y = e^x$ پیدا کنید که در آن انحنا حد اکثر ممکن است.

پاسخ

$$\frac{dy}{dx} = e^x = \frac{d^2t}{dx^2}$$

$$k = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{e^x (1 + e^{2x})^{3/2} - e^x \left(\frac{3}{2} \right) (1 + e^{2x})^{1/2} (2e^{2x})}{(1 + e^{2x})^3}$$

$$= \frac{e^x - 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^{5/2}} = \frac{e^x (1 - 2e^{2x})}{(1 + e^{2x})^{5/2}}$$

حالا، $\frac{dk}{dx} = 0$ است، اگر $1 - 2e^{2x} = 0$ باشد. و یا $x = -\frac{1}{2} \ln 2$

چون $\frac{dk}{dx} > 0$ است برای $x < -\frac{1}{2} \ln 2$ و $\frac{dk}{dx} < 0$ است برای $x > -\frac{1}{2} \ln 2$ پس k حد

اکثر مقدار دارد در $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

۸ - نشان دهید که مقدار انحنای هلیکس $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ثابت است.
پاسخ

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \\ \mathbf{a} &= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \\ k &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

پس انحنای هلیکس نامبرده، یک مقدار ثابت است.

در تمرین زیر ابتدا انحنای $\mathbf{r}$ را پیدا کنید و سپس شعاع انحنا را در مقدار داده شده t_0 پیدا کنید.

۹) $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{j}; t_0 = 1$

پاسخ

$$\begin{aligned}x &= t, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ y &= \frac{1}{3} t^3, \quad \frac{dy}{dt} = t^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2t \\ k &= \frac{\left| \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{2|t|}{(1+t^4)^{3/2}} \\ \text{برای } t_0 &= 1 \text{ داریم } k = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ بطوری که } \rho = \frac{1}{k} = \sqrt{2} \text{ است.}\end{aligned}$$

جلد سوم حسابان

فصل پنجم

مشتق های جزئی

Partial Derivatives

تا کنون تابع های یک متغیری را مورد بحث قرار داده ایم. هم تابع های حقیقی و هم تابع های برداری. اگر چه بیشتر حوادث طبیعی را می توان بوسیله تابع های یک متغیری توصیف کرد، اما مقادیری هم وجود دارند که وابسته به بیش از یک متغیر هستند. مثلا حجم یک مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع آن وابسته است.

۵.۱ - تابع های چند متغیری Functions of Several Variables

یک تابع برداری، عبارت است از تابعی که دامنه آن زیرمجموعه اعداد حقیقی است و برد آن زیر مجموعه بردار ها است. به عبارت دیگر، یک تابع برداری چند عدد حقیقی را گرفته و چند نقطه در صفحه و یا فضا بر می گرداند. یک تابع چند متغیر بر عکس تابع برداری کار می کند. یعنی چند نقطه در صفحه یا فضا گرفته و اعداد حقیقی بر می گرداند.

تعریف تابع چند متغیری Definition of a Function of Several Variables

یک تابع چند متغیری شامل دو قسمت است. یک دامنه **A Domain** که مجموعه ای از نقاط در صفحه یا در فضا است، و یک قاعده **A Rule** که برای هر یک از اعضای دامنه، فقط و فقط یک عدد اختصاص می دهد.

یک تابع دو متغیری **A Function of Two Variable** تابعی است که دامنه آن مجموعه ای از نقاط روی صفحه است

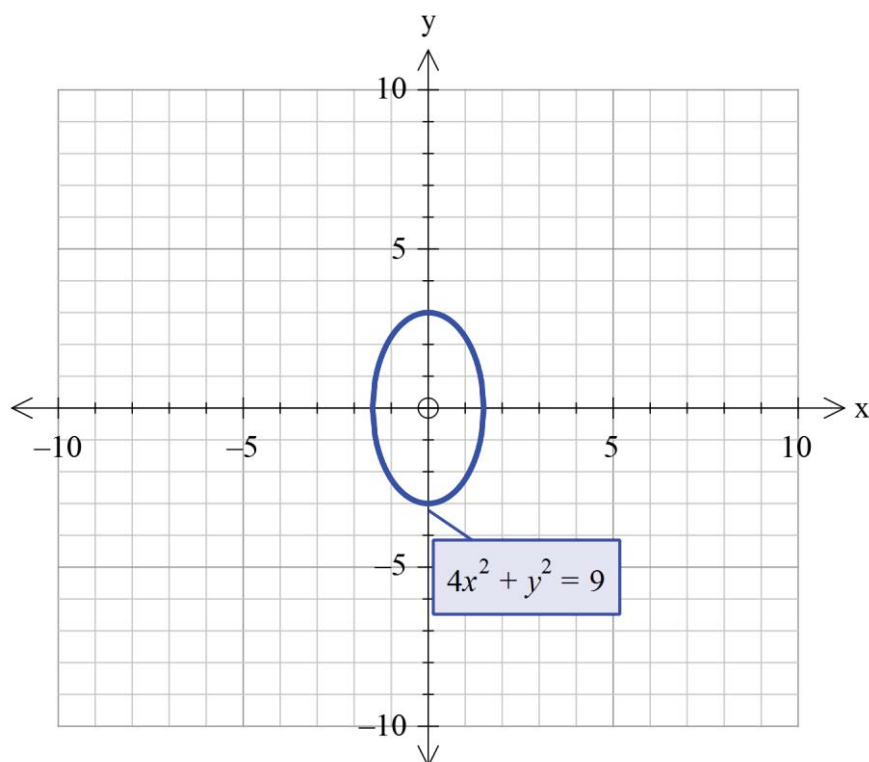
یک تابع سه متغیری **A Function of Three Variables** تابعی است که دامنه آن مجموعه ای از نقاط در فضا است.

یک تابع چند متغیری را معمولا با نماد f و یا g مشخص می کنیم. مقدار یک تابع دو متغیری را در یک نقطه (x, y) با نماد $f(x, y)$ مشخص می کنیم. مقدار یک تابع سه متغیری را در یک نقطه (x, y, z) با نماد $f(x, y, z)$ مشخص می کنیم.

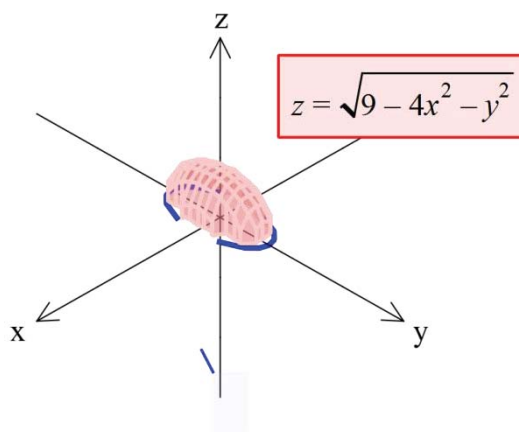
چند مثال

$$f(x, y) = \sqrt{9 - 4x^2 - y^2}$$

دامنه f شامل ناحیه ای در صفحه xy است که محدود شده بوسیله بیضی $4x^2 + y^2 = 9$ زیرا می دانیم که ریشه دوم فقط برای اعداد نا منفی تعریف شده است. در مثال بالا یک تابع دو متغیره داریم. پس همانطور که در بالا گفتیم، دامنه f در صفحه xy است. در تصویر زیر دامنه f را که یک بیضی است در صفحه xy ملاحظه می کنید.



در تصویر زیر همان تابع f را ملاحظه می کنید. باز هم دامنه به رنگ آبی در صفحه xy است و برد این تابع به رنگ صورتی در فضای سه بعدی ملاحظه می کنید.



اگر داشته باشیم

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

دامنه g شامل تمام نقاط (x, y, z) در فضا است. زیرا $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ است برای تمام نقاط (x, y, z) اما بر عکس اگر داشته باشیم

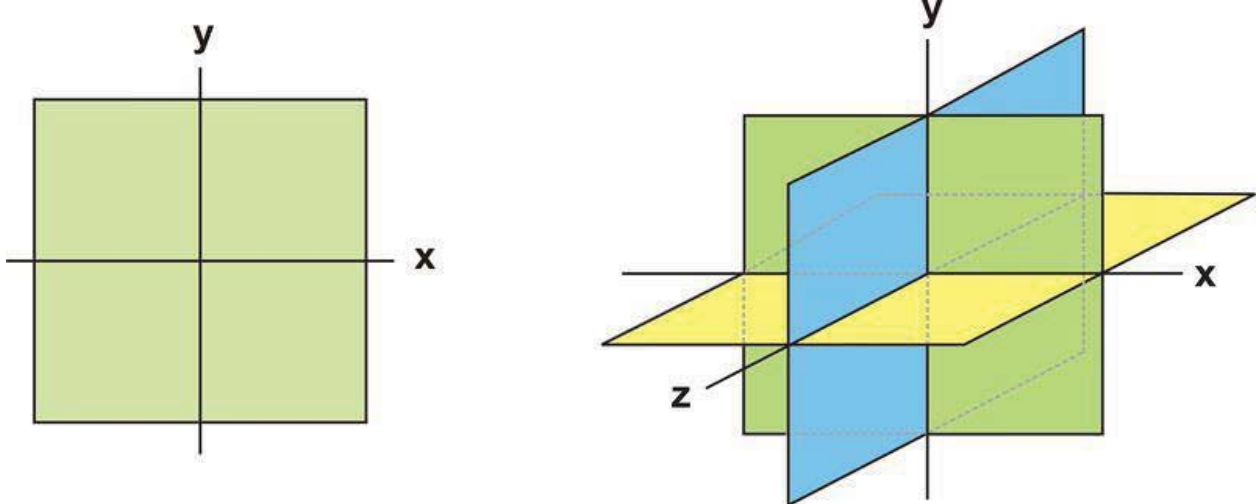
$$f(x, y, z) = xyz, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

دامنه f در یک هشتم اول است.

در همین بخش خواهیم دید که نمی توانیم نمودار تابع های سه متغیره را رسم کنیم، زیرا به چهار بعد نیاز داریم. پس نمودار این تابع ها را چگونه رسم کنیم؟ خواهیم دید

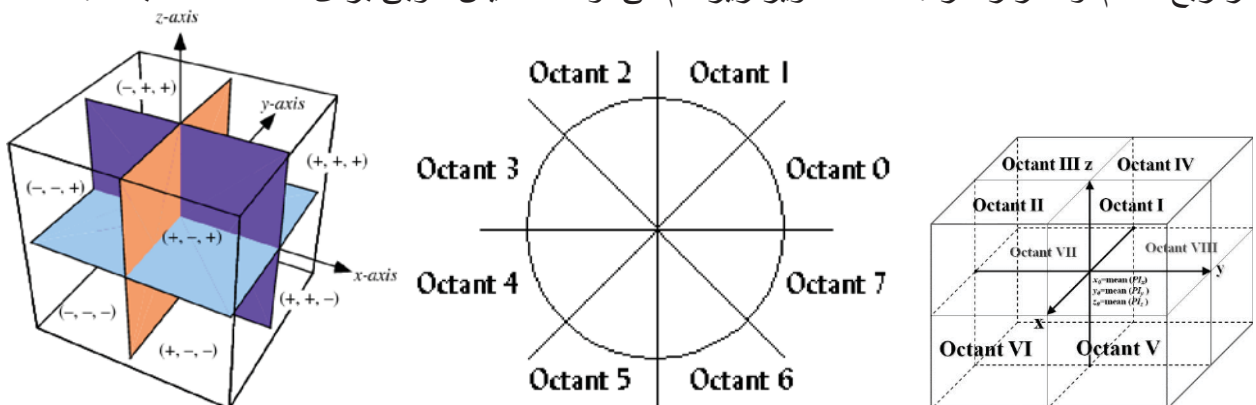
یک هشتم Octant

توضیح: می دانید که در فضای دو بعدی، محور های مختصات، صفحه را به چهار ربع صفحه یا Quadrant تقسیم می کند تصویر سمت چپ در ذیل



در فضای سه بعدی، سه محور داریم و این سه محور فضا را به سه صفحه تقسیم می کند، همان طور که در تصویر بالا سمت راست، سه صفحه ملاحظه می کنید. سه صفحه به رنگ های آبی، سبز و زرد.

و چون هر محور دو قسمت مثبت و منفی دارد، پس فضا، به $2^3 = 8$ قسمت و یا اکتانت تقسیم می شود. نامگذاری مشخصی وجود ندارد. می توان مثلا گفت اگر نقطه ای دارای $(+x, +y, +z)$ باشد در ربع هشتم اول قرار دارد. سه تصویر زیر هم می توانند نمایش خوبی برای هشت قسمت باشند.



اكتانت های هشت گانه را می توان به طریق زیر مشخص کرد.

$$(x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z), (x, -y, -z), (-x, y, z), (-x, -y, z), (-x, y, -z), (-x, -y, -z)$$

در ذیل ، چند تابع چند متغیری را نام می بریم.

$$۱) f(x, y) = xy, x \geq 0, y \geq 0$$

مساحت یک مستطیل

$$۲) f(x, y, z) = xyz, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

حجم یک مکعب مستطیل

$$۳) f(x, y, z) = ۲xy + ۲yz + ۲xz, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

سطح جانبی مکعب مستطیل

$$۴) f(x, y, z) = \frac{c}{x^2 + y^2 + z^2}, c > 0$$

مقدار نیروی جاذبه اعمال شده بوسیله خورشید واقع در مبدا ، بر یک جرم در نقطه (x, y, z)

$$۵) f(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}, c \in \mathbb{R}$$

قدرت میدان الکتریسته در (x, y, z) بواسطه یک سیم بی نهایت بلند که در امتداد محور z قرار دارد.

ترکیب تابع های چند متغیری Combinations of Functions of Several Variables

برای تابع های دو متغیری داریم.

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(f - g)(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

ترکیب تابع های سه متغیری هم مانند بالا است.

دامنه $f + g$ و $f - g$ و fg شامل نقاطی است که هم در دامنه f باشد و هم در دامنه g
 دامنه $\frac{f}{g}$ شامل نقاطی است که هم در دامنه f باشد و هم در دامنه g و در عین حال g در این دامنه
 صفر نشود.
 مثلاً اگر داشته باشیم

$$F(x, y) = axy + \frac{by}{x}$$

می توان تصور کرد که F مجموع دو تابع f و g است ، بطوری که مثلا

$$f(x, y) = axy \quad \text{و} \quad g(x, y) = \frac{by}{x}$$

باشد.

یک تابع دو متغیر x و y را **تابع چند جمله ای Polynomial Function** می نامند اگر آن تابع مجموع تابع هایی به شکل $cx^m y^n$ باشد و c یک عدد و m و n اعداد نامنفی باشند.

یک **تابع گویا A Rational Function** تابعی است که از خارج قسمت **Quotient** دو تابع چند جمله ای تشکیل شده باشد. مثلا

$$f(x, y) = 3x^2 y^2 + 4x^2 - 7y^2 + 3x + \sqrt{2}$$

و

$$g(x, y, z) = 4xyz^5 - 6$$

تابع های f و g تابع های چند جمله ای هستند.

$$h(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

و

$$k(x, y, z) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

تابع های h و k تابع های گویا هستند.

همچنین می توان از دو تابع چند متغیری ، یک **تابع مرکب Composite Function** ساخت . همان گونه که در تابع های یک متغیری دیدیم.

$$(f \circ g)(x, y) = g(f(x, y))$$

تابع مرکب بالا ، برای تمام (x, y) ها در دامنه f بطوری که $f(x, y)$ در دامنه g باشد ، صادق است . برای تابع مرکب سه متغیری هم همین طور تعریف می کنیم.

مثال ۱ - فرض می کنیم $F(x, y) = \sqrt{\ln(4 - x^2 - y^2)}$ باشد . یک تابع دو متغیر f و یک

تابع یک متغیری g پیدا کنید ، بطوری که $F = g \circ f$ باشد . دامنه F را پیدا کنید.

پاسخ

راه های مختلفی وجود دارد . مثلا می توان گفت

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2) \quad \text{و} \quad g(t) = \sqrt{t}$$

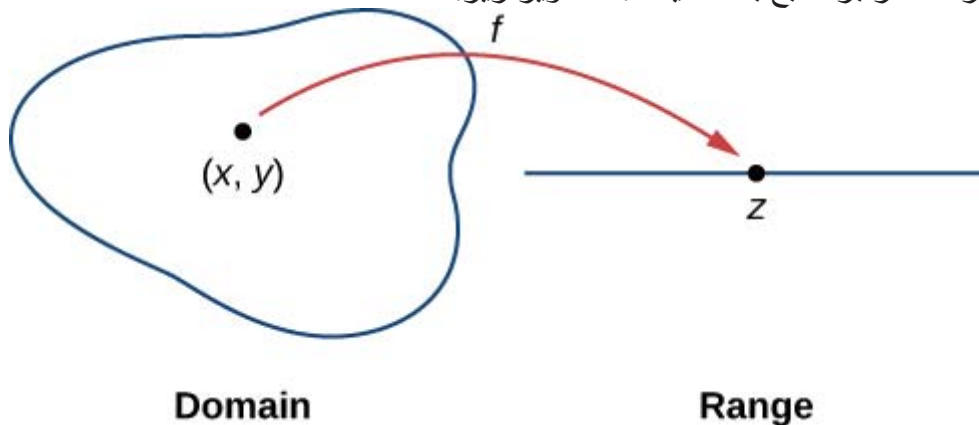
پس $F = g \circ f$ است . دامنه f شامل تمام (x, y) ها است ، بطوری که $4 - x^2 - y^2 > 0$ باشد . و دامنه g کلیه اعداد نامنفی است . لذا دامنه $g \circ f$ شامل کلیه (x, y) ها است ، بطوری که

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

باشد و $\ln(4 - x^2 - y^2) \geq 0$ باشد. چون $\ln(4 - x^2 - y^2) \geq 0$ اگر فقط $4 - x^2 - y^2 \geq 1$ باشد، پس نتیجه می گیریم که دامنه $F = g \circ f$ شامل کلیه (x, y) ها است، بطوری که $4 - x^2 - y^2 \geq 1$ یا $x^2 + y^2 \leq 3$ باشد.

نمودار های تابع های دو متغیری Graphs of Functions of Two Variables

نمودار یک تابع دو متغیری عبارت است از مجموع نقاط $(x, y, f(x, y))$ است، بطوری که (x, y) در دامنه تابع f است. متداول است که فرض کنیم $z = f(x, y)$ پس نمودار f شامل کلیه نقاط (x, y, z) است بطوری که $z = f(x, y)$ باشد. به عبارت ساده تر، یک تابع دو متغیری، یک دوگانه مرتب (x, y) در دامنه D گرفته و یک عدد منحصر به فرد z در برد تابع به ما میدهد. تصویر زیر.



برای رسم نمودار یک صفحه Plane مانند $f(x, y) = Ax + By + D$ معمولاً نقاط بر خورد نمودار با محور ها را پیدا می کنیم، و سپس نمودار مثلثی که این سه نقطه را به هم متصل می کند را رسم می کنیم. این مثلث، قسمتی از صفحه است که تصور خوبی به ما میدهد، که صفحه اصلی چگونه باید باشد.

مثال ۲ - نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y) = 8 - 2x - 4y$$

پاسخ

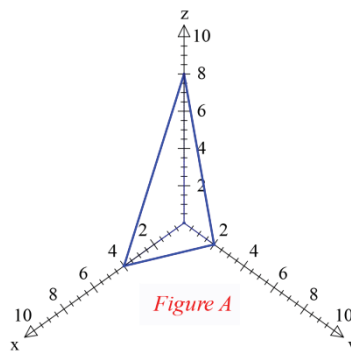
معادله را به صورت زیر می نویسیم.

$$z = 8 - 2x - 4y$$

این معادله یک صفحه است، که نقطه برخورد آن با محور ها مطابق زیر است.

$$x = 4, y = 2, z = 8$$

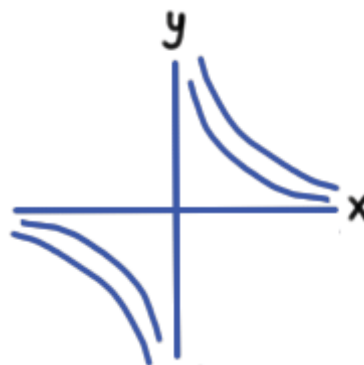
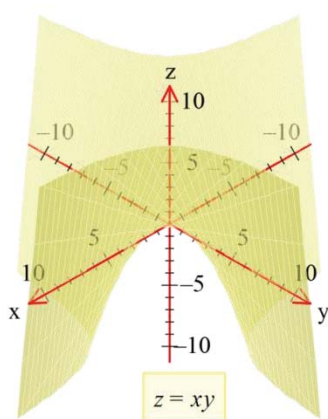
این نقاط را به یکدیگر متصل می کنیم. تصویر A



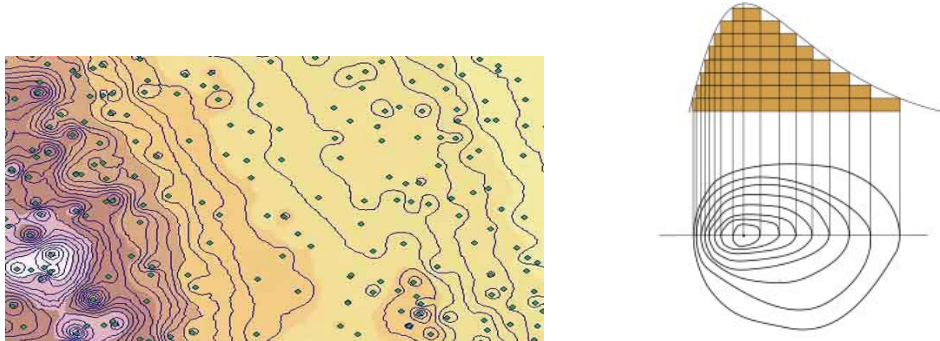
رسم نمودار یک تابع دو متغیری ، تا حدودی مشکل است ، مخصوصا رسم نمودار های درجه دوم به بالا. اینجا نظریه **منحنی تراز Level Curve** به ما کمک می کند که تشخیص دهیم ، نمودار اصلی باید چگونه باشد.

مجموعه نقاط (x, y) در صفحه xy بطوری که $f(x, y) = c$ باشد ، منحنی تراز f است. c هر عدد حقیقی می تواند باشد. این بستگی به نوع تابع دارد.

در مثال ۲ در بالا منحنی تراز $f(x, y) = c$ خطی است با معادله $2x + 4y = 8 - c$ در حقیقت ، منحنی تراز ، برش عرضی نمودار است. مثلا اگر داشته باشیم $f(x, y) = xy$ ، منحنی های تراز را پیدا می کنیم. برای این کار فرض می کنیم $xy = c$ باشد. حالا فرض می کنیم $c = 1$ باشد ، پس داریم $y = \frac{1}{x}$ حالا فرض می کنیم $c = 2$ باشد ، پس داریم $y = \frac{2}{x}$ تصویر سمت راست منحنی های تراز است و تصویر سمت چپ نمودار اصلی $f(x, y)$ است. فراموش نشود که گفتیم ، منحنی تراز در صفحه xy است.



منحنی تراز یا منحنی میزان به انگلیسی Contour Line یا Level Curve در یک نقشه توپو گرافی منحنی است که همه نقاط هم ارتفاع زمین را به هم وصل می کند. منحنی های میزان همدیگر را قطع نمی کنند.



مثال ۳ - نمودار تابع زیر را رسم کنید. و منحنی های تراز را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

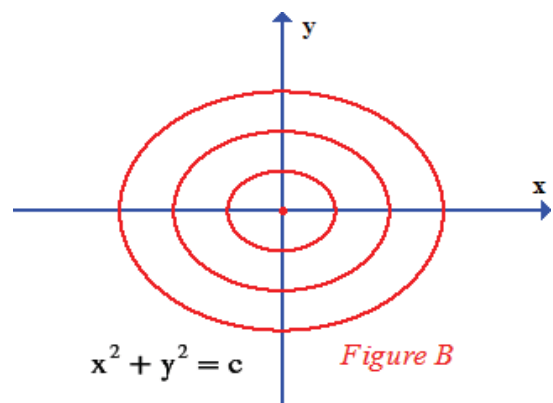
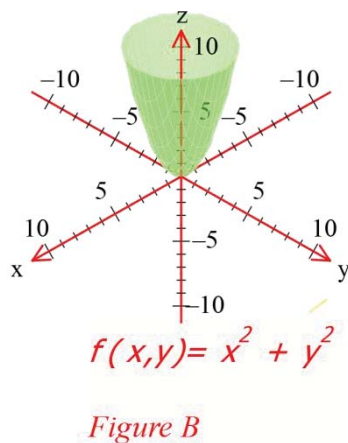
پاسخ

اگر $c > 0$ باشد، پس منحنی تراز $f(x, y) = c$ مطابق زیر است.

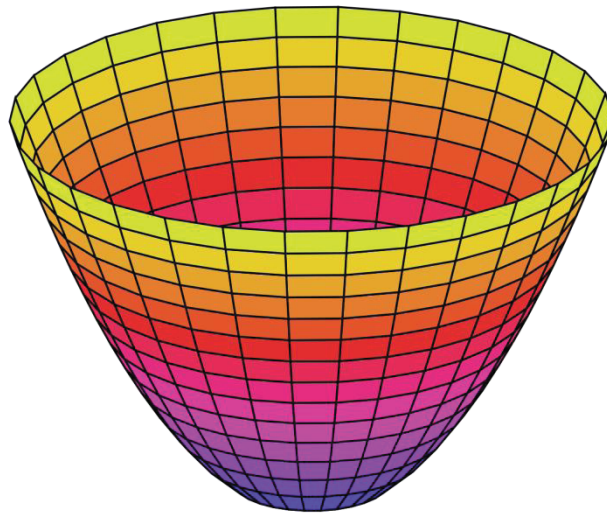
$$x^2 + y^2 = c$$

که یک دایره است با شعاع $\sqrt{c}$. پس اثر نمودار در صفحه $z = c$ هم یک دایره است با شعاع $\sqrt{c}$. منحنی تراز $f(x, y) = 0$ نقطه $(0, 0)$ است. برای $c < 0$ منحنی تراز $f(x, y) = c$ شامل هیچ نقطه ای نیست. می دانید چرا؟

محل های تلاقی نمودار با صفحه های $x = 0$ و $y = 0$ هر دو سهمی هستند. نمودار در تصویر B ملاحظه می کنید. سمت راست منحنی های تراز است و سمت چپ نمودار اصلی



در تصویر زیر سهمی ها و دایره های مشخص است.



مثال ۴- نمودار تابع زیر را رسم کنید. و منحنی های تراز را مشخص کنید.

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

پاسخ

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad (1)$$

دو طرف معادله را به توان دو می رسانیم و x و y را تغییر مکان می دهیم. پس داریم.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

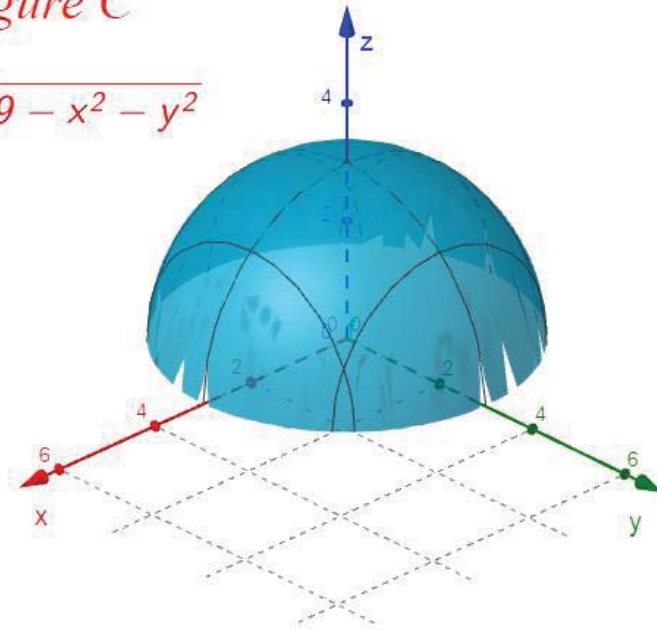
معادله بالا ، معادله یک کره است که مرکز آن در مبدا مختصات قرار دارد. و شعاع آن ۳ است.

چون معادله شماره (۱) فقط برای $z \geq 0$ برقرار است ، پس نتیجه می گیریم که نمودار f یک نیمکره است. تصویر C

منحنی تراز $f(x, y) = c$ یک دایره است اگر $0 \leq c < 3$ باشد و نقطه $(0,0)$ است اگر $c = 3$ باشد.

Figure C

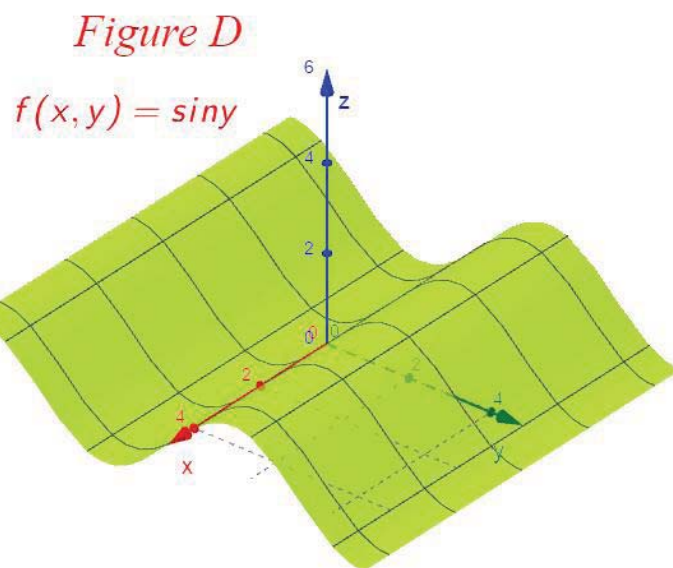
$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$



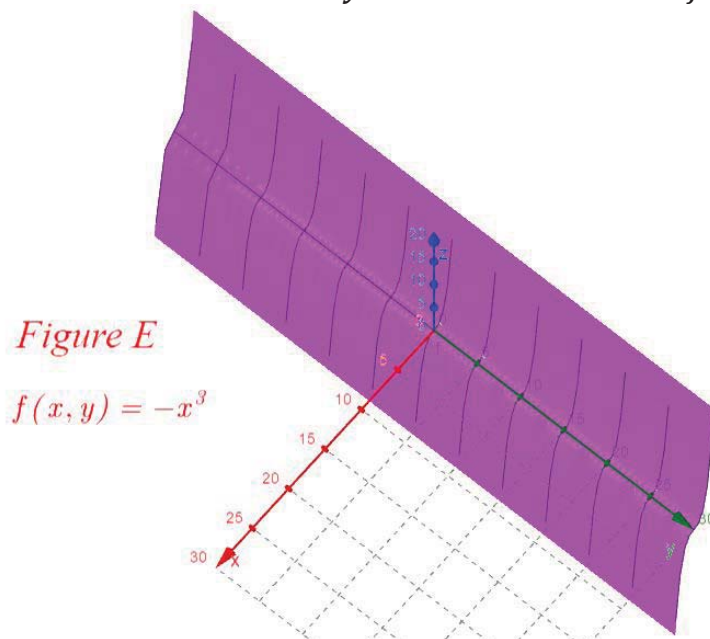
مثال ۵ - نمودار $f(x, y) = \sin y$ را رسم کنید.

پاسخ

چون معادله f مستقل از x است، پس اگر $(0, y, \sin y)$ یک نقطه روی نمودار باشد، تمام خط که از $(0, y, \sin y)$ می گذرد و موازی محور x است، روی نمودار است. پس تمام جسم هندسی توسط منحنی سینوس در صفحه yz مشخص می شود. تصویر D

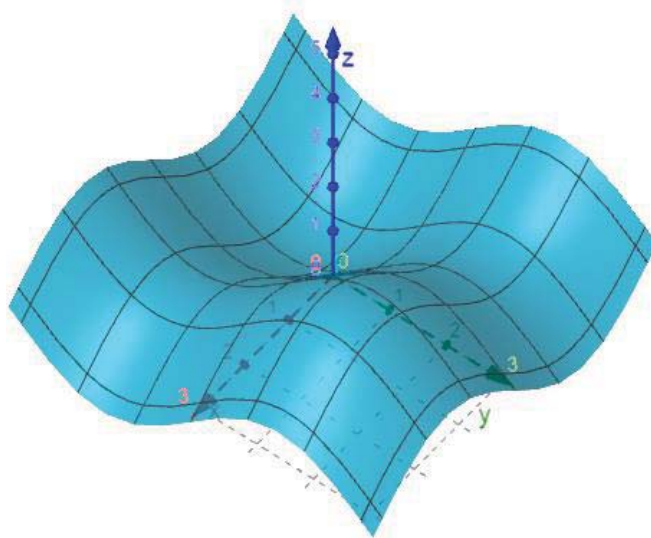


نمودار یک تابع مانند مثال ۵ را یک ورقه **A Sheet** و یا یک ورقه موازی محور x می نامیم.
 نمودار تابع $f(x, y) = -x^3$ یک ورقه موازی محور y است. تصویر E



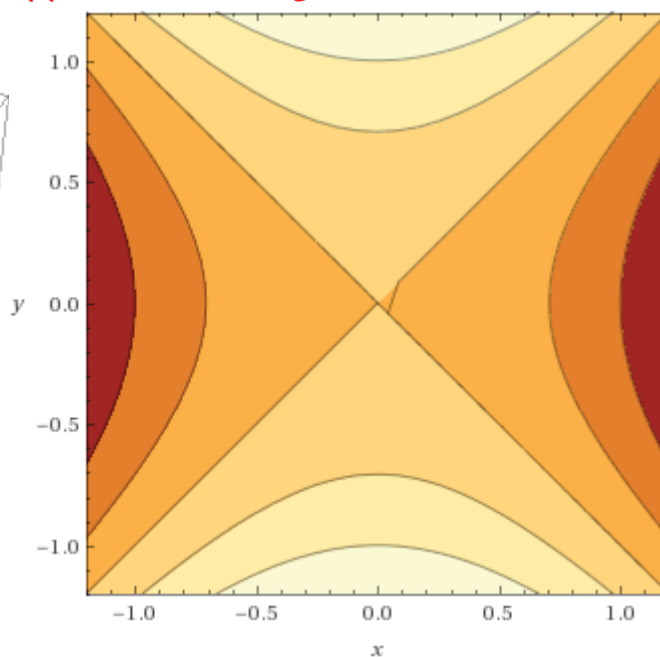
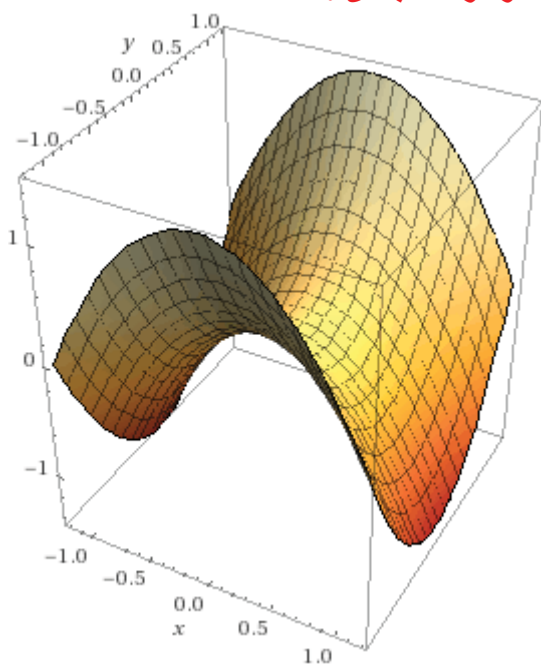
رسم نمودار های مثال های ۵ - ۲ تا حدودی آسان بود. اما رسم نمودار بسیاری از تابع های دو متغیری به اسانی امکان پذیر نیست. یک نمونه در ذیل می آوریم.

$$f(x,y) = \sin x + \sin y$$



$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

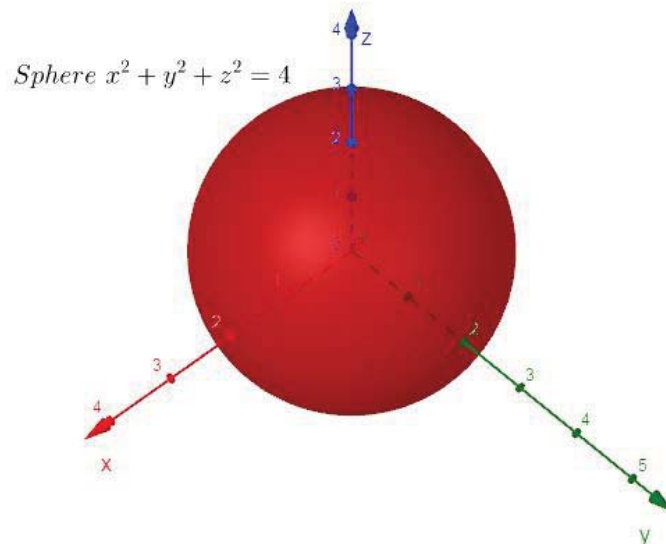
در تصویر زیر سمت راست ، منحنی تراز است و سمت چپ نمودار سه بعدی .



سطح ها یا رویه های تراز Level Surfaces اگر چه می توانیم نمودار بسیاری از تابع های دو متغیری را رسم کنیم ، اما غیر ممکن است بتوانیم نمودار تابع های سه متغیری را رسم کنیم ، زیرا برای این کار سیستم چهار بعدی لازم است. اما از طریق سطوح تراز Level Surfaces می توانیم اطلاعات مفیدی در مورد تابع های سه متغیره بدست آوریم. اگر f یک تابع سه متغیره باشد ، برای هر عدد c مجموعه نقاط (x, y, z) بطوری که $f(x, y, z) = c$ باشد ، یک سطح تراز f می نامیم و سطح تراز را با معادله $f(x, y, z) = c$ نشان می دهیم. سطح تراز برای تابع های سه متغیری مانند منحنی تراز در تابع های دو متغیری است. مثلا اگر $f(x, y, z)$ نمایش دمای نقطه (x, y, z) باشد ، آنگاه سطح تراز $f(x, y, z) = c$ سطحی است که دمای تمام نقاط آن مقدار ثابت c است. در بخش های قبل ، به سه نوع سطح های تراز بر خورد کرده ایم. یکی از آنها ، کره است که مرکز آن مبدا محور های مختصات باشد. کره ، سطح تراز تابع زیر است.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

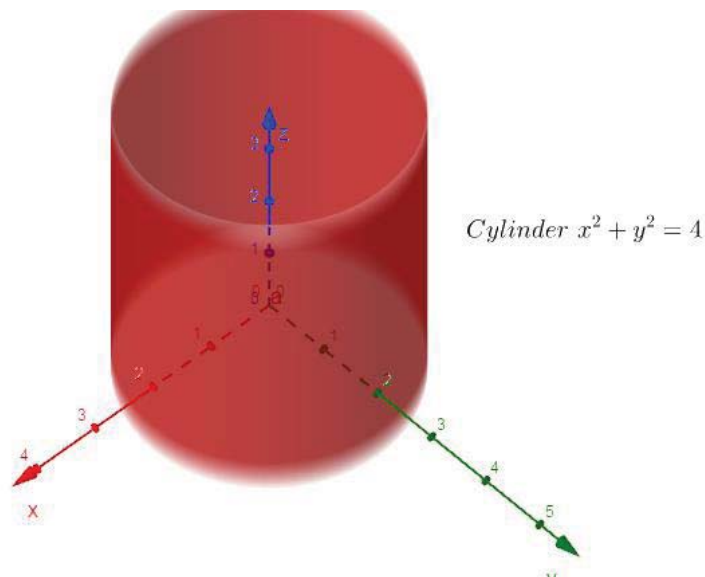
زیرا $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ معادله یک کره است برای $c \neq 0$ ، تصویر زیر



دوم. هر استوانه که محور آن محور z باشد، یک سطح تراز برای تابع زیر است.

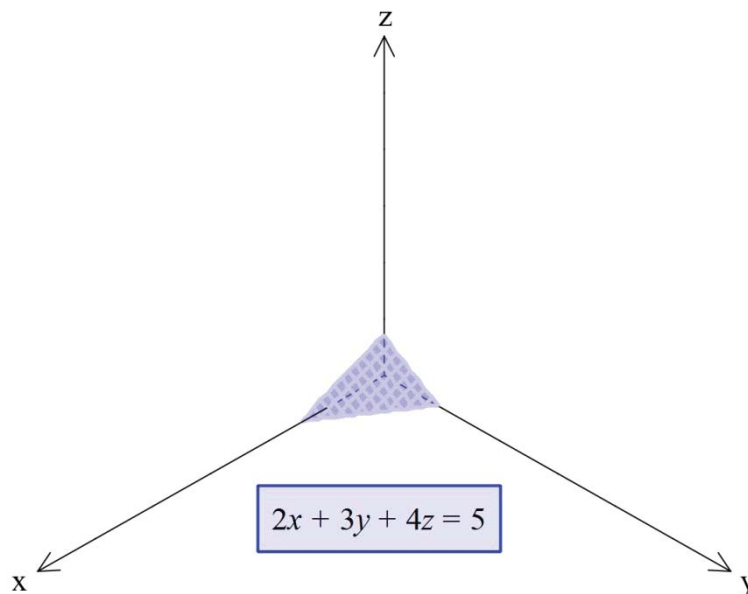
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

زیرا $x^2 + y^2 = c^2$ معادله یک استوانه است اگر $c \neq 0$ باشد. تصویر زیر



و در نهایت ، صفحه ها ، سطح های تراز تابع های زیر هستند.

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$
 به شرطی که a, b, c همگی صفر نباشند. تصویر زیر.



همچنین می توان گفت که نمودار هر تابع دو متغیری ، یک سطح تراز است. فقط لازم است فرض کنیم.

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

همچنین توجه داشته باشید که $g(x, y, z) = 0$ است ، اگر فقط و فقط $z = f(x, y)$ باشد.

پس سطح تراز $g(x, y, z) = 0$ نمودار f است. به همین جهت، نمودار یک تابع دو متغیری را یک سطح یا رویه **A Surface** می نامیم. هنگام رسم یک سطح تراز، از محل تلاقی سطح تراز با صفحه های $x = c$ یا $y = c$ و همچنین $z = c$ استفاده می کنیم. در هر کدام از این حالت ها، محل تلاقی سطح تراز با صفحه را، اثر **Trace** سطح تراز در آن صفحه می نامیم. مهم ترین سطوح تراز، سطوح درجه دوم هستند.

سطح های درجه دوم Quadratic Surfaces

یک سطح درجه دوم یک سطح تراز تابع چند جمله ای به شکل زیر است.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$$

سطح های درجه دوم، ۹ گروه هستند. در گروه بندی زیر اعداد ثابت a, b, c مثبت هستند.

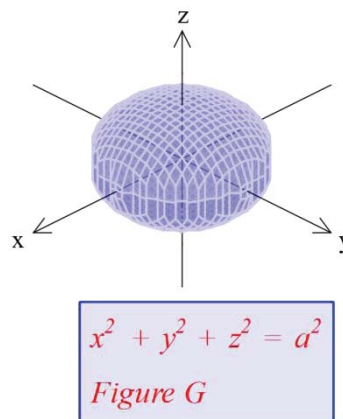
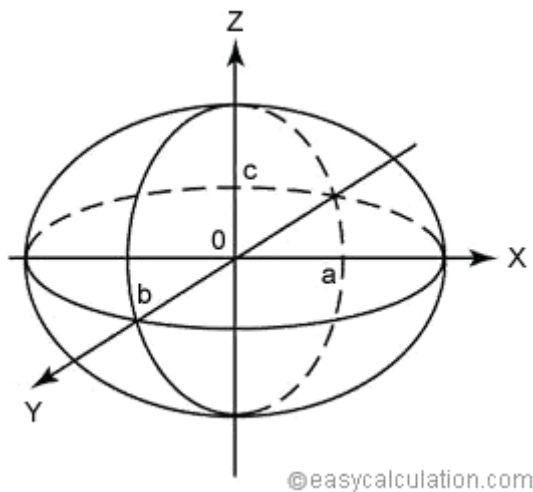
گروه اول

بیضی وار Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

اثر بیضی وار در هر صفحه ای موازی صفحه مختصات یا یک بیضی، یا یک نقطه، یا مکان خالی است. تصویر F اگر $a = b = c$ باشد، پس معادله می شود $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و لذا، صفحه، یک کره است. تصویر G .

تصویر F

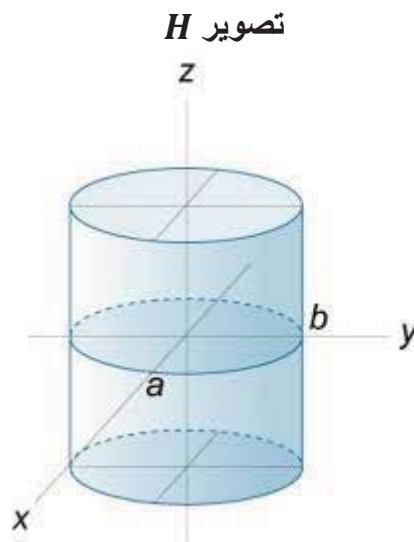


گروه دوم

استوانه بیضوی Elliptic Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

اثر استوانه بیضوی در هر صفحه موازی صفحه $z = 0$ بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است. تصویر H اگر $a = b$ باشد، صفحه، یک استوانه مدور **Circular Cylinder** است. تصویر صفحه ۲۹۵

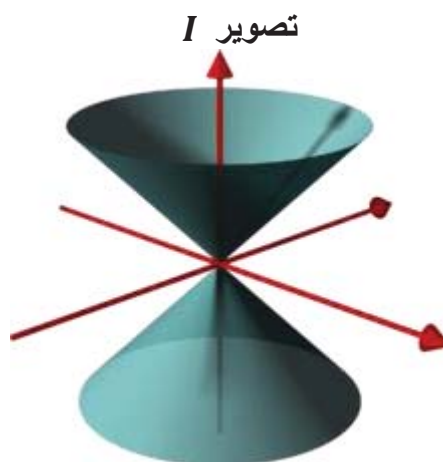


گروه سوم

استوانه بیضوی مضاعف **Elliptic Double Cone**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

اثر مخروط در هر صفحه ای موازی صفحه xy یا یک بیضی است (یک دایره اگر $a = b$ باشد) و یا یک نقطه است تصویر I

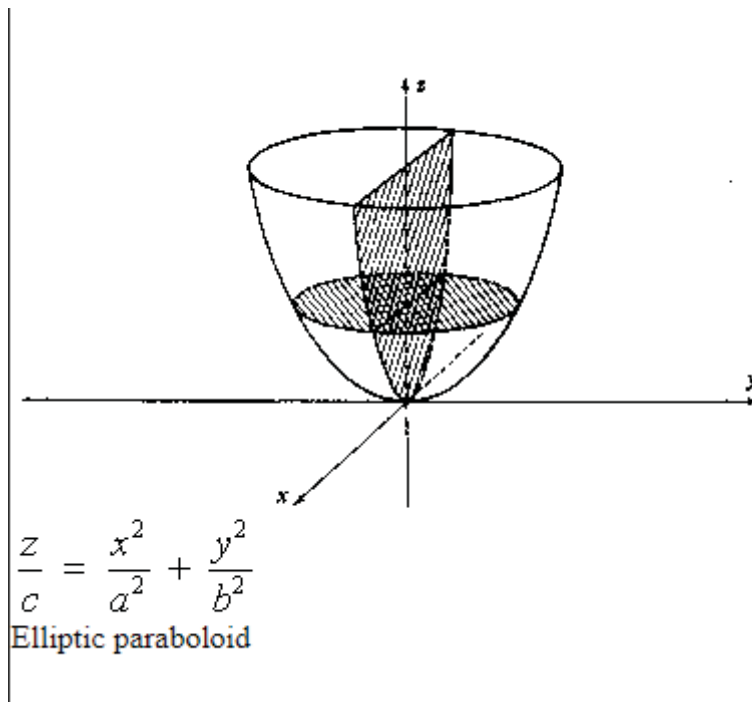


اثر، در صفحه های $x = 0$ و $y = 0$ شامل دو خط است که از مبدا می گذرند. اگر $a = b$ باشد، سطح را استوانه مدور مضاعف **Elliptic Double Cone** می نامند.

گروه چهارم سهمی وار بیضی گون Elliptic Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

اثر سهمی وار در هر صفحه ای موازی صفحه xy یا بیضی است (دایره اگر $a = b$ باشد) و یا یک نقطه یا تهی. اثر در صفحات $x = 0$ و $y = 0$ ، سهمی هستند، تصویر J



اگر $a = b$ باشد، سطح را سهمی وار مدور Circular Paraboloid می نامند. تصویر B در مثال ۳.

گروه پنجم

استوانه سهمی گون Parabolic Cylinder

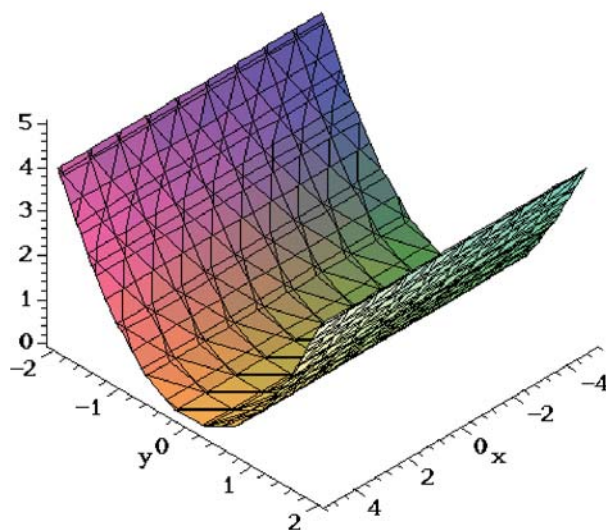
یا

ورقه سهمی گون Parabolic Sheet

$$z = ax^2$$

اثر ورقه در صفحه $y = 0$ سهمی $z = ax^2$ است، تصویر K .

تصویر K

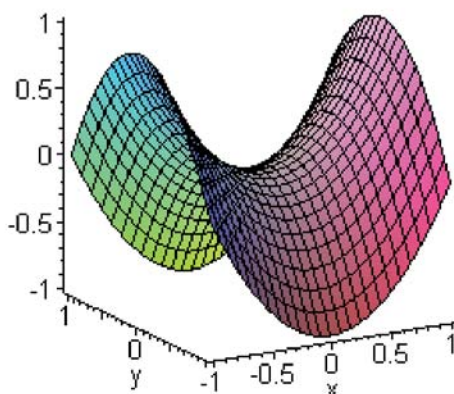


گروه ششم

سهمی وار هذلولی گون Hyperbolic Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

اثر ها در صفحه های $x = 0$ و $y = 0$ ، سهمی هستند. در صفحه $x = 0$ به طرف بالا باز می شود و در صفحه $y = 0$ به طرف پایین باز می شود. تصویر L

تصویر L 

اثر در صفحه $z = 0$ شامل دو خط متقاطع است. اثر در صفحه های موازی xy ، سهمی است. سطح ، شکل یک زین اسب است.

گروه هفتم

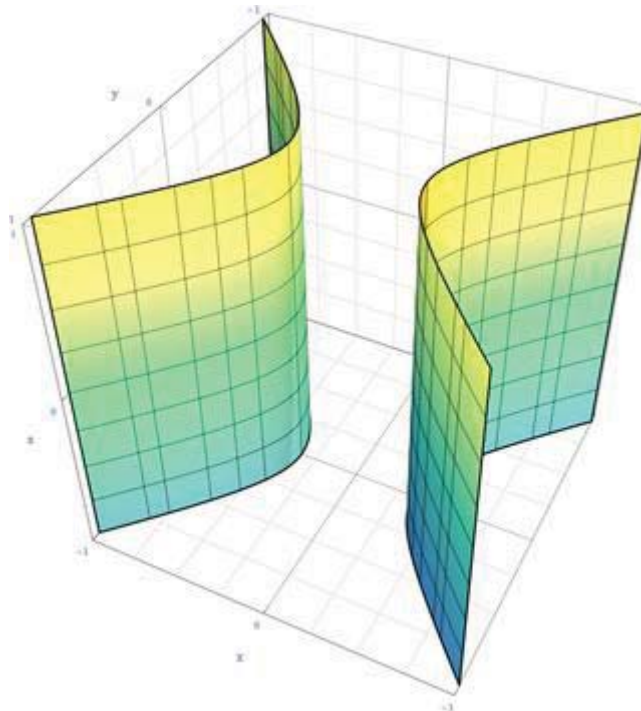
استوانه هذلولی گون Hyperbolic Cylinder

یا

Two Hyperbolic Sheets دو ورقه هذلولی گون

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

اثر در هر صفحه ای موازی صفحه xy هذلولی $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ است. تصویر M

تصویر M 

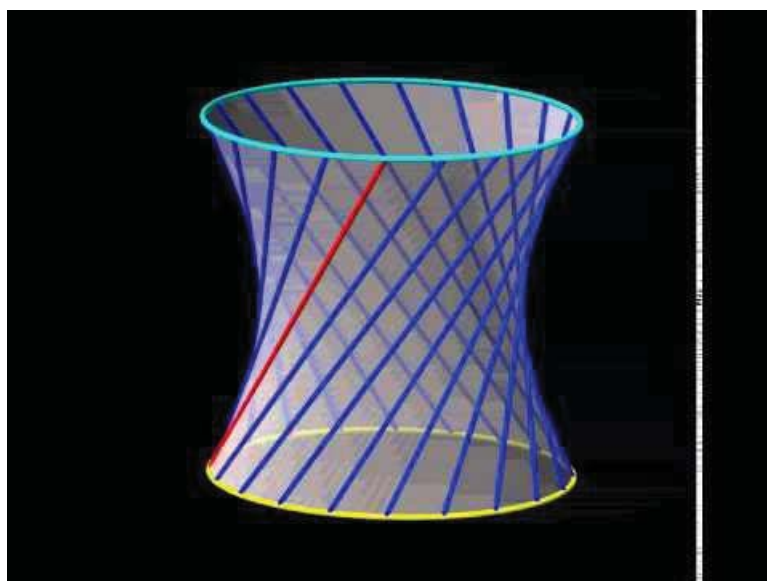
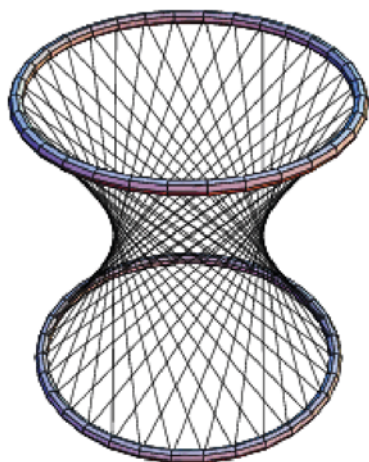
گروه هشتم

Hyperboloid of One Sheet هذلولی گون یک ورقه ای

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

اثر در صفحه $x = 0$ و $y = 0$ هذلولی هستند. اثر در هر صفحه ای موازی صفحه xy یک بیضی است و اگر $a = b$ باشد، یک دایره. تصویر N

تصویر N



گروه نهم

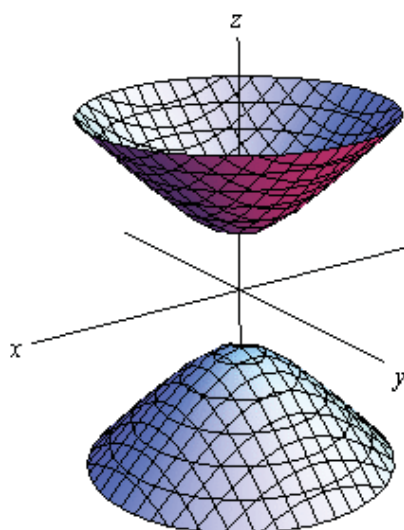
هذلولی گون دو ورقه ای Hyperboloid of Two Sheets

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

اثر در هر صفحه ای موازی صفحه yz یا xz هذلولی است و اثر در هر صفحه ای موازی صفحه xy یک بیضی است (اگر $a = b$ باشد، یک دایره) یک نقطه و یا فضای خالی. تصویر

• 0

تصویر 0



تمرینات ۵.۱

در تمرینات زیر دامنه تابع را پیدا کنید.

$$۱) f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$۲) f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

$$۳) g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

$$۴) f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

$$۵) f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$۶) g(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

در تمرینات زیر منحنی تراز $f(x, y) = c$ را رسم کنید.

$$۷) f(x, y) = 3x - y; c = 2, 3$$

$$۸) f(x, y) = x^2 + 4y^2; c = 1, 4$$

$$۹) f(x, y) = x^2 - y^2; c = -1, 0, 1$$

در تمرینات زیر نمودار f را رسم کنید.

$$۱۰) f(x, y) = x + 2y$$

$$۱۱) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$۱۲) f(x, y) = x^{1/3}$$

در تمرینات زیر نمودار معادله را رسم کنید.

$$۱۳) x = -3$$

$$۱۴) x^2 + 1$$

$$۱۵) x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$۱۶) x = \sqrt{y^2 + 4z^2}$$

در تمرینات زیر رویه تراز $f(x, y, z) = c$ را رسم کنید.

$$۱۷) f(x, y, z) = 2x - 4y + z; c = -1$$

$$۱۸) f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2; c = 1$$

$$۱۹) f(x, y, z) = z - 1 - x^2 - y^2; c = 2$$

در تمرینات زیر سطح درجه دوم را رسم کنید.

$$۲۰) x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

$$۲۱) y^2 + z^2 = 9$$

$$۲۲) x = y^2 + \frac{z^2}{4}$$

$$۲۳) x^2 = 9y^2 + 4z^2$$

$$۲۴) x = z^2 + 3$$

$$۲۵) x = 4z^2 - y^2$$

$$۲۶) z^2 - y^2 = 9$$

$$۲۷) 4x^2 + y^2 - z^2 = 16$$

$$۲۸) x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$$

در تمرینات زیر یک تابع f با دو متغیر و یک تابع g با یک متغیر پیدا کنید بطوری که داشته باشیم.

$$F = g \circ f$$

$$۲۹) F(x, y) = \ln(x^2 + 6y)$$

$$۳۰) F(x, y) = x^2 y^2 + 5xy + 1$$

۳۱ - ارتفاع یک استوانه مدور راست را به صورت تابع حجم و شعاع آن بنویسید.

سطح جانبی یک جعبه مستطیل شکل بدون درب به صورت تابع اضلاع x, y, z بنویسید.

پاسخ تمرینات ۵.۱

در تمرینات زیر دامنه تابع را پیدا کنید.

۱) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y) بطوری که $x \geq 0$ و $y \geq 0$ باشد.

۲) $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y) بطوری که $x \neq 0$ و $y \neq 0$ باشد.

۳) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y) بطوری که $x^2 + y^2 \geq 25$ باشد.

۴) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y) بطوری که $x + y \neq 0$ باشد.

۵) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y, z) بطوری که $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد.

۶) $g(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

پاسخ

دامنه شامل کلیه نقاط (x, y, z) بطوری که $x \neq 0$ و $y \neq 0$ و $z \neq 0$ باشد.

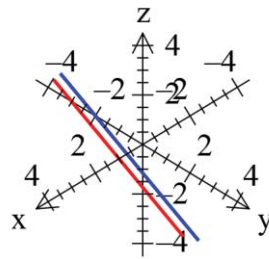
در تمرینات زیر منحنی تراز $f(x, y) = c$ را رسم کنید.
یاد آوری :

مجموعه نقاط (x, y) در صفحه xy بطوری که $f(x, y) = c$ باشد ، منحنی تراز f است.

۷) $f(x, y) = 3x - y; c = 2, 3$

آبی رنگ $f(x, y) = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$

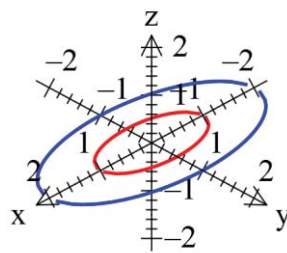
قرمز رنگ $f(x, y) = 3 \Rightarrow y = 3x - 3$



۸) $f(x, y) = x^2 + 4y^2; c = 1, 4$

قرمز رنگ $f(x, y) = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1$

آبی رنگ $f(x, y) = 4 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$

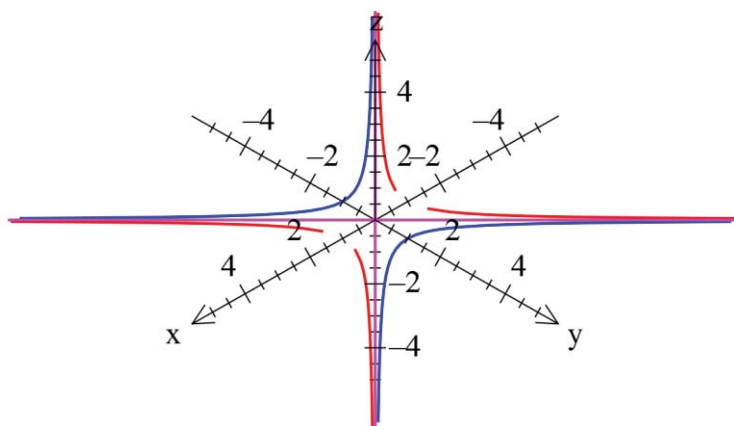


۹) $f(x, y) = x^2 - y^2; c = -1, 0, 1$

آبی رنگ $f(x, y) = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 1}$

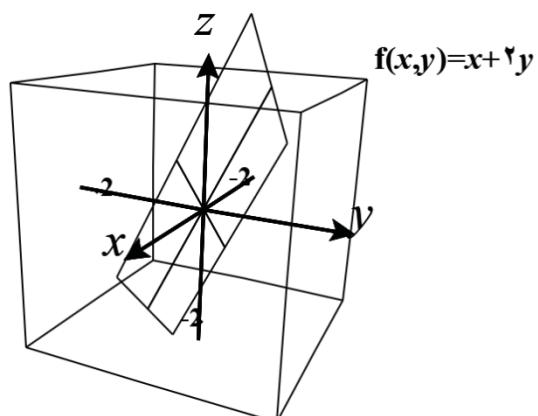
صورتی رنگ $f(x, y) = 0 \Rightarrow y = \pm x$

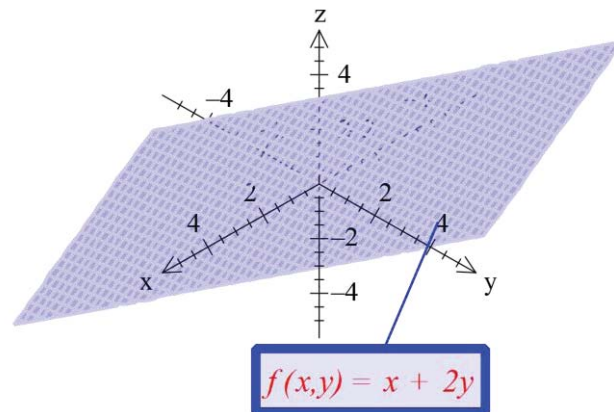
$$f(x, y) = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{قرمز رنگ}$$



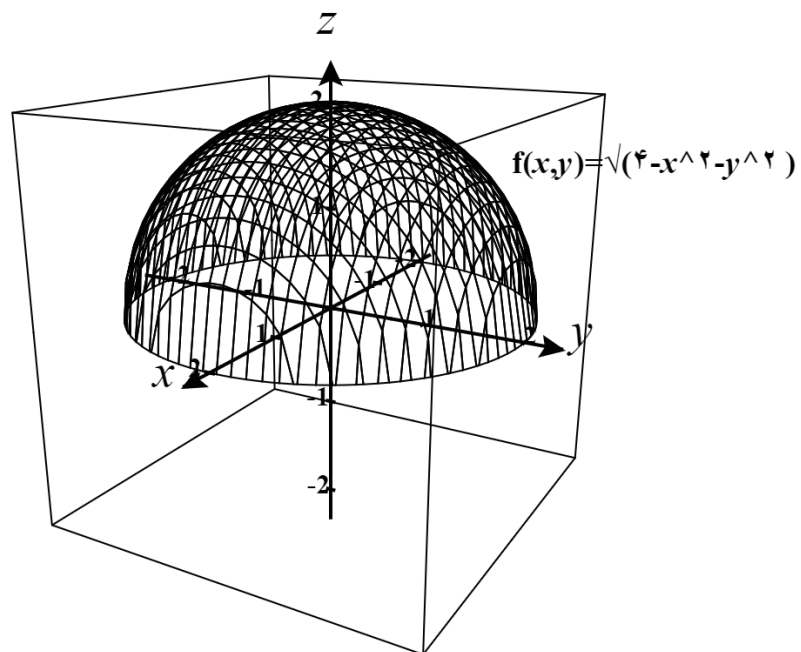
در تمرینات زیر نمودار f را رسم کنید.

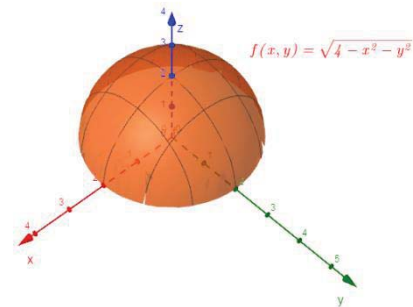
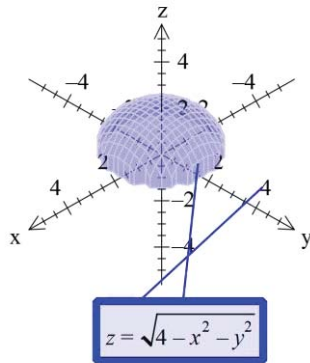
$$۱۰) f(x, y) = x + y^2$$



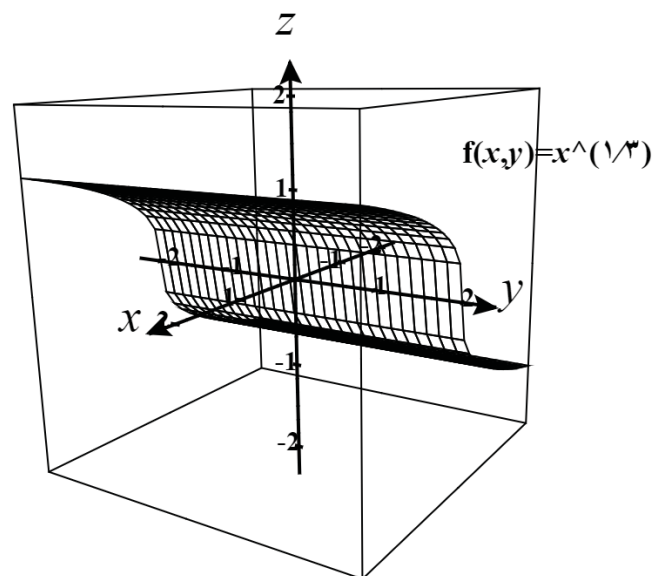


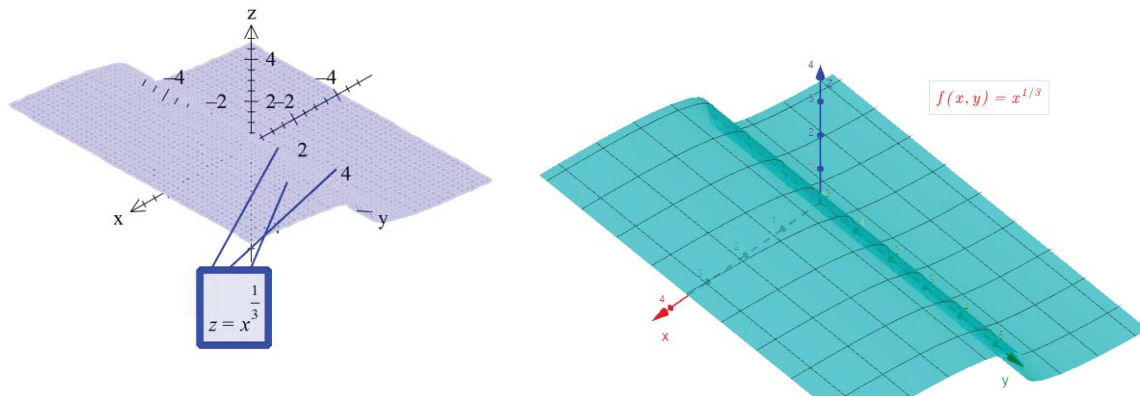
$$۱۱) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$





۱۲) $f(x, y) = x^{1/3}$

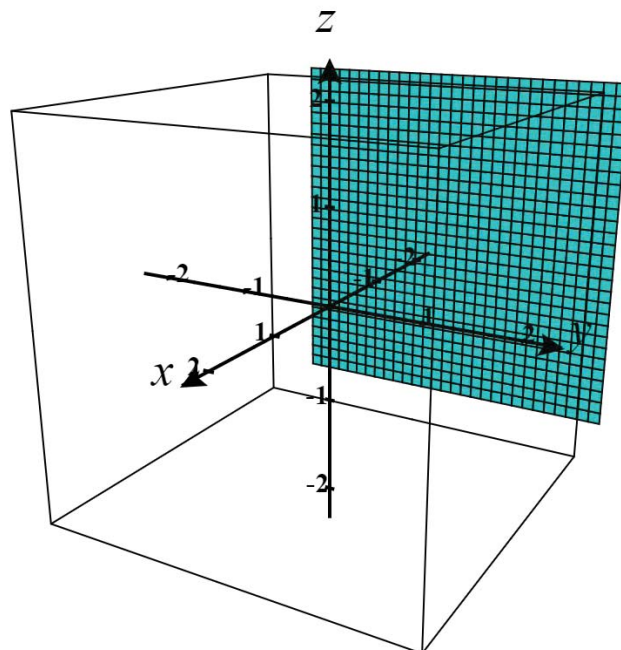


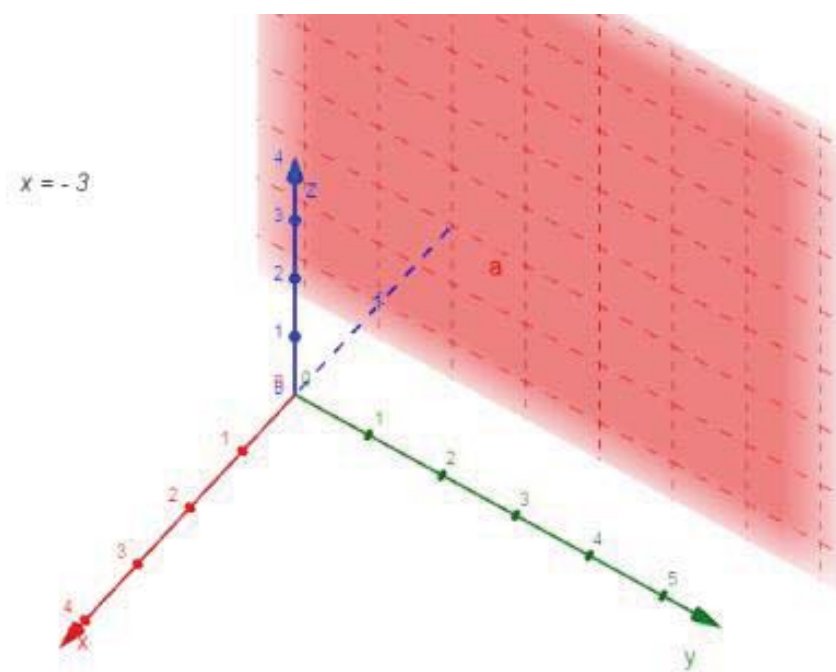


در تمرینات زیر نمودار معادله را رسم کنید.

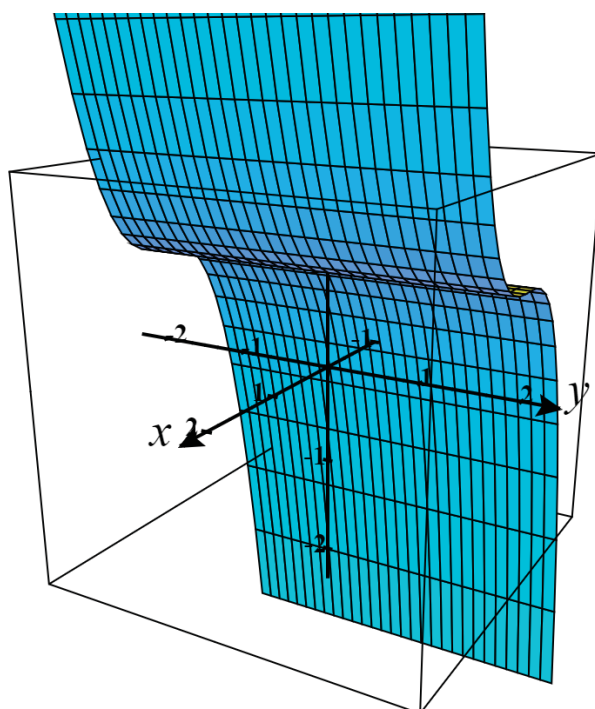
۱۳) $x = -۳$

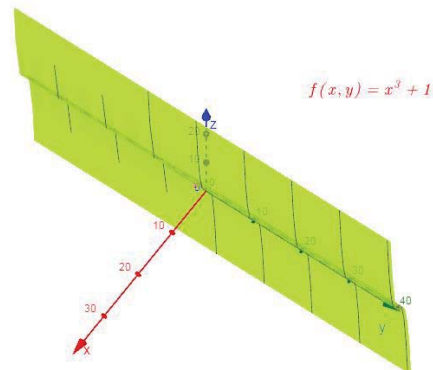
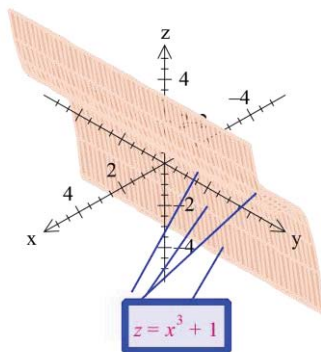
$$x = -۳ \Rightarrow f(y, z) = -۳$$





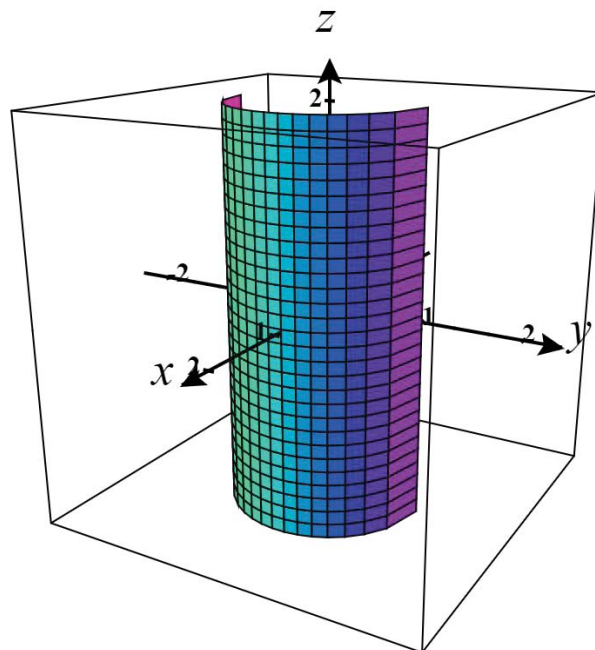
$$۱۴) x^3 + ۱$$





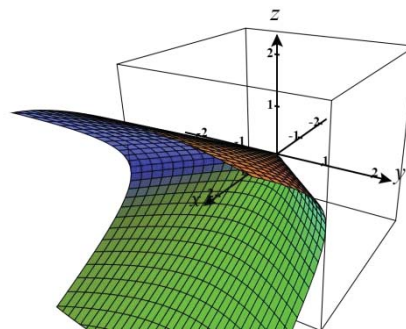
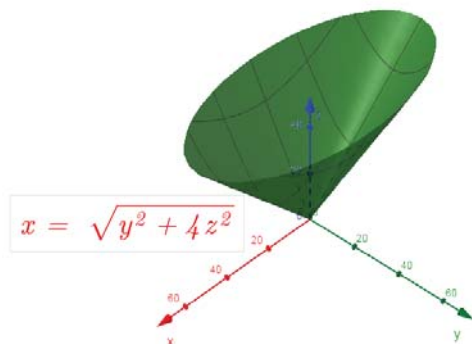
$$۱۵) \quad x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$x = \sqrt{1 - y^2} \quad \Rightarrow \quad f(y, z) = \sqrt{1 - y^2}$$



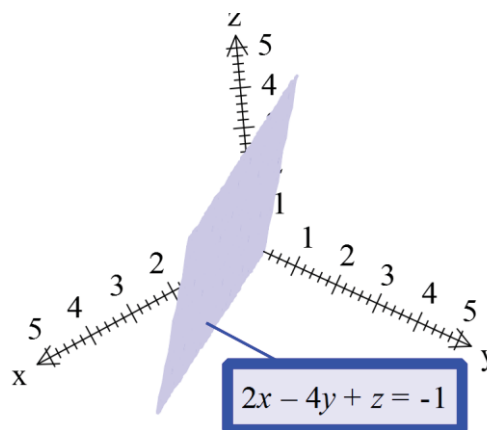
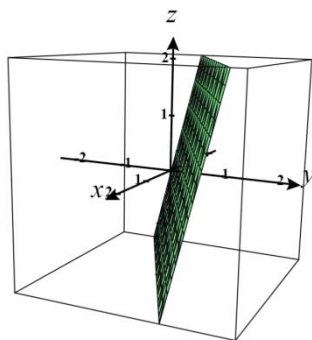
$$۱۶) x = \sqrt{y^2 + 4z^2}$$

$$x = \sqrt{y^2 + 4z^2} \Rightarrow f(y, z) = \sqrt{y^2 + 4z^2}$$

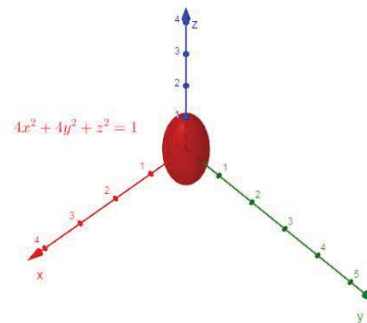
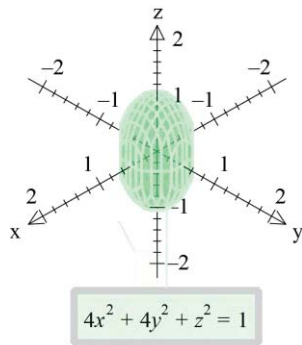


در تمرینات زیر رویه تراز $f(x, y, z) = c$ را رسم کنید.

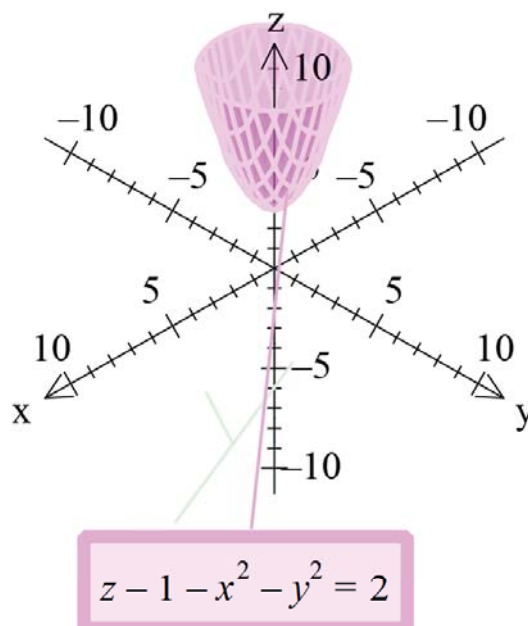
$$۱۷) f(x, y, z) = 2x - 4y + z; c = -1$$



$$۱۸) f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2; c = 1$$

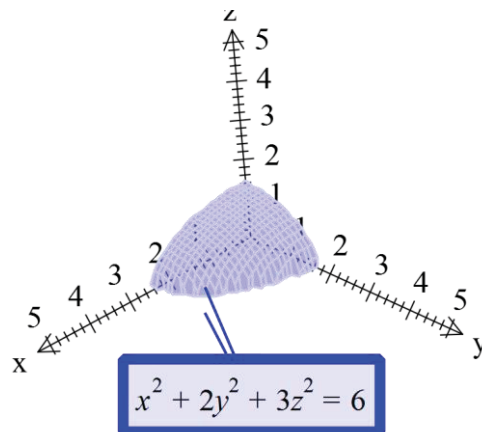
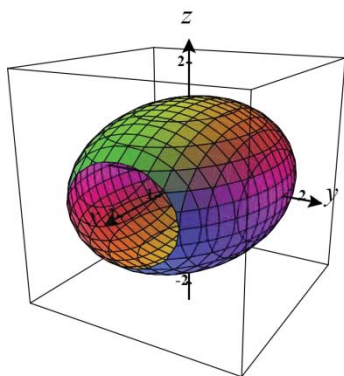


$$۱۹) f(x, y, z) = z - 1 - x^2 - y^2; c = 2$$

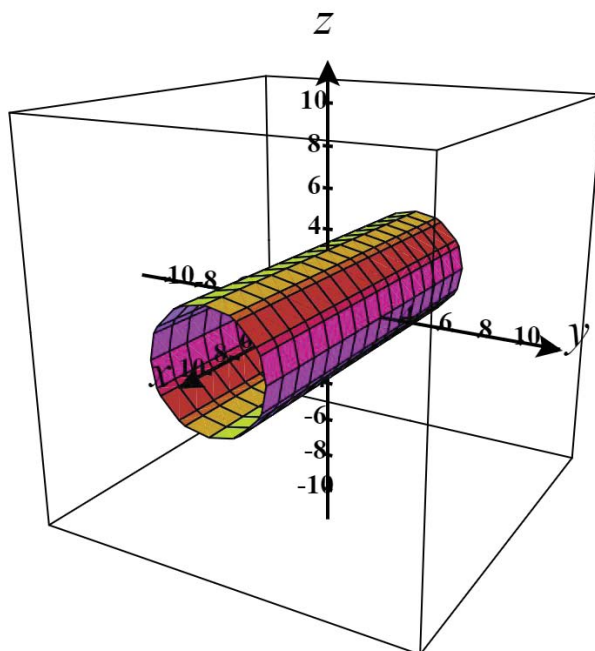


در تمرینات زیر سطح درجه دوم را رسم کنید.

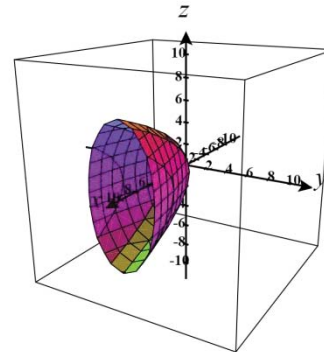
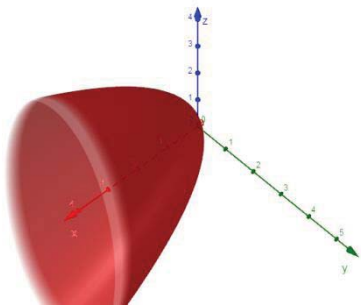
۲۰) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$



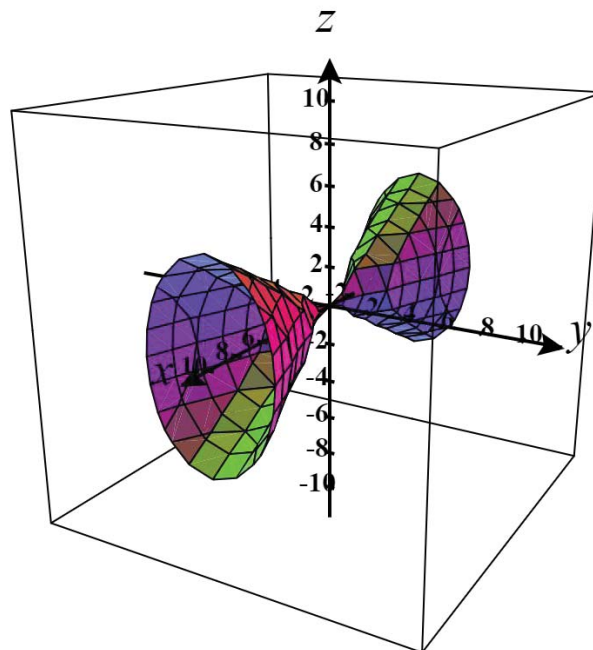
۲۱) $y^2 + z^2 = 9$



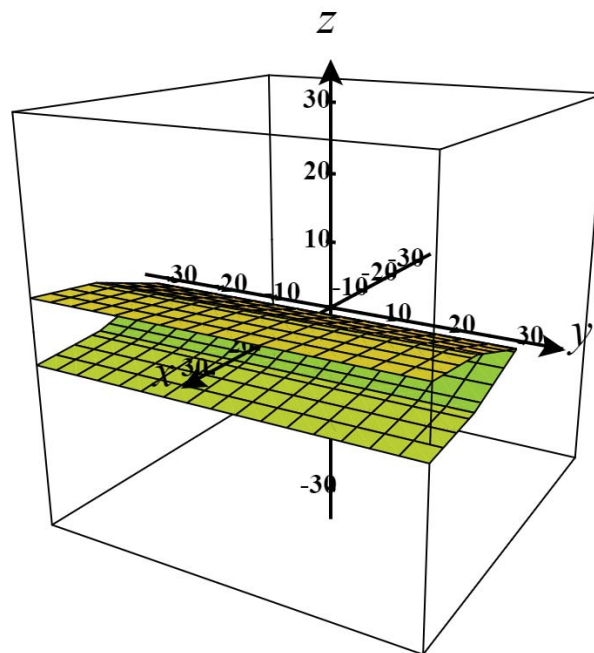
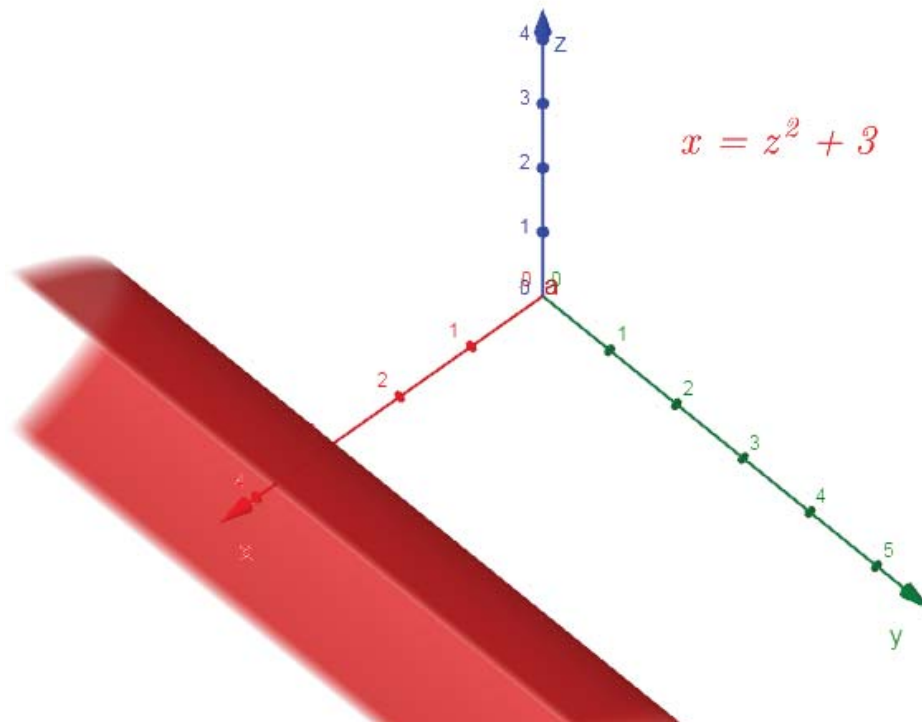
$$۲۲) x = y^2 + \frac{z^2}{4}$$



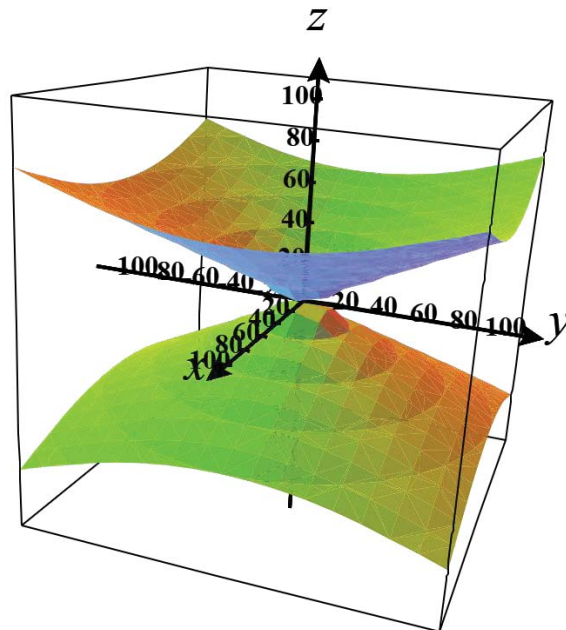
$$۲۳) x^2 = 9y^2 + 4z^2$$



$$۲۴) \ x = z^2 + 3$$

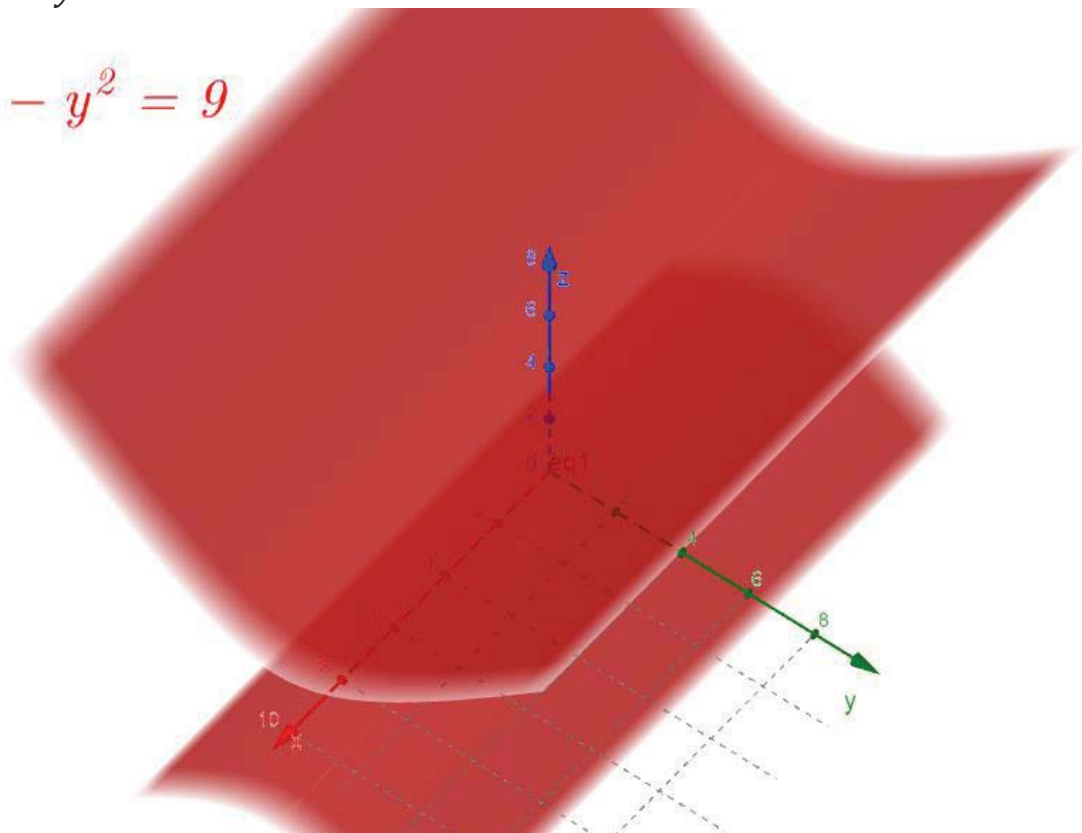


$$۲۵) \ x = 4z^2 - y^2$$

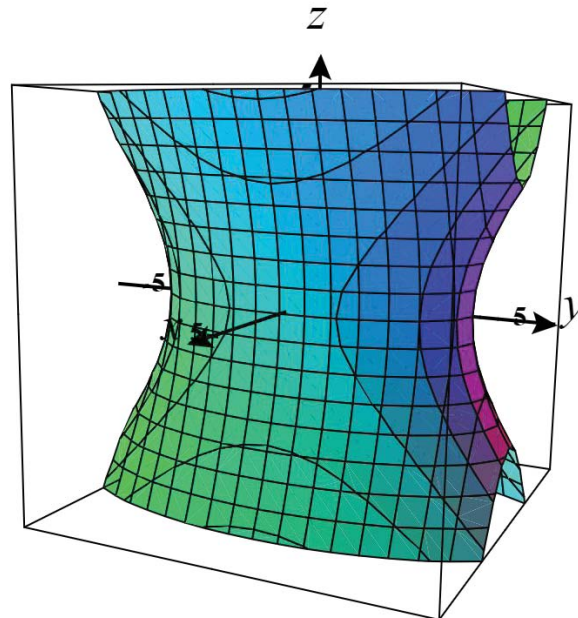


$$۲۶) \ z^2 - y^2 = 9$$

$$z^2 - y^2 = 9$$

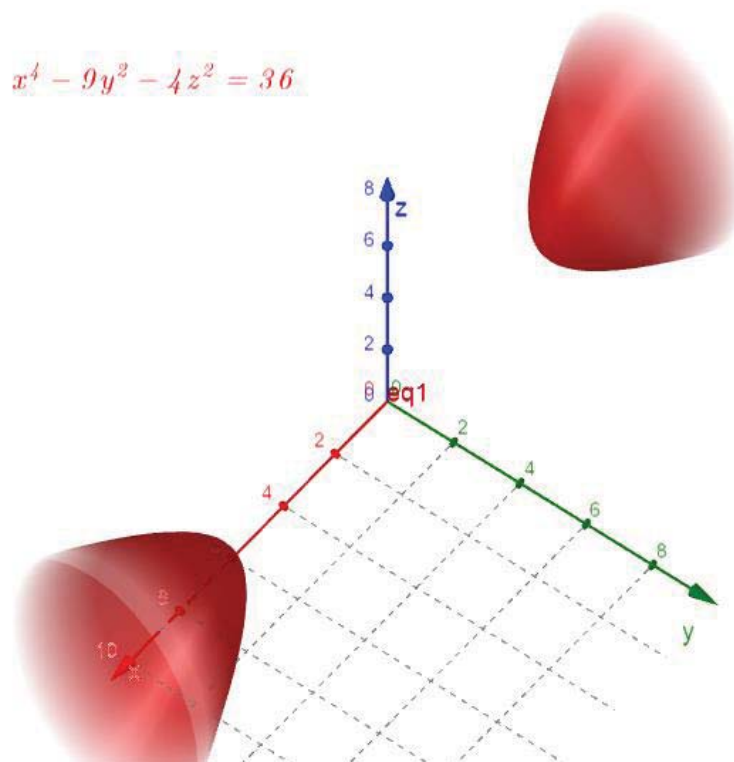


$$۲۷) \quad 4x^2 + y^2 - z^2 = 16$$



$$۲۸) \quad x^4 - 9y^2 - 4z^2 = 36$$

$$x^4 - 9y^2 - 4z^2 = 36$$



در تمرینات زیر یک تابع f با دو متغیر و یک تابع g با یک متغیر پیدا کنید بطوری که داشته باشیم.

$$F = g \circ f$$

$$۲۹) F(x, y) = \ln(x^2 + 6y)$$

پاسخ

فرض می کنیم $f(x, y) = x^2 + 6y$ و $g(t) = \ln t$ باشد.

$$۳۰) F(x, y) = x^2 y^2 + 5xy + 1$$

پاسخ

فرض می کنیم $f(x, y) = xy$ و $g(t) = t^2 + 5t + 1$ باشد.

۳۱ - ارتفاع یک استوانه مدور راست را به صورت تابع حجم و شعاع آن بنویسید.

پاسخ

فرض می کنیم ارتفاع h ، حجم V و شعاع r باشد. پس داریم.

$$h = \frac{V}{\pi r^2}, \quad r > 0, \quad V > 0$$

سطح جانبی یک جعبه مستطیل شکل بدون درب به صورت تابع اضلاع x, y, z بنویسید.

پاسخ

فرض می کنیم x و y اضلاع قاعده و z ارتفاع باشد. چون جعبه درب که از بالا باز می شود، ندارد، پس داریم.

$$S = xy + 2xz + 2yz, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

حد و پیوستگی Limits and Continuity

تعریف های حد یک تابع حقیقی و حد یک تابع برداری الگویی برای تعریف حد یک تابع چند متغیره به ما می دهد. تعریف ساده حد این است، L حد $f(x, y)$ است هنگامی که (x, y) به (x_0, y_0) نزدیک می شود، اگر $f(x, y)$ تا حد دلخواه به L نزدیک شود، هر وقت که (x, y) به حد کافی به (x_0, y_0) نزدیک باشد. برای تابع سه متغیره هم به همین طریق می توان حد را تعریف کرد.

تعریف حد یک تابع دو متغیره Definition of Limit of a two Variable Function
فرض می کنیم f در یک مجموعه که شامل یک دیسک به مرکز (x_0, y_0) است، تعریف شده باشد. احتمالاً بجز خود (x_0, y_0) و فرض می کنیم L یک عدد باشد. پس L حد f در (x_0, y_0) است اگر برای هر عدد $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد، بطوری که اگر

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

باشد، پس

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

باشد. در این صورت می نویسیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

و می گوئیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ وجود دارد. به همین طریق

فرض می کنیم f در یک مجموعه که شامل یک توپ به مرکز (x_0, y_0, z_0) است، تعریف شده باشد. احتمالاً بجز خود (x_0, y_0, z_0) و فرض می کنیم L یک عدد باشد. پس L حد f در (x_0, y_0, z_0) است اگر برای هر عدد $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد، بطوری که اگر

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

باشد، پس

$$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

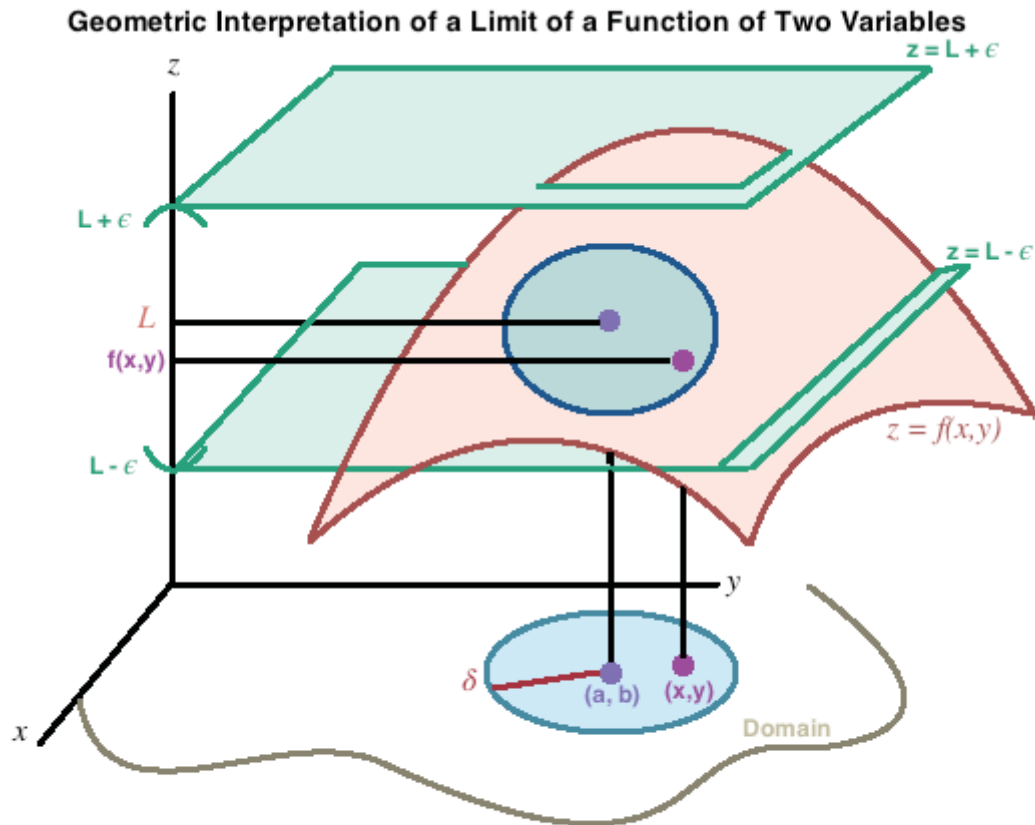
باشد. در این صورت می نویسیم

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$$

و می گوئیم $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z)$ وجود دارد.

تفسیر هندسی حد در تصویر A ملاحظه می کنید.

تصویر A



The limit as (x, y) approaches (a, b) is L if for all $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that if (x, y) is in the domain of f and (x, y) is within $\delta > 0$ of (a, b) , then the subset of points from the surface generated by the function f is contained between the two planes $z = L + \epsilon$ and $z = L - \epsilon$.

مثال ۱ - نشان دهید

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$$

است.

پاسخ

فرض می کنیم $\epsilon > 0$ باشد. ملاحظه می کنید که داریم.

$$\sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

است. حالا اگر فرض کنیم $\delta = \epsilon$ باشد، پس اگر

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

باشد، پس داریم.

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} < \delta = \varepsilon$$

این ثابت می کنند

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$$

است. قسمت دوم هم به همین طریق ثابت می کنیم.

مثال ۲ - نشان دهید

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} x = x_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} y = y_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} z = z_0$$

است.

پاسخ

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ باشد. چون داریم.

$$\sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

است، می توان فرض کرد $\delta = \varepsilon$ باشد. لذا اگر

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

باشد، پس

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} < \delta = \varepsilon$$

قسمت اول ثابت شد. دو قسمت دیگر هم به همین طریق ثابت می کنیم.

در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان توسط همین قلم گفتیم که اگر f یک تابع یک متغیری باشد، پس برای اینکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، باید $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ هر دو وجود داشته باشند و مساوی L باشد. یعنی حد از طرف راست و چپ هر دو وجود داشته باشند و مساوی L باشد. اما در تابع دو متغیره دیگر طرف راست و چپ معنی ندارد، زیرا تابع دو متغیره در سیستم سه بعدی تعریف می شود.

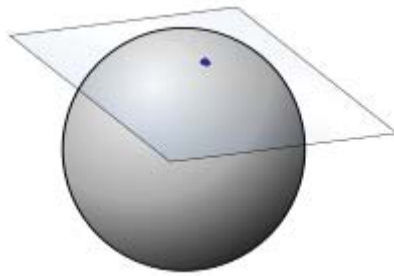
حالا اگر f یک تابع دو متغیره باشد، و $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$

باشد، پس تعریف حد یک تابع دو متغیره در بالا، تلویحا می گوید که $f(x,y)$ باید به L نزدیک شود هنگامی که (x,y) در هر مسیری که به (x_0,y_0) نزدیک می شود.

پس برای این که نشان دهیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد ، کافی است نشان دهیم $f(x,y)$ به دو عدد متفاوت نزدیک می شود ، هنگامی که (x,y) در دو مسیر متفاوت به (x_0,y_0) نزدیک می شود.

به عبارت دیگر ، تابع باید به یک مقدار ثابت نزدیک شود ، بدون توجه به مسیری که ما انتخاب می کنیم تا به (x_0,y_0) برسیم. تصویر AA را ملاحظه کنید. از چند جهت می توان به نقطه ای که روی کره می بینید ، نزدیک شد؟ مسلم است که پاسخ شما ، بیش از دو جهت خواهد بود.

تصویر AA



می گوییم تابع دو متغیره $f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای حد است اگر در هر مسیری تابع ، به (x_0,y_0) نزدیک شود ، تابع به عدد ثابت L به اندازه دلخواه نزدیک می شود. از تمام مسیر ها ، مقدار حد باید ثابت باشد.

مثال ۳ – فرض می کنیم

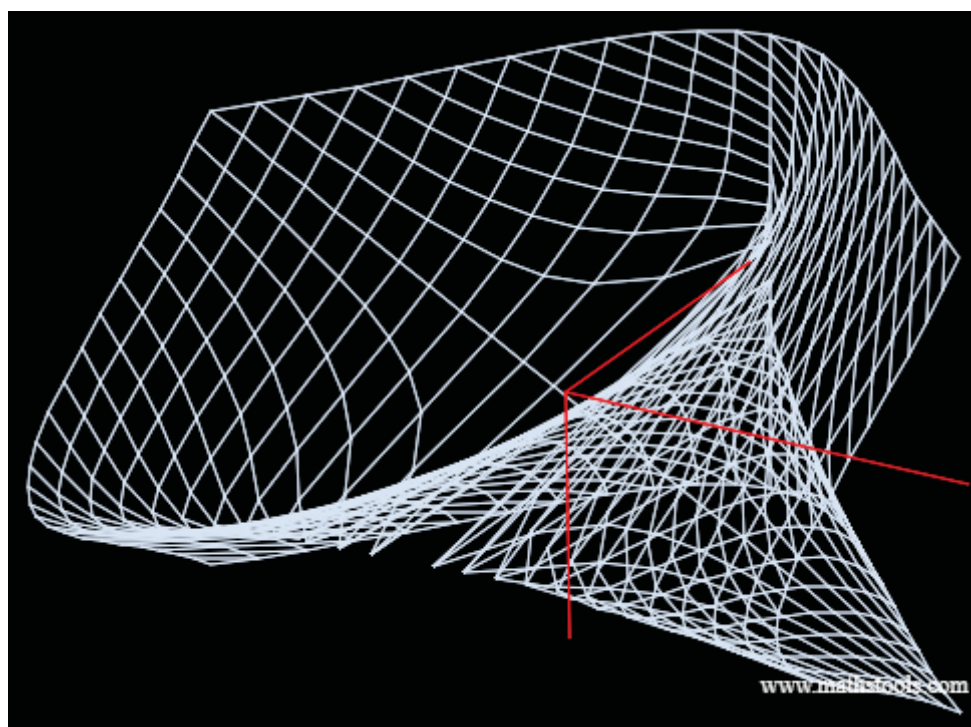
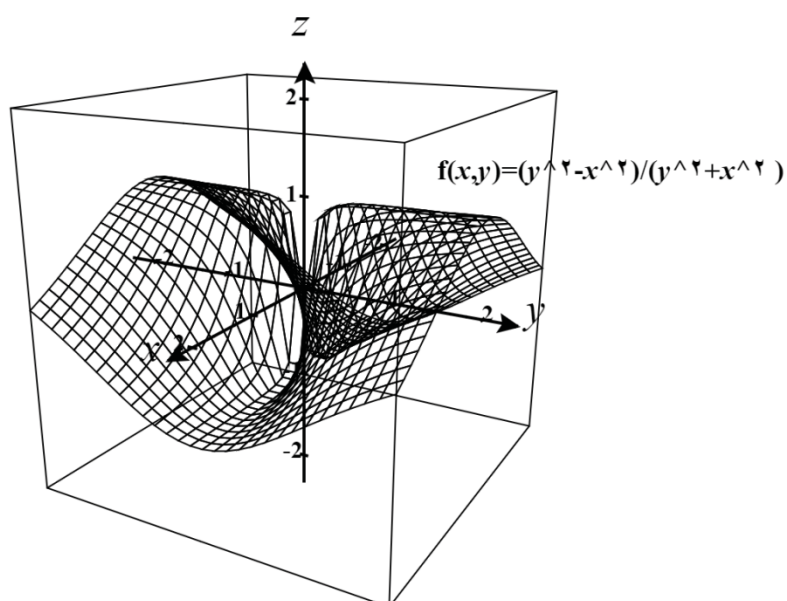
$$f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$$

باشد. نشان دهید $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

پاسخ

ملاحظه می کنید که اگر $y = 0$ و $x \neq 0$ باشد ، پس $f(x,y) = -1$ است ، در صورتی که اگر $x = 0$ و $y \neq 0$ باشد ، پس $f(x,y) = 1$ است. پس $f(x,y)$ به -1 نزدیک می شود ، هنگامی که (x,y) در امتداد خط $y = 0$ به $(0,0)$ نزدیک می شود. و $f(x,y)$ به 1 نزدیک می شود ، هنگامی که (x,y) در امتداد خط $x = 0$ به $(0,0)$ نزدیک می شود. پس f در $(0,0)$ حد ندارد. تصویر B هم این ادعا را که f در $(0,0)$ حد ندارد.

تصویر B



اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)$ وجود داشته باشد، پس داریم.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f+g)(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f-g)(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (fg)(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)} \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0\end{aligned}$$

برای تابع های سه متغیره هم به همین ترتیب عمل می کنیم.

مثال ۴ - نشان دهید

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{7}{5} \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

پاسخ

چون

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y = 2$$

پس بر اساس فرمول حاصل ضرب داریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^3 = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^3 = 8$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^2 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^2 = 4$$

بر اساس فرمول های جمع و خارج قسمت داریم.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} (x^3 + y^3)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} (x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^3 + \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^3}{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^2 + \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^2} = \frac{-1 + 8}{1 + 4} = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

برای نشان دادن درستی حد دوم، نمی توانیم مانند بالا عمل کنیم.، زیرا

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-0,0)} (x^2 + y^2) = 0$$

است، پس برای نشان دادن درستی حد دوم، نشان می دهیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (۱)$$

ملاحظه کنید که

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| = |x|$$

است. چون بر اساس مثال ۲ داریم $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ پس بکار بردن یک نوع قضیه ساندویچی برای تابع دو متغیره، درستی فرمول (۱) اثبات می شود. با بکار بردن همین استدلال فرمول زیر هم صادق است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (۲)$$

حالا می توانیم با استفاده از فرمول جمع، شماره های (۱) و (۲) را ترکیب کنیم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0 + 0 = 0$$

طرق دیگر برای نشان دادن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (۳)$$

استفاده از مختصات قطبی است. می دانید که اگر $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ باشد، پس (x, y) به $(0, 0)$ نزدیک می شود، اگر فقط و فقط r به صفر نزدیک شود. چون داریم

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2} = r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

و چون $\lim_{r \rightarrow 0} r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0$ است، پس شماره (۳) صحیح است.

نمونه ای از قضیه جانشینی برای تابع های چند متغیره هم هست. برای تابع دو متغیره، فرض می کنیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

باشد و فرض می کنیم g یک تابع یک متغیره که در L پیوسته است، باشد. پس

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(f(x,y)) = g(L)$$

مثال ۵ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} \ln \frac{x}{y}$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad g(t) = \ln t$$

باشد. بر اساس فرمول خارج قسمت داریم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} f(x, y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} x}{\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} y} = \frac{e}{1} = e$$

پس g در e پیوسته است و $g(e) = 1$ است. پس بر اساس فرمول جانشینی که در بالا ذکر شد، داریم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} \ln \frac{x}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} g(f(x, y)) = g(e) = 1$$

تعریف پیوستگی تابع های چند متغیره

Definition of Continuity of Functions of Several Variables

۱ - یک تابع دو متغیره f در (x_0, y_0) پیوسته است اگر داشته باشیم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

۲ - یک تابع سه متغیره f در (x_0, y_0, z_0) پیوسته است اگر داشته باشیم.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

۳ - یک تابع چند متغیره پیوسته است، اگر در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد.

مثال ۱ می گوید اگر $f(x, y) = x$ و $g(x, y) = y$ باشد، پس f و g تابع های پیوسته هستند. به همین ترتیب، اگر $f(x, y, z) = x$ و $g(x, y, z) = y$ و $h(x, y, z) = z$ باشد، پس بر اساس مثال ۲ تابع های f, g, h پیوسته هستند.

مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت تابع های پیوسته، پیوسته هستند. پس تابع های چند جمله ای و گویا، پیوسته هستند.

و در نهایت اگر f یک تابع دو متغیره و g یک تابع یک متغیره باشد، پس پیوستگی f در (x_0, y_0) و پیوستگی g در $f(x_0, y_0)$ با هم، دلالت بر پیوستگی $g \circ f$ در (x_0, y_0) می کند. برای تابع های سه متغیره هم همین نتیجه حاصل می شود.

مثال ۶ - اگر داشته باشیم

$$F(x, y) = \sin \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

نشان دهید که F یک تابع پیوسته است.

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad g(t) = \sin t$$

باشد، پس $F = g \circ f$ است. علاوه بر این می دانیم f و g تابع های پیوسته هستند. زیرا f یک تابع گویا است و g سینوس که می دانیم پیوسته است. پس ترکیب آنها هم پیوسته است.

پیوستگی در یک مجموعه Continuity on a Set

فرض می کنیم R یک مجموعه در صفحه مختصات Plane باشد. توجه دارید که تاکنون کلمه

سطح Plane مکررا آورده ایم و منظور سیستم دو بعدی و یا همان xy است

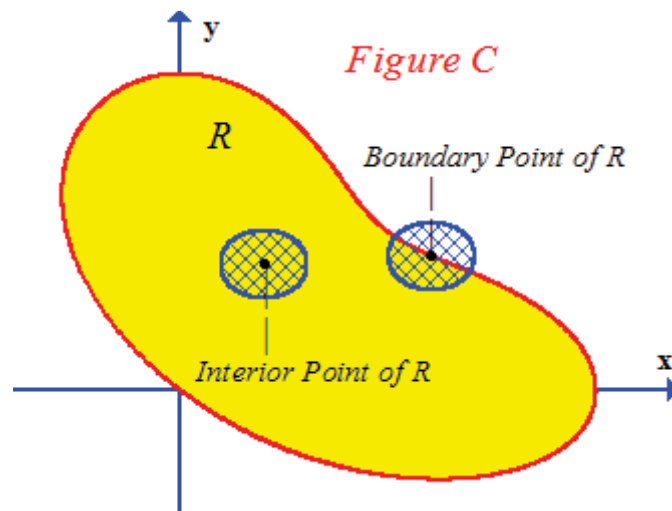
پس برای هر نقطه در R یکی از شرایط زیر برقرار است.

۱ - یک دیسک به مرکز P وجود دارد که در R است.

۲ - هر دیسکی به مرکز P شامل نقاطی است بیرون R

نقاطی که شرط ۱ را برقرار می کنند، **نقاط داخلی Interior Points** نامیده می شوند. و نقاطی که

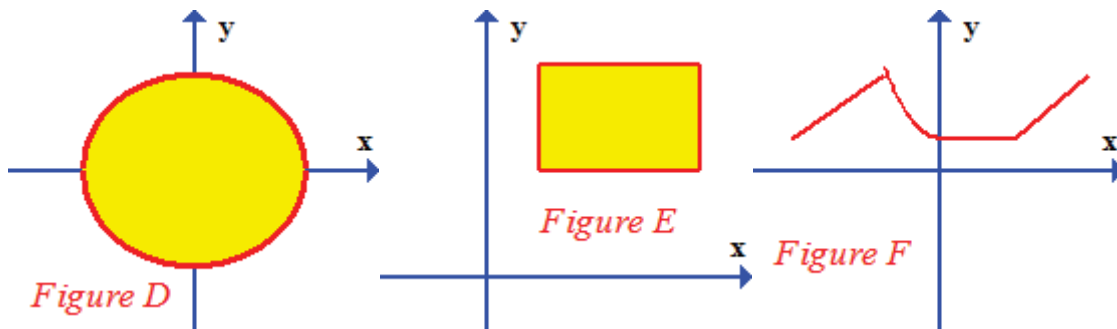
شرط دوم را برقرار می کنند، **نقاط مرزی Boundary Points** نامیده می شوند. تصویر C



بطور کلی، یک نقطه P خواه داخل R باشد یا نباشد، یک **نقطه مرزی** یک مجموعه R نامیده می شود، اگر هر دیسک به مرکز P شامل حداقل یک نقطه داخل R و حداقل یک نقطه بیرون R باشد. مرز R مجموع نقاط مرزی آن است.

مرز های بیشتر ناحیه هایی که با آن سرو کار داریم، به آسانی مشخص می شوند. مثلاً مرز دیسک

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad \text{دائرة} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{است، تصویر} \quad D$$



مرز یک ناحیه مستطیلی، مستطیل است. تصویر E

مرز یک پاره خط یا یک منحنی قطعه قطعه هموار که در یک بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد،

مرز خودش است. تصویر F

فر کنید R یک ناحیه مسطح Plane Region باشد که شامل خط مرزی هم هست. می خواهیم پیوستگی

یک تابع f در مجموعه R را تعریف کنیم. توجه دارید که پیوستگی f در یک نقطه داخلی

(x_0, y_0) را در ابتدای همین بخش توضیح دادیم. برای پیوستگی f در نقطه مرزی

(x_0, y_0) مجموعه R ، آن تعریف را کمی تغییر می دهیم.

یک عدد L حد f در یک نقطه مرزی (x_0, y_0) مجموعه R ، است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک

عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد، بطوری که اگر (x, y) در R باشد و داشته باشیم

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

پس $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ است. در این صورت می گوییم حد f در (x_0, y_0) وجود دارد و می

نویسیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

اگر (x_0, y_0) یک نقطه مرزی R باشد، می گوییم f در یک نقطه مرزی (x_0, y_0) پیوسته است اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

باشد. و در نهایت f در یک مجموعه R که شامل خط مرزی هم هست، پیوسته است، اگر این

تابع در هر نقطه R پیوسته باشد.

مثال ۷ - فرض می کنیم R یک ناحیه مستطیلی است، که شامل کلیه نقاط (x, y) باشد بطوری که

$$0 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq 2 \text{ باشد. و فرض می کنیم}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - x - y & , (x, y) \in R \\ 0 & , (x, y) \notin R \end{cases}$$

نشان دهید f در R پیوسته است، اما f یک تابع پیوسته نیست.

پاسخ

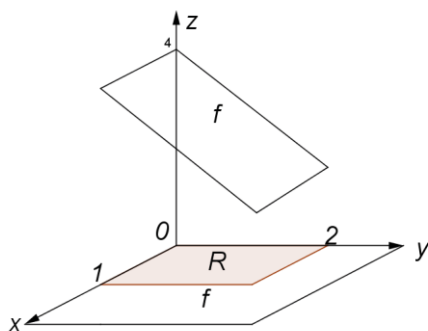


Figure G

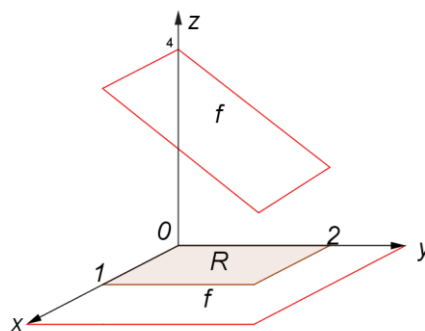


Figure G

چون چند جمله ای $4 - x - y$ پیوسته است، هر دو چند جمله ای f در R پیوسته هستند. حالا چون $|f(x, y)| \geq 1$ است برای تمام (x, y) ها در R و $f(x, y) = 0$ برای (x, y) که در R نباشد، پس بر اساس تعریف حد در همین بخش، f در هیچ کدام از نقاط مرزی R حد ندارد و لذا پیوسته نیست. تصویر G . ملاحظه می کنید که f در تصویر دو قسمت است.

تمرینات ۵.۲

در تمرینات زیر، حد را پیدا کنید.

- ۱) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \left(x + \frac{1}{y} \right)$
- ۲) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2}$
- ۳) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,-1)} \frac{2x^2y - xz^2}{y^2 - xz}$
- ۴) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^3 + 2x^2y - xy - 2y^2}{x + 2y}$
- ۵) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0\right)} \cos(x + y + z)$
- ۶) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

$$۷) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$۸) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

۹ - نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ وجود ندارد.

۱۰ - فرض کنید $f(x, y) = \arcsin(x - y)$ و $g(t) = t^2 - 1$ باشد. مطلوب است

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} g(f(x, y))$$

در تمرینات زیر، توضیح دهید چرا f پیوسته است.

$$۱۱) f(x, y) = xy^2$$

$$۱۲) f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 1}$$

$$۱۳) f(x, y, z) = \ln(e^x + e^{xz})$$

۱۴ - فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف - نشان دهید f به ازای هر متغیر بطور جدا گانه در $(0, 0)$ پیوسته است. یعنی $f(x, 0)$ یک تابع پیوسته x در صفر است و $f(0, y)$ یک تابع پیوسته y در صفر است.
ب - نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۱۵ - فرض کنید R تمام صفحه مختصات بجز مبدا باشد. و فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad , (x, y) \in R$$

آیا $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ وجود دارد؟

پاسخ تمرینات ۵.۲

در تمرینات زیر، حد را پیدا کنید.

$$۱) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \left(x + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} = \frac{1^2 - (1)(0) + 1}{1^2 + 0^2} = 2$$

$$۳) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,-1)} \frac{2x^2y - xz^2}{y^2 - xz} = \frac{2(2)^2(1) - (2)(-1)^2}{1^2 - (2)(-1)} = 2$$

$$۴) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 + 2x^2y - xy - 2y^2}{x + 2y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x + 2y)(x^2 - y)}{x + 2y} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^2 - y) = 2^2 - 1 = 3$$

$$۵) \lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0\right)} \cos(x + y + z)$$

چون داریم $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0\right)} (x + y + z) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 0 = 0$ و تابع کسینوس، پیوسته است، پس

بر اساس فرمول جانشینی داریم

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0\right)} \cos(x + y + z) = \cos 0 = 1$$

$$۶) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

چون $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0 + 0 = 0$ است و $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ است، پس بر اساس فرمول جانشینی داریم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^r + y^r)}{x^r + y^r} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$۷) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r}$$

بر اساس مثال ۴ داریم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r}{x^r + y^r} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^r}{x^r + y^r}$$

پس

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[y \frac{x^r}{x^r + y^r} - x \frac{y^r}{x^r + y^r} \right] = (0)(0) - (0)(0) = 0$$

$$۸) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^r + y^r + z^r}{x^r + y^r + z^r}$$

برای هر $\varepsilon > 0$ فرض می‌کنیم $\delta = \varepsilon$ باشد. اگر $0 < \sqrt{x^r + y^r + z^r} < \delta$ باشد، پس

$$x = \sqrt{x^r} \leq \sqrt{x^r + y^r + z^r} < \delta = \varepsilon$$

است، بطوری که

$$\left| \frac{x^r}{x^r + y^r + z^r} \right| = \left| x \frac{x^r}{x^r + y^r + z^r} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

پس

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^r}{x^r + y^r + z^r} = 0$$

به همین ترتیب

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^r}{x^r + y^r + z^r} = 0 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z^r}{x^r + y^r + z^r}$$

و در نهایت

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^r + y^r + z^r}{x^r + y^r + z^r}$$

$$= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left[\frac{x^3}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^3}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \right] \\ = 0 + 0 + 0 = 0$$

۹ - نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ وجود ندارد.

پاسخ

اگر $y = 0$ و $x \neq 0$ باشد، پس $\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ است. در صورتی که $x = y \neq 0$ باشد، پس

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

پس بر اساس توضیحی که قبل از مثال ۳ دادیم، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ وجود ندارد.

۱۰ - فرض کنید $f(x, y) = \arcsin(x - y)$ و $g(t) = t^2 - 1$ باشد. مطلوب است

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} g(f(x, y))$$

در تمرینات زیر، توضیح دهید چرا f پیوسته است.

۱۱) $f(x, y) = xy^2$

تابع f پیوسته است، زیرا یک چند جمله ای است.

۱۲) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 1}$

تابع f پیوسته است، زیرا یک تابع گویا است.

۱۳) $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^{xz})$

پاسخ

فرض می کنیم $h(x, y, z) = e^x + e^{yz}$ و $g(t) = \ln t$ باشد، پس $f = g \circ h$ است. و چون h و g پیوسته هستند، پس f هم پیوسته است.

۱۴ - فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف - نشان دهید f به ازای هر متغیر بطور جدا گانه در $(0,0)$ پیوسته است. یعنی $f(x,0)$ یک تابع پیوسته x در صفر است و $f(0,y)$ یک تابع پیوسته y در صفر است.
 ب - نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

پاسخ

الف - چون $f(x,0) = 0$ است برای تمام x ها و $f(0,y) = 0$ است برای تمام y ها، پس f برای هر کدام از متغیر ها جدا گانه، پیوسته است.

ب - اگر $y = 0$ باشد، پس $f(x,y) = 0$ است. اما اگر $x = y \neq 0$ باشد، پس

$$f(x,y) = \frac{1}{y}$$

است، پس بر اساس بحث قبل از مثال ۳

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

وجود ندارد، و لذا f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

۱۵ - فرض کنید R تمام صفحه مختصات بجز مبدا باشد. و فرض کنید

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in R$$

آیا $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود دارد؟

پاسخ

اگر $y = 0$ و $x \neq 0$ باشد، پس $f(x,y) = 1$ است، اما اگر $x = y \neq 0$ باشد، پس

$$f(x,y) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

وجود ندارد.

۵.۳ - مشتق پاره ای یا مشتق جزئی Partial Derivative

فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد. اگر یکی از دو متغیر را ثابت نگاه داریم، مثلاً $y = y_0$ ، پس تابعی که مقادیر آن $f(x, y_0)$ است، تابعی است نسبت به x به تنهایی. اگر آن تابع یک مشتق در x_0 داشته باشد، آن مشتق را مشتق جزئی در (x_0, y_0) می نامیم.

تعریف Definition

فرض می کنیم f یک تابع دو متغیره باشد و فرض می کنیم (x_0, y_0) در دامنه f باشد. مشتق جزئی f نسبت به x در (x_0, y_0) مطابق زیر تعریف می شود.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

مشتق پاره ای f نسبت به y در (x_0, y_0) مطابق زیر تعریف می شود.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

توابع f_x و f_y که از طریق مشتق گیری پاره ای بدست می آیند و مطابق ذیل تعریف شده اند

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

و

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

مشتق های پاره ای f نامیده می شوند و معمولاً با نماد های زیر هم نشان داده می شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

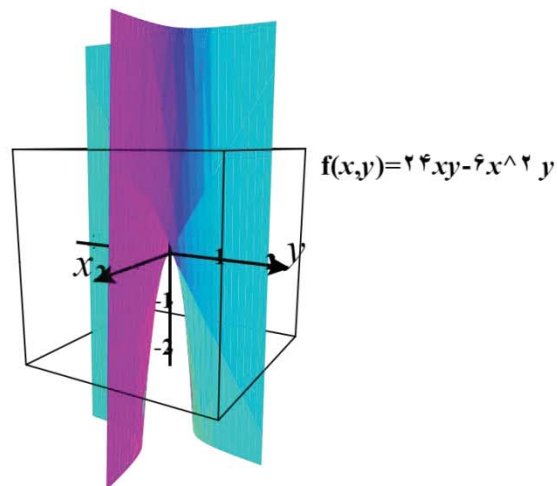
اگر تابعی را به وسیله تساوی $z = f(x, y)$ نشان دهیم، پس می نویسیم

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

پیدا کردن مشتق های پاره ای از پیدا کردن مشتق های توابع یک متغیری مشکل تر نیست.

مثال ۱- اگر $f(x, y) = ۲۴xy - ۶x^۲y$ باشد، f_x و f_y را پیدا کنید و مقادیر f_x و f_y را در $(۱, ۲)$ پیدا کنید. تصویر A

تصویر A

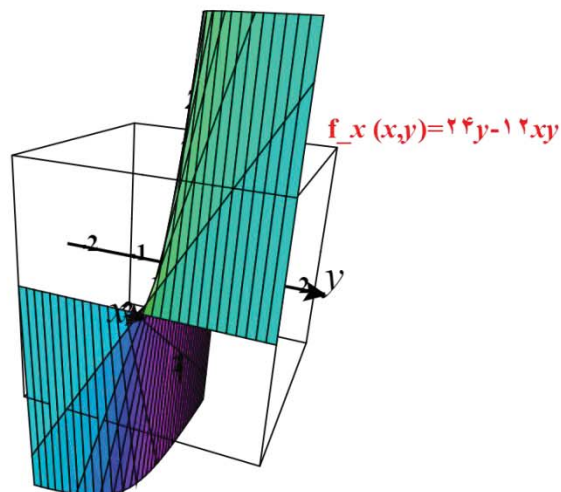


پاسخ

با ثابت نگاه داشتن y و مشتق گرفتن f نسبت به x داریم. تصویر B

$$f_x(x, y) = ۲۴y - ۱۲xy$$

تصویر B



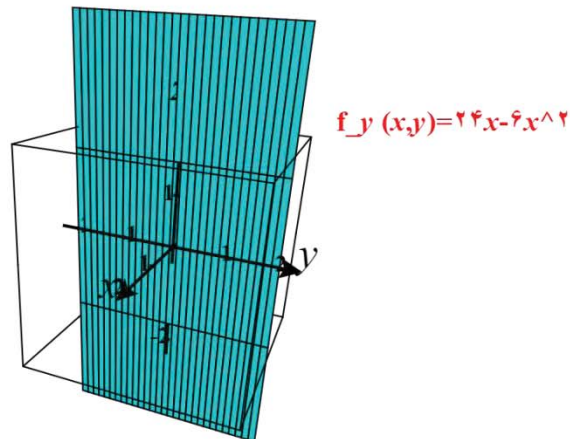
و لذا

$$f_x(۱, ۲) = ۴۸ - ۲۴ = ۲۴$$

حالا x را ثابت نگاه می داریم و مشتق f را نسبت به y پیدا می کنیم. تصویر C

$$f_y(x, y) = 24x - 6x^2$$

تصویر C



و لذا

$$f_y(1, 2) = 24 - 6 = 18$$

مثال ۲ - اگر $z = x^2 \cos y$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \cos y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -x^2 \sin y\end{aligned}$$

جمع، ضرب و تقسیم مشتق ها در مورد مشتق های پاره ای هم صادق هستند.

$$\begin{aligned}(f + g)_x &= f_x + g_x \quad \text{و} \quad (f + g)_y = f_y + g_y \\ (f - g)_x &= f_x - g_x \quad \text{و} \quad (f - g)_y = f_y - g_y \\ (fg)_x &= f_x g + f g_x \quad \text{و} \quad (fg)_y = f_y g + f g_y \\ \left(\frac{f}{g}\right)_x &= \frac{f_x g - f g_x}{g^2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{f_y g - f g_y}{g^2}\end{aligned}$$

نتیجه این که چند جمله ای ها و توابع گویا هم در کلیه نقاط دامنه شان ، مشتق پاره ای دارند.

مثال ۳ - اگر داشته باشیم

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

f_x و f_y را پیدا کنید.

پاسخ

چون f یک تابع گویا است ، پس $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ برای تمام x ها و y ها تعریف شده هستند ، به شرطی که $x^2 + y^2 \neq 0$ باشد. یعنی برای تمام نقاط بجز مبدا مختصات.

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

مثال ۴ - اگر داشته باشیم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{برای } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{برای } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان دهید که

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

پاسخ

چون $f(h, 0) = 0$ است برای تمام h ها ، پس داریم

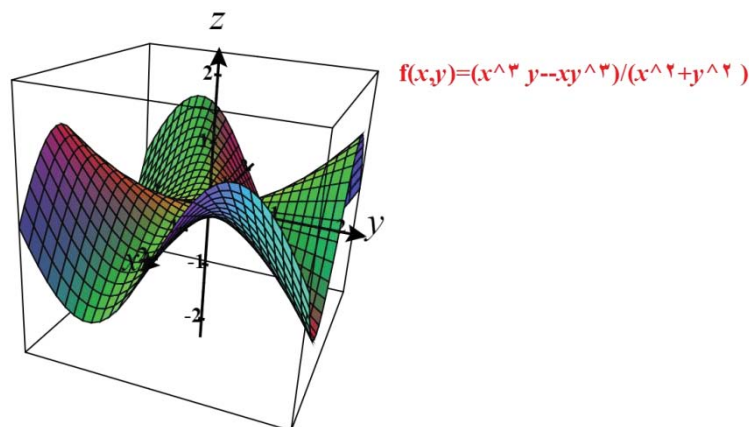
$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h - 0} = 0$$

به همین طریق $f(0, h) = 0$ است برای تمام h ها ، پس داریم

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h - 0} = 0$$

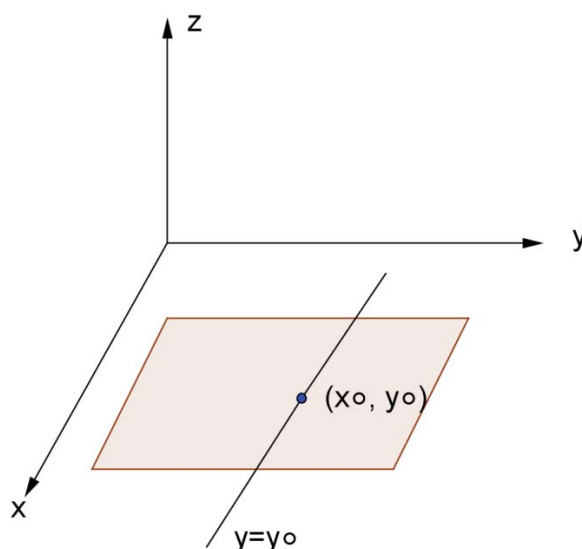
در نمودار زیر ملاحظه می کنید که مشتق های پاره ای f در $(0, 0)$ صفر هستند. تصویر D

تصویر D



می توان چنین تصور کرد که مشتق پاره ای $f_x(x_0, y_0)$ عبارت است از میزان یا آهنگ تغییر $f(x, y)$ در (x_0, y_0) نسبت به x هنگامی که y ثابت نگاه داشته شده است. مثلاً، فرض کنید یک لوح فلزی روی صفحه xy قرار دارد و فرض کنید $f(x, y)$ حرارت این لوح در هر نقطه (x, y) باشد. پس $f_x(x_0, y_0)$ میزان یا آهنگ تغییرات حرارت است در (x_0, y_0) در امتداد خط موازی محور x که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد. تصویر E

تصویر E



اگر هنگامی که x افزایش پیدا می کند، حرارت هم افزایش یابد، پس $f_x(x_0, y_0) > 0$ است و اگر بر عکس هنگامی که x افزایش پیدا می کند، حرارت نقصان پیدا کند، پس $f_x(x_0, y_0) < 0$ است.

به همین طریق، مشتق پاره ای $f_y(x_0, y_0)$ آهنگ تغییرات حرارت است در (x_0, y_0) در امتداد خطی که از (x_0, y_0) می‌گذرد و موازی محور y است.

تفسیر هندسی مشتق های جزئی Geometric Interpretation of Partial Derivatives

تفسیر هندسی مشتق پاره ای مانند مشتق تابع یک متغیره است. مشتق عبارت است از شیب خط مماس بر منحنی یک تابع در یک نقطه مخصوص P . در مورد یک تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ تصویر F تفسیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را نشان می‌دهد.

تصویر F

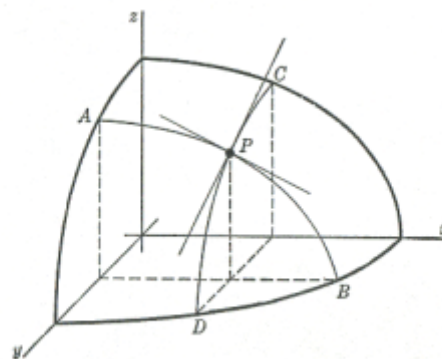


Fig. 1

نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ مربوط است به شیب خط مماس بر منحنی APB در نقطه P . منحنی APB محل تلاقی نمودار تابع دو متغیره f با یک صفحه که از نقطه P عبور می‌کند و موازی محور y است. به همین طریق، $\frac{\partial f}{\partial y}$ مربوط است به شیب خط مماس بر منحنی CPD در نقطه P . منحنی CPD محل تلاقی نمودار تابع دو متغیره f با یک صفحه که از نقطه P عبور می‌کند و موازی محور x است.

تفسیر دیگری برای مشتق پاره ای

می‌دانید که نمودار معادله $z = f(x, y)$ یک صفحه **Surface** است که ما آنرا S می‌نامیم. اگر $f(a, b) = c$ باشد، پس نقطه $P(a, b, c)$ روی S قرار دارد. با ثابت نگاه داشتن $y = b$ ، توجه خود را به منحنی C_1 معطوف می‌کنیم. C_1 محل تلاقی صفحه **Plane** عمودی $y = b$ با S است. یعنی C_1 اثر S در صفحه $y = b$ است.

به همین طریق، صفحه عمودی $x = a$ صفحه S را در یک منحنی C_2 تلاقی می‌کند. هر دو منحنی C_1 و C_2 در نقطه P تلاقی می‌کنند. توجه دارید که منحنی C_1 نمودار تابع زیر است

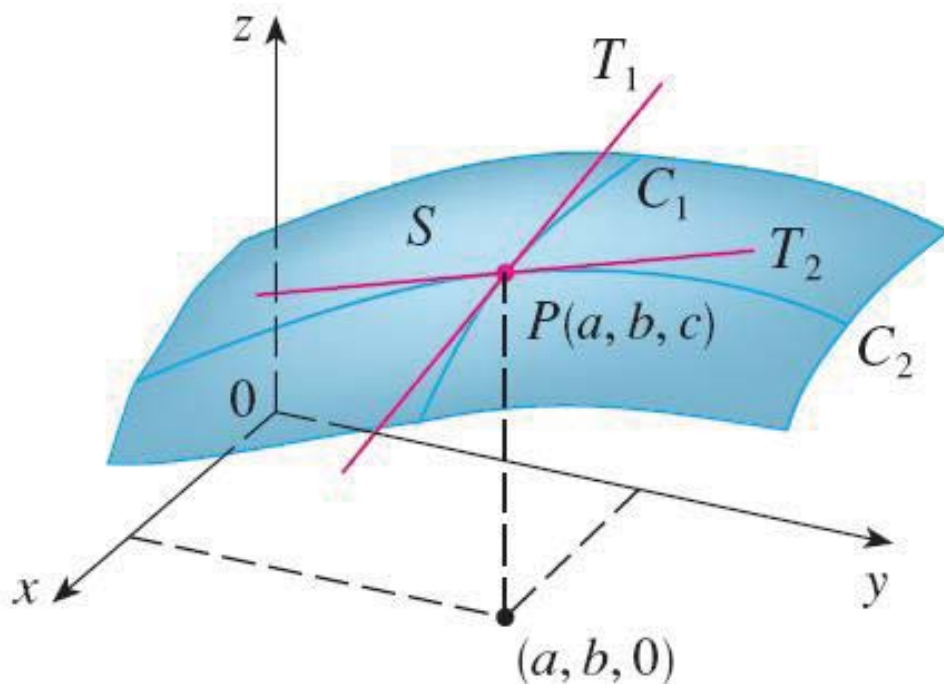
$$g(x) = f(x, b)$$

پس، شیب خط مماس آن یعنی T_1 در نقطه P می‌شود، $g'(a) = f_x(a, b)$ به همین رو! منحنی C_2 نمودار تابع $G(y) = f(a, y)$ است. پس شیب خط مماس آن یعنی T_2 در نقطه P می‌شود،

$$G'(b) = f_y(a, b)$$

لذا مشتق های پاره ای $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ را می توان از نظر هندسی مطابق زیر تفسیر کرد. شیب های خطوط مماس در نقطه $P(a, b, c)$ بر اثر های C_1 و C_2 روی S در صفحه های $x = a$ و $y = b$ تصویر G

تصویر G



برای توابع سه متغیری، مشتق های پاره ای مطابق زیر تعریف می شوند.

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

نماد دیگری که برای این مشتق ها بکار می رود مطابق زیر است.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

مثال ۵ - اگر داشته باشیم

$$f(x, y, z) = e^x \cos z e^y \sin z$$

مشتق های پاره ای f را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا y و z را ثابت نگاه می داریم و نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} \cos z$$

به همین ترتیب دو متغیر دیگر را ثابت نگاه می داریم و نسبت به y مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} \sin z$$

و بالاخره

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{xy} \sin z + e^{xy} \cos z$$

همان طور که در مورد توابع یک متغیری دیدیم، توابع چند متغیری هم مشتق های مرتبه بالاتر هم دارند. اگر f تابعی از متغیرهای x و y باشد، پس توابع f_x و f_y ممکن است دو مشتق پاره ای داشته باشند. در این صورت مشتق های پاره ای f_x و f_y چهار مشتق پاره ای ایجاد می کنند.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ یا } f_{xx} \text{ با نماد } (f_x)_x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ یا } f_{xy} \text{ با نماد } (f_x)_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ یا } f_{yx} \text{ با نماد } (f_y)_x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ یا } f_{yy} \text{ با نماد } (f_y)_y$$

مشتق هایی که در بالا ذکر شد، مشتق های پاره ای مرتبه دوم f نامیده می شوند.

نماد های f_{xy} و f_{yx} را مشتق های پاره ای مخلوط می نامند

نماد های f_x ، f_y ، f_z را مشتق های پاره ای مرتبه اول می نامیم.

Mixed Partial Derivatives مشتق پاره ای مخلوط

مثال ۶ - اگر $f(x, y) = \sin xy^2$ باشد، تمام مشتق های پاره ای مرتبه دوم را پیدا کنید.

پاسخ

مشتق های پاره ای مرتبه اول داریم.

$$f_x(x, y) = y^2 \cos xy^2$$

$$f_y(x, y) = 2xy \cos xy^2$$

برای بدست آوردن مشتق های پاره ای مرتبه دوم، از مشتق های مرتبه اول، مشتق می گیریم.

$$f_{xx}(x, y) = -y^2 \sin xy^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2$$

$$\begin{aligned}f_{yx}(x, y) &= y \cos xy - xy \sin xy \\f_{yy}(x, y) &= x \cos xy - x^2 y \sin xy\end{aligned}$$

مثال ۷ - فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

باشد. ، نشان دهید که $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ است.

پاسخ

بر اساس مثال ۳ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}f_x(0, y) &= \frac{0^2 y + 2(0^2) y^3 - y^5}{(0^2 + y^2)^2} = -y, \quad y \neq 0 \\f_y(x, 0) &= \frac{x^5 - 2x^3(0^2) - x(0^4)}{(x^2 + 0^2)^2} = x, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

علاوه بر این ، بر اساس مثال ۴ داریم $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ است. این فرمول ها دلالت می کنند که

$$\begin{aligned}f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h - 0} = -1 \\f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h - 0} = 1\end{aligned}$$

در نتیجه $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

تمرینات ۵.۳

در تمرینات ۱۰ - ۱ مشتق های پاره ای توابع را پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x, y) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}}$$

$$۲) \quad f(x, y) = 2x + 3x^2 y^4$$

$$۳) \quad g(u, v) = \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2}$$

$$۴) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2}$$

$$۵) \quad z = \sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 - y^2}$$

$$۶) \quad z = \left(\sin x^2 y\right)^3$$

$$۷) \quad f(x, y, z) = x^2 y^5 + xz^2$$

$$۸) \quad f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{xy + yz + zx}$$

$$۹) \quad w = e^x (\cos y + \sin z)$$

$$۱۰) \quad w = \arcsin \frac{1}{1 + xyz^2}$$

در تمرینات ۱۲ - ۱۱ مشتق پاره ای مرتبه اول f در نقاط داده شده را پیدا کنید.

$$۱۱) \quad f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}; (2, -3)$$

$$۱۲) \quad f(x, y, z) = e^{2x-3y-z} (0, -1, 1)$$

در تمرینات ۱۳ - ۱۵ f_{yx} و f_{xy} را پیدا کنید.

$$۱۳) \quad f(x, y) = 3x^2 - \sqrt{2} \, xy^2 + y^5 - 2$$

$$۱۴) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$۱۵) \quad f(x, y, z) = z \cos xy$$

پاسخ تمرینات ۵.۳

در تمرینات ۱۰ - ۱ مشتق های پاره ای توابع را پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x, y) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}}$$

$$f_x(x, y) = x^{-\frac{1}{3}} \quad ; \quad f_y(x, y) = 0$$

$$۲) \quad f(x, y) = 2x + 3x^2y^4$$

$$f_x(x, y) = 2 + 6xy^4 \quad ; \quad f_y(x, y) = 12x^2y^3$$

$$۳) \quad g(u, v) = \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2}$$

$$g_u(u, v) = \frac{(u^3 + v^3)'_u u^2 - (u^2 + v^2)'_u u^3}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{u^4 + 3u^2v^2 - 2uv^3}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$g_v(u, v) = \frac{(u^3 + v^3)'_v v^2 - (u^2 + v^2)'_v v^3}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{v^4 + 3u^2v^2 - 2u^3v}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$۴) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2}$$

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - 9y^2}} \quad ; \quad f_y(x, y) = \frac{-9y}{\sqrt{4 - x^2 - 9y^2}}$$

$$۵) \quad z = \sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 - y^2}} \left[3\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^2 \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \right]$$

$$= \frac{-\left(1 - x^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{r}}}{x^{\frac{1}{r}} \sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{r}} - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{r}} - y^2}}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad z &= (\sin x^{\frac{1}{r}} y)^{\frac{r}{r}} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{r}{r} (\sin x^{\frac{1}{r}} y)^{\frac{r}{r}-1} (\cos x^{\frac{1}{r}} y) (x^{\frac{1}{r}} y) = \frac{r}{r} x y \sin^{\frac{r}{r}-1} x^{\frac{1}{r}} y \cos x^{\frac{1}{r}} y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{r}{r} (\sin x^{\frac{1}{r}} y)^{\frac{r}{r}-1} (\cos x^{\frac{1}{r}} y) (x^{\frac{1}{r}}) = \frac{r}{r} x^{\frac{1}{r}} \sin^{\frac{r}{r}-1} x^{\frac{1}{r}} y \cos x^{\frac{1}{r}} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \upsilon) \quad f(x, y, z) &= x^{\frac{1}{r}} y^{\frac{\Delta}{r}} + x z^{\frac{1}{r}} \\ f_x(x, y, z) &= \frac{1}{r} x y^{\frac{\Delta}{r}} + z^{\frac{1}{r}} \\ f_y(x, y, z) &= \frac{\Delta}{r} x^{\frac{1}{r}} y^{\frac{\Delta}{r}-1} \\ f_z(x, y, z) &= \frac{1}{r} x z^{\frac{1}{r}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge) \quad f(x, y, z) &= \frac{x + y + z}{xy + yz + zx} \\ f_x(x, y, z) &= \frac{xy + yz + zx - (x + y + z)(y + z)}{(xy + yz + zx)^2} = \frac{-(y^2 + yz + z^2)}{(xy + yz + zx)^2} \\ f_y(x, y, z) &= \frac{xy + yz + zx - (x + y + z)(x + z)}{(xy + yz + zx)^2} = \frac{-(z^2 + zx + x^2)}{(xy + yz + zx)^2} \\ f_z(x, y, z) &= \frac{xy + yz + zx - (x + y + z)(y + x)}{(xy + yz + zx)^2} = \frac{-(x^2 + xy + y^2)}{(xy + yz + zx)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۹) \quad w &= e^x (\cos y + \sin z) \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= e^x (\cos y + \sin z) \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= e^x (-\sin y) = -e^x \sin y \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= e^x \cos z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۰) \quad w &= \arcsin \frac{1}{1 + xyz^2} \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}} \left(\frac{-1}{(1 + xyz^2)^2} \right) yz^2 = \frac{-yz^2}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + xyz^2} \right)^2}} \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}} \left(\frac{-1}{(1 + xyz^2)^2} \right) xz^2 = \frac{-xz^2}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + xyz^2} \right)^2}} \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}} \left(\frac{-1}{(1 + xyz^2)^2} \right) 2xyz = \frac{-2xyz}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + xyz^2} \right)^2}}
 \end{aligned}$$

در تمرینات ۱۲ - ۱۱ مشتق پاره ای مرتبه اول f در نقاط داده شده را پیدا کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱۱) \quad f(x, y) &= \sqrt{4x^2 + y^2}; (2, -3) \\
 f_x(x, y) &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}; f_x(2, -3) = \frac{4(2)}{\sqrt{2(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5} \\
 f_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2}}; f_y(2, -3) = \frac{-3}{\sqrt{4(2)^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$۱۲) \quad f(x, y, z) = e^{x-4y-z}; (0, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= e^{x-4y-z}; f_x(0, -1, 1) = e^{(0)-4(-1)-1} = e^3 \\ f_y(x, y, z) &= -4e^{x-4y-z}; f_y(0, -1, 1) = -4e^{(0)-4(-1)-1} = -4e^3 \\ f_z(x, y, z) &= -e^{x-4y-z}; f_z(0, -1, 1) = -e^{(0)-4(-1)-1} = -e^3 \end{aligned}$$

در تمرینات ۱۵ - ۱۳ f_{xy} و f_{yx} را پیدا کنید.

$$۱۳) \quad f(x, y) = 3x^2 - \sqrt{2} xy^2 + y^5 - 2$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 6x - \sqrt{2} y^2, f_{xy}(x, y) = -2\sqrt{2} y \\ f_y(x, y) &= -2\sqrt{2} xy + 5y^4, f_{yx}(x, y) = -2\sqrt{2} y \end{aligned}$$

$$۱۴) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_{xy}(x, y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ f_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_{yx}(x, y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$۱۵) \quad f(x, y, z) = z \cos xy$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= -yz \sin xy, f_{xy}(x, y, z) = -z \sin xy - xyz \cos xy \\ f_y(x, y, z) &= -xz \sin xy, f_{yx}(x, y, z) = -z \sin xy - xyz \cos xy \end{aligned}$$

۵.۴ - قاعده زنجیره ای The Chain Rule

قاعده زنجیره ای برای تابع های یک متغیره ، فرمولی برای مشتق گیری از ترکیب دو تابع f و g در دسترس ما قرار می داد. مثلاً اگر $u = f(x)$ و $y = g(u) = g(f(x))$ باشد ، قاعده زنجیره ای را می توان با نماد لایبنیز Leibniz مطابق زیر نوشت.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

چند نمونه قاعده زنجیره ای Versions of the Chain Rule

اینجا دو نمونه از قاعده زنجیره ای برای تابع های دو متغیره می آوریم. فرض می کنیم تمام تابع ها مشتق های لازم را دارا هستند.

الف - فرض می کنیم $z = f(x, y)$ و $x = g_1(t)$ و $y = g_2(t)$ باشد. پس

$$z = f(g_1(t), g_2(t))$$

است. و

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

ب - فرض می کنیم $z = f(x, y)$ و $x = g_1(u, v)$ و $y = g_2(u, v)$ باشد ، پس

$$z = f(g_1(u, v), g_2(u, v))$$

است و

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right. \quad (2)$$

مثال ۱ - فرض کنید $z = x^2 e^y$ و $x = \sin t$ و $y = t^3$ باشد. $\frac{dz}{dt}$ را پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول (۱) داریم.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2xe^y \cos t + x^2 e^y (3t^2) \\ &= 2(\sin t)e^{(t^3)} \cos t + 3(\sin^2 t)e^{(t^3)} t^2 \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که پاسخ را بر حسب t نوشتیم ، زیرا می خواستیم $\frac{dz}{dt}$ را پیدا کنیم.

مثال ۲ - فرض کنید $z = x \ln y$ و $x = u^2 + v^2$ و $y = u^2 - v^2$ باشد. مطلوب است

$$\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

پاسخ

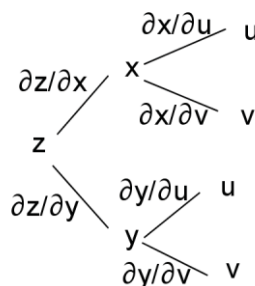
با استفاده از فرمول (۲) داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (\ln y)(2u) + \left(\frac{x}{y}\right)(2u) \\ &= 2u \ln(u^2 - v^2) + 2u \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (\ln y)(2v) + \left(\frac{x}{y}\right)(-2v) \\ &= 2v \ln(u^2 - v^2) - 2v \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \end{aligned}$$

قبل از این که به بحث در مورد قاعده زنجیره ای ادامه دهیم، یک روش کلی برای پیدا کردن مشتق های تابع های چند متغیری، به شما می دهیم. ابتدا یک نمودار درختی رسم می کنیم، که نشان دهیم متغیر ها چگونه با هم ارتباط دارند. مثلاً نمودار درختی مربوط به شماره (۲) مطابق زیر است.



نمودار از چپ به راست خوانده می شود. و نشان می دهد که z به x و y وابسته است. و x و y هر کدام به u و v وابسته هستند. برای پیدا کردن $\frac{\delta z}{\delta u}$ حاصل ضرب مشتق های پاره ای هر کدام را از مسیر z تا u را پیدا می کنیم. یعنی $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ و سپس این حاصل ضرب ها را با هم جمع می کنیم.

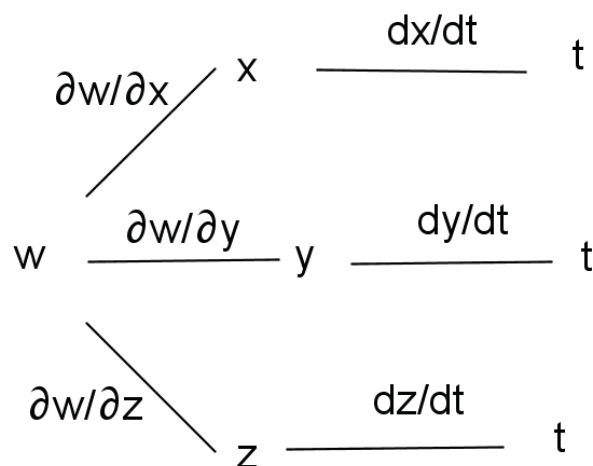
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

این تساوی اول شماره (۲) است. تساوی دوم در شماره (۲) از طریق استفاده مسیر از z تا v بدست می آید.

مثال ۳- فرض کنید $w = x \cos yz$ و $x = \sin t$ و $y = t^2$ و $z = e^t$ باشد. مطلوب است $\frac{dw}{dt}$

پاسخ

نمودار درختی مطابق زیر است.



سه مسیر از w تا t وجود دارد، پس داریم.

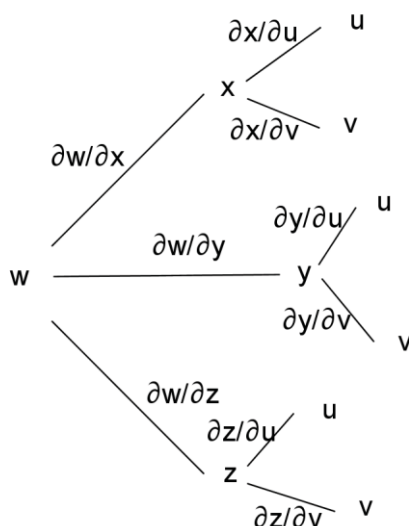
$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \cos yz \cos t - xz^2 (\sin yz) (2t) - 2xyz (\sin yz) (e^t) \\ &= \cos(t^2 e^t) \cos t - 2te^{2t} \sin t \sin(t^2 e^t) - 2t^2 e^{2t} \sin t \sin(t^2 e^t) \end{aligned}$$

مثال ۴ - فرض کنید $w = \sqrt{x} + y^2 z^3$ و $x = 1 + u^2 + v^2$ و $y = uv$ و $z = 3u$ باشد. مطلوب است.

$$\frac{\partial w}{\partial u} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial v}$$

پاسخ

نمودار درختی مطابق زیر است.



پس داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2u) + 2yz^3(v) + 3y^2z^2(3) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 54u^4v^2 + 81u^4v^2 \\ &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 135u^4v^2 \end{aligned}$$

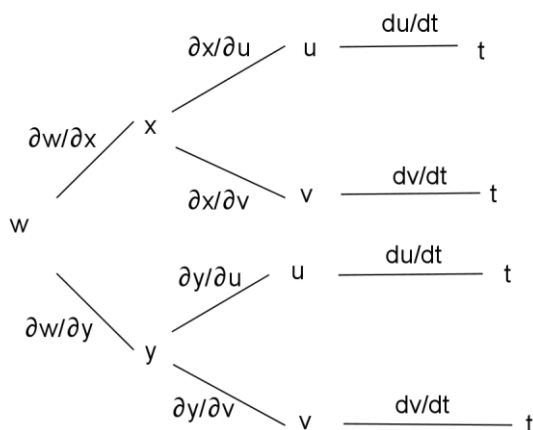
و

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2v) + 2yz^3(u) + 3y^2z^2(0) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 54u^4v \end{aligned}$$

مثال ۵ - فرض کنید $w = f(x, y)$ و $x = g(u, v)$ و $y = h(u, v)$ و $u = j(t)$ و $v = k(t)$ باشد. یک فمول برای $\frac{dw}{dt}$ پیدا کنید.

پاسخ

نمودار درختی را رسم می کنیم.



با استفاده از چهار مسیر از w تا t داریم.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

مثال ۶ - فرض کنید $z = f(u - v, v - u)$ باشد. نشان دهید

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

است.

پاسخ

فرض می کنیم $x = u - v$ و $y = v - u$ باشد، پس $z = f(x, y)$ است. با استفاده از (۲) داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} (1) + \frac{\partial z}{\partial y} (-1) \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} (-1) + \frac{\partial z}{\partial y} (1) \end{aligned}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

قاعده زنجیره ای برای تابع های چند متغیری مخصوصا برای مسائل میزان تغییر ، کار برد دارد.

مثال ۷ - فرض کنید حجم یک توده مخروطی شکل شن، به میزان ۴ اینچ مکعب در ثانیه زیاد می شود و شعاع مدور قاعده به میزان e^{-r} اینچ در ثانیه اضافه می شود. مطلوب است میزان افزایش ارتفاع مخروط، در لحظه ای که حجم مخروط ۶۰ اینچ مکعب و شعاع ۶ اینچ است.

پاسخ

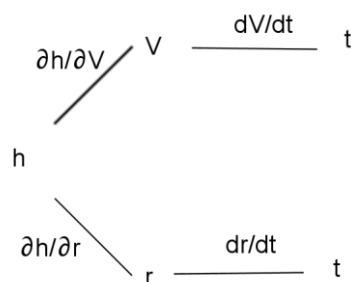
می خواهیم $\frac{dh}{dt}$ را در لحظه ای که $V = 60$ و $r = 6$ است، پیدا کنیم. فرمول حجم مخروط مطابق زیر است.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

است. در فرمول بالا V نماد حجم یعنی *Volume* و r نماد شعاع یعنی *Radius* و h نماد ارتفاع یعنی *Height* است. پس فرمول ارتفاع مطابق زیر است.

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

نمودار درختی زیر را داریم.



چون $\frac{dV}{dt} = 4$ و $\frac{dr}{dt} = e^{-r}$ است، پس داریم.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial V} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial h}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{3}{\pi r^2} (4) + \frac{-6V}{\pi r^3} (e^{-r}) = \frac{6}{\pi r^2} \left(2 - \frac{V}{r} e^{-r} \right)$$

اگر t_0 لحظه ای باشد که حجم می شود ۶۰ اینچ مکعب و شعاع می شود ۶ اینچ، پس

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{6}{\pi 6^2} \left(2 - \frac{60}{6} e^{-6} \right) = \frac{1}{3\pi} (1 - 5e^{-6}) \quad \text{اینچ در ثانیه}$$

مشتق گیری ضمنی Implicit Differentiation**یاد آواری**

بسیاری از توابع که در ابتدای حسابان با آنها کار کرده ایم، بطور روشن و آشکار تابعی از یک متغیر مثلا x بودند، که به آنها تابع واضح **Explicit Function** می گویند. مانند تابع زیر.

$$y = 3x^2 - \sin(7x + 5)$$

پس مشتق این تابع می شود

$$y' = 6x - 7 \cos(7x + 5)$$

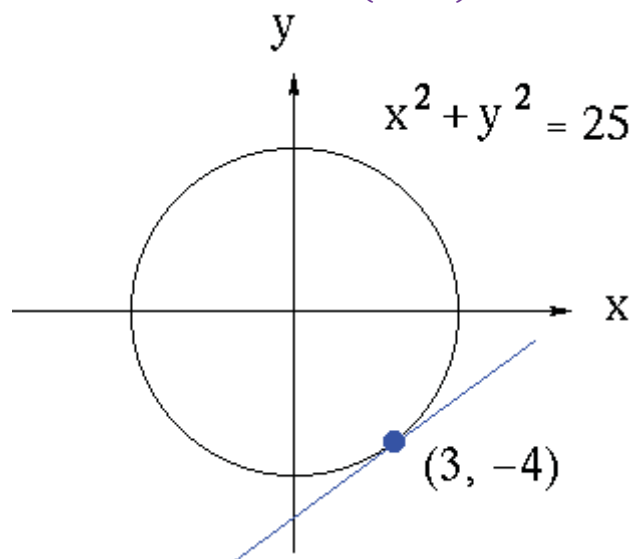
اما، بعضی از تابع ها بطور ضمنی یک تابع از x هستند. که به آنها می گویند **تابع ضمنی**

Implicit Function

مثلا معادله زیر را ملاحظه کنید.

$$x^2 + y^2 = 25$$

که میدانید، معادله یک دایره است به شعاع ۵ و مرکز، مبدا مختصات. فرض کنید می خواهیم شیب خط مماس بر نمودار این معادله را در نقطه $(3, -4)$ پیدا کنیم.



در این مثال چگونه مشتق y را می توان پیدا کرد؟ یک راه این است که y را بطور آشکار بصورت تابعی از x بنویسیم. پس

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

در رابطه بالا، ریشه دوم مثبت، نمایش نیم دایره بالا و ریشه دوم منفی، نمایش نیم دایره پایین است. چون نقطه $(3, -4)$ در نیم دایره پائینی است، یعنی

$$y = -\sqrt{25 - x^2}$$

از رابطه بالا مشتق می گیریم.

$$y' = -\left(\frac{1}{2}\right)(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

لذا، شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $(3, -4)$ می شود

$$m = y' = \frac{3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = \frac{3}{4}$$

اما، متأسفانه همه معادله هایی که شامل x و y هستند، نمی توان بطور آشکار برای y حل کرد. پس مشتق این گونه تابع ها را بطور **ضمنی Implicitly** پیدا می کنیم. بخاطر بیاورید مثلاً برای پیدا کردن مشتق یک تابع به توان دو از قاعده زنجیره ای استفاده می کنیم. اگر مشتق را با حرف D مشخص کنیم، داریم.

$$D\{(f(x))^2\} = 2f(x)D\{f(x)\} = 2f(x)f'(x)$$

حالا بر می گردیم به معادله دایره بالا و از آن بطور ضمنی مشتق می گیریم. یعنی y را تابعی از x فرض می کنیم و از معادله زیر بر حسب x مشتق می گیریم.

$$x^2 + y^2 = 25$$

از دو طرف معادله مشتق می گیریم.

$$D(x^2 + y^2) = D(25)$$

$$D(x^2) + D(y^2) = D(25)$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

پس شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $(3, -4)$ می شود.

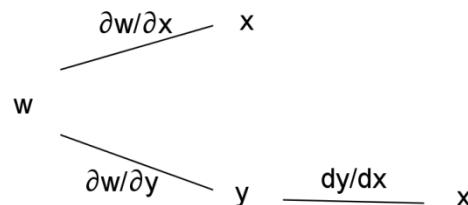
$$m = y' = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

پس از طریق قاعده زنجیره ای، بهتر می توانیم مشتق گیری ضمنی را انجام دهیم. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۸ - فرض کنید $w = f(x, y)$ و $y = g(x)$ باشد. یک فرمول برای $\frac{dw}{dx}$ پیدا کنید.

پاسخ

نمودار درختی مناسب، در زیر می آید.



پس داریم.

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (۳)$$

در فرمول بالا $\frac{\partial w}{\partial x}$ مربوط است به مشتق پاره ای $z = w(x, y)$ نسبت به x ، در صورتی که $\frac{dw}{dx}$

مربوط است به مشتق $z = f(x, g(x))$ نسبت به x .

حالا فرض می کنیم f یک تابع دو متغیره است که مشتق های پاره ای دارد، و فرض می کنیم که

معادله $f(x, y) = 0$ یک تابع مشتق پذیر $y = g(x)$ را تعریف می کند، بطوری که

$f(x, g(x)) = 0$ باشد. اگر $w = f(x, y)$ باشد، پس بر اساس فرض بالا

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} (f(x, g(x))) = \frac{d}{dx} (0) = 0$$

پس بر اساس شماره (۳) داریم.

$$0 = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

و در نهایت، اگر $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ باشد، پس با حل کردن معادله بالا برای $\frac{dy}{dx}$ داریم.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial y}} \quad (۴)$$

مثال ۹ - فرض کنید $x^3 + y^3 = 2xy$ باشد. مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

پاسخ

فرض می کنیم $w = x^3 + y^3 - 2xy$ باشد. پس

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 - 2y \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2 - 2x$$

بر اساس (۴)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{-(3x^2 - 2y)}{3y^2 - 2x} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$$

تمرینات ۵.۴

در تمرینات زیر $\frac{dz}{dt}$ را پیدا کنید.

- ۱) $z = 2x^2 - 3y^3; x = \sqrt{t}, y = e^t$
- ۲) $z = \sin x + \cos xy; x = t^2, y = 1$
- ۳) $z = \sqrt{2x - 4y}; x = \ln t, y = 1 - 3t^2$

در تمرینات زیر $\frac{\partial z}{\partial v}$ و $\frac{\partial z}{\partial u}$ را پیدا کنید.

- ۴) $z = \frac{4}{xy} - \frac{x}{y}; x = u^2, y = uv$
- ۵) $z = \ln(x^2 - y^3); x = u - v, y = u^2 + v^2$

در تمرینات زیر $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$ را محاسبه کنید.

- ۶) $z = \sin^2 u \cos^3 v; u = (r + s)^2, v = (r - s)^2$
- ۷) $z = ue^v + ve^{-u}; u = \ln r, s = \ln r$

در تمرینات زیر $\frac{dw}{dt}$ را محاسبه کنید.

- ۸) $w = \frac{x}{y} - \frac{z}{x}; x = \sin t, y = \cos t, z = \tan t$
- ۹) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = e^t, y = e^{-t}, z = 2t$
- ۱۰) $w = \sin xy^2 z^3; x = 3t, y = t^{1/2}, z = t^{1/3}$

در تمرینات زیر $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$ را پیدا کنید.

$$۱۱) w = \frac{yz}{x^2 + xy}; x = u^2, y = v^2, z = u^2 - v^2$$

$$۱۲) w = y \ln xz; x = ve^u, y = u^2 v^2, z = ue^v$$

در تمرینات زیر از طریق مشتق گیری ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$$۱۳) x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + 5 = 0$$

$$۱۴) x^2 + y^2 + \sin xy^2 = 0$$

$$۱۵) x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 1}$$

در تمرین زیر، فرض کنید معادله داده شده، z بطور ضمنی تابع x و y است. با استفاده از مشتق گیری پاره ای بطور ضمنی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

$$۱۶) x - yz + \cos xyz = 2$$

۱۷ - فرض کنید $z = f(x - y)$ باشد. نشان دهید $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$ است.

پاسخ تمرینات ۵.۴

در تمرینات زیر $\frac{dz}{dt}$ را پیدا کنید.

$$۱) \quad z = \sqrt{x} - \sqrt[3]{y}; x = \sqrt{t}, y = e^{\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{3} y^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{t} e^{\sqrt{t}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{3} e^{\sqrt{t}} \left(\sqrt{t} e^{\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{2t} - \frac{1}{3} \sqrt{t} e^{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$۲) \quad z = \sin x + \cos xy; x = t^{\sqrt{2}}, y = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (\cos x - y \sin xy) (\sqrt{2} t^{\sqrt{2}-1}) + (-x \sin xy) (0) \\ &= \sqrt{2} t^{\sqrt{2}-1} (\cos t^{\sqrt{2}} - \sin t^{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

$$۳) \quad z = \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}}; x = \ln t, y = 1 - \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}}} \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{-\frac{1}{3} t^{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}}} (-\frac{1}{3} \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}}} \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}-1}}) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{3} \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}}} \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}-1}}}{2t \sqrt{\sqrt{\ln t} - \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{t^{\sqrt{2}}}}}} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$ را پیدا کنید.

$$۴) \quad z = \frac{\sqrt[3]{x}}{xy} - \frac{x}{y}; x = u^{\sqrt{2}}, y = uv$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{x^2 y} - \frac{1}{y} \right) (\sqrt{2} u^{\sqrt{2}-1}) + \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{x y^2} + \frac{x}{y^2} \right) (v) \\ &= \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{u^{\sqrt{2}+1} v} - \frac{1}{uv} \right) (\sqrt{2} u^{\sqrt{2}-1}) + \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{u^{\sqrt{2}} v^2} + \frac{1}{v^2} \right) (v) = \frac{-\sqrt[3]{2} - u^{\sqrt{2}}}{u^{\sqrt{2}+1} v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{x^2 y} - \frac{1}{y} \right) (0) + \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{x y^2} + \frac{x}{y^2} \right) (u) \\ &= \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{u^{\sqrt{2}} v^2} + \frac{1}{v^2} \right) (u) = \frac{-\sqrt[3]{x} + u^{\sqrt{2}}}{u^{\sqrt{2}+1} v^2} \end{aligned}$$

$$۵) \quad z = \ln(x^2 - y^2); x = u - v, y = u^2 + v^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 - y^2} (1) - \frac{2y}{x^2 - y^2} (2u) \\ &= \frac{2(u - v) - 4u(u^2 + v^2)}{(u - v)^2 - (u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{x^2 - y^2} (-1) - \frac{2y}{x^2 - y^2} (2v) \\ &= \frac{-2(u - v) - 4v(u^2 + v^2)}{(u - v)^2 - (u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$ را محاسبه کنید.

$$۶) \quad z = \sin^2 u \cos^3 v; u = (r + s)^2, v = (r - s)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= (2 \cos^3 u \cos^3 v) (2(r + s)) + (-3 \sin^2 u \sin^2 v) (2(r - s)) \\ &= 4(r + s) \cos [2(r + s)^2] \cos [2(r - s)^2] \\ &\quad - 6(r - s) \sin [2(r + s)^2] \sin [2(r - s)^2] \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= (2 \cos^3 u \cos^3 v) (2(r + s)) + (-3 \sin^2 u \sin^2 v) (-2(r - s)) \\ &= 4(r + s) \cos [2(r + s)^2] \cos [2(r - s)^2] \\ &\quad + 6(r - s) \sin [2(r + s)^2] \sin [2(r - s)^2] \end{aligned}$$

$$۷) \quad z = ue^v + ve^{-u}; u = \ln r, s \ln r$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= (e^v - ve^{-u}) \left(\frac{1}{r} \right) + (ue^v + e^{-u}) \left(\frac{s}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(r^s - \frac{s}{r} \ln r \right) + \frac{s}{r} \left(r^s \ln r + \frac{1}{r} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= (e^v - ve^{-u})(0) + (ue^v + e^{-u})(\ln r) \\ &= \left(r^s \ln r + \frac{1}{r} \right) \ln r \end{aligned}$$

در تمرینات زیر $\frac{dw}{dt}$ را محاسبه کنید.

$$۸) \quad w = \frac{x}{y} - \frac{z}{x}; x = \sin t, y = \cos t, z = \tan t$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \left(\frac{1}{y} + \frac{z}{x^2} \right) (\cos t) - \frac{x}{y^2} (-\sin t) - \frac{1}{x} (\sec^2 t) \\ &= 1 + \csc t + \tan^2 t - \csc t \sec^2 t \end{aligned}$$

$$۹) \quad w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = e^t, y = e^{-t}, z = t$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (e^t) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (-e^{-t}) + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (1) \\ &= \frac{e^{2t} - e^{-2t} + t}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + t^2}} \end{aligned}$$

$$۱۰) w = \sin xy^2 z^3; x = 3t, y = t^{1/2}, z = t^{1/3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (y^2 z^3 \cos xy^2 z^3)(3) + (2xyz^3 \cos xy^2 z^3)\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) + (3xy^2 z^2 \cos xy^2 z^3)\left(\frac{1}{3}t^{-2/3}\right) \\ &= 9t^2 \cos 3t^2 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر $\frac{\partial w}{\partial v}$ و $\frac{\partial w}{\partial u}$ را پیدا کنید.

$$۱۱) w = \frac{yz}{x^2 + xy}; x = u^2, y = v^2, z = u^2 - v^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \frac{-yz(2x+y)}{x^2(x+y)^2}(2u) + \frac{\partial w}{\partial y}(0) + \frac{y}{x(x+y)}(2u) \\ &= \frac{-v^2(u^2 - v^2)(2u^2 + v^2)2u + v^2(2u)[u^2(u^2 + v^2)]}{u^2(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{2v^2(-u^4 + 2u^2v^2 + v^4)}{u^2(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}(0) + \frac{(x^2 + xy)z - yzx}{x^2(x+y)^2}(2v) + \frac{y}{x(x+y)}(-2v) \\ &= \frac{u^2(u^2 - v^2)(2v) - v^2(2v)[u^2(u^2 + v^2)]}{u^2(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{2v(u^4 - 2u^2v^2 - v^4)}{u^2(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

$$۱۲) w = y \ln xz; x = ve^u, y = u^r v^r, z = ue^v$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \frac{y}{x} (ve^u) + (\ln xz) (r u^{r-1} v^r) + \frac{y}{z} e^v \\ &= \frac{u^r v^r}{ve^u} (ve^u) + r u^{r-1} v^r \ln(ve^u ue^v) + \frac{u^r v^r}{ue^v} e^v \\ &= uv^r [1 + u + r \ln(uve^u e^v)] \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \frac{y}{x} (e^u) + (\ln xz) (r u^r v^{r-1}) + \frac{y}{z} (ue^v) \\ &= \frac{u^r v^r}{ve^u} (e^u) + r u^r v^{r-1} \ln(ve^u ue^v) + \frac{u^r v^r}{ue^v} (ue^v) \\ &= u^r v^r [1 + v + r \ln(uve^u e^v)] \end{aligned}$$

در تمرینات زیر از طریق مشتق گیری ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$$۱۳) x^r + r x^r y - r x y^r + r y^r + 5 = 0$$

فرض می کنیم

$$z = x^r + r x^r y - r x y^r + r y^r + 5 =$$

باشد، پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{-r x^r - r x y + r y^r}{r x^r - r x y + r y^r}$$

$$۱۴) x^r + y^r + \sin xy^r = 0$$

فرض می کنیم

$$z = x^r + y^r + \sin xy^r$$

باشد، پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{-r x - y^r \cos xy^r}{r y + r x y \cos xy^r}$$

$$۱۵) \quad x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 1}$$

فرض می کنیم

$$z = x^2 - \frac{y^2}{y^2 - 1}$$

باشد، پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{-2x}{\frac{2y}{(y^2 - 1)^2}} = \frac{-x(y^2 - 1)^2}{y}$$

در تمرین زیر، فرض کنید معادله داده شده، z بطور ضمنی تابع x و y است. با استفاده از مشتق گیری پاره ای بطور ضمنی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

$$۱۶) \quad x - yz + \cos xyz = 2$$

فرض می کنیم

$$w = x - yz + \cos xyz - 2$$

باشد، پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{-1 + yz \sin xyz}{-y - xy \sin xyz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{z + xz \sin xyz}{-y - xy \sin xyz}$$

۱۷ - فرض کنید $z = f(x - y)$ باشد. نشان دهید $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$ است.

پاسخ

اگر فرض کنیم $u = x - y$ باشد، پس $z = f(u)$ است. لذا

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dz}{du}$$

است، لذا

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

۵.۵ - مشتق های جهت دار Directional Derivatives

در بخش قبل در مورد مشتق های پاره ای یک تابع صحبت کردیم. می توان چنین تصور کرد که مشتق پاره ای یک تابع عبارت است از میزان یا نرخ تغییر تابع در راستای خطوطی موازی محور های مختصات. حالا می خواهیم در مورد نرخ تغییرات در راستای خطوطی که الزاما موازی محور های مختصات نیستند، بحث کنیم.

تعریف مشتق های جهت دار Definition of Directional Derivatives

فرض می کنیم f تابعی است که در یک مجموعه که شامل یک دیسک D که مرکز آن (x_0, y_0) است، تعریف شده باشد. و فرض می کنیم $u = a_1 i + a_2 j$ یک بردار واحد باشد. پس **مشتق جهت دار f در (x_0, y_0) در جهت u** که با نماد $D_u f(x_0, y_0)$ نشان می دهیم به طریق زیر تعریف می شود.

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1 + y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

توجه کنید که اگر $u = i$ باشد، پس

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

است. و اگر $u = j$ باشد، پس

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0)$$

لذا، مشتق های پاره ای مرتبه اول، حالت های مخصوص مشتق های جهت دار هستند، در جهت های قسمت مثبت محور های مختصات. نتیجه این که، اگر f در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد، هر مشتق جهت دار را می توان بوسیله این دو مشتق های پاره ای پیدا کرد.

قضیه مشتق های جهت دار Directional Derivatives Theorem

فرض می کنیم f در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد، پس f یک مشتق جهت دار در (x_0, y_0) در تمام جهت ها دارد. علاوه بر این، اگر $u = a_1 i + a_2 j$ یک بردار واحد باشد، پس

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a_1 + f_y(x_0, y_0)a_2 \quad (1)$$

مثال ۱ - فرض کنید $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ و $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)j$ باشد. مطلوب

است $D_u f(1, 2)$

پاسخ

می دانید که u یک بردار واحد است. $D_u f(1, 2)$ را با استفاده از شماره (۱) محاسبه می کنیم. برای این کار مشتق های پاره ای f را پیدا می کنیم.

$$f_x(x, y) = -6x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -2y$$

پس

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= f_x(1, 2) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + f_y(1, 2) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (-6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (-4) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

در عبارت $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ ، نماد $\mathbf{u}$ نمایش یک بردار واحد است. مشتق جهت دار در راستای یک بردار اختیاری غیر صفر $\mathbf{a}$ ، نماد $\mathbf{u}$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}$$

یعنی اگر $\mathbf{u}$ بردار واحد نباشد مطابق فرمول بالا $\mathbf{u}$ را پیدا می کنیم.

مثال ۲ فرض کنید $f(x, y) = xy^2$ و $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ باشد. مشتق جهت دار f در $(-3, 1)$ در جهت $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

پاسخ

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

پس

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$$

و چون

$$f_x(x, y) = y^2 \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 2xy$$

است، پس بر اساس (۱) داریم.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(-3, 1) &= f_x(-3, 1) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + f_y(-3, 1) \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= 1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + (-6) \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{13}{5} \sqrt{5} \end{aligned}$$

برای تعریف مشتق جهت دار تابع های سه متغیره ، فقط کافی است تغییرات لازم در نماد انجام دهیم. فرض می کنیم $u = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ یک بردار واحد در فضا باشد. **مشتق جهت دار** $D_u f(x_0, y_0, z_0)$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, z_0 + ha_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد. علاوه بر این اگر f در (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر باشد ، قضیه مشابه تابع های دو متغیره ، اینجا هم صادق است. یعنی

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)a_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)a_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)a_3 \quad (۲)$$

مانند قبل ، اگر a یک بردار غیر صفر در فضا باشد ، پس مشتق جهت دار f در (x_0, y_0, z_0) در جهت a چنین تعریف می کنیم.

$$D_u f(x_0, y_0, z_0)$$

در عبارت بالا

$$u = \frac{1}{\|a\|} a$$

مثال ۳ - فرض کنید $f(x, y, z) = x e^{y^2 z}$ و $a = i - j + \sqrt{2} k$ باشد. مطلوب است مشتق

جهت دار f در $(2, 1, 0)$ در جهت a .

پاسخ

ابتدا مشتق های پاره ای f پیدا می کنیم.

$$f_x(x, y, z) = e^{y^2 z} , \quad f_y(x, y, z) = 2xyze^{y^2 z} , \quad f_z(x, y, z) = xy^2 e^{y^2 z}$$

چون $\|a\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ است ، شماره (۲) را بکار می بریم.

$$u = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$D_u f(2, 1, 0) = f_x(2, 1, 0) \left(\frac{1}{2} \right) + f_y(2, 1, 0) \left(-\frac{1}{2} \right) + f_z(2, 1, 0) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{1}{2} \right) + 0 \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

تمرینات ۵.۵

در تمرینات زیر مشتق جهت دار f در نقطه P در جهت $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15; P = (1, 1); \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$۲) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; P = (3, 4); \mathbf{a} = \frac{1}{5}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{5}\mathbf{j}$$

$$۳) \quad f(x, y) = e^{xy}; P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \mathbf{a} = 4\mathbf{i}$$

$$۴) \quad f(x, y) = \tan(x + 2y); P = \left(0, \frac{\pi}{6}\right); \mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

$$۵) \quad f(x, y, z) = x^2 y^2 z; P = (2, -1, 2); \mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$۶) \quad f(x, y, z) = \frac{x - y - z}{x + y + z}; P = (2, 1, -1); \mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

پاسخ تمرینات ۵.۵

در تمرینات زیر مشتق جهت دار f در نقطه P در جهت $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

$$1) \quad f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + 15; P = (1, 1); \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$f_x(x, y) = 2x - 3y \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -3x + 2y \quad \text{و} \quad \|\mathbf{a}\| = 1$$

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = f_x(1, 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f_y(1, 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$2) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; P = (3, 4); \mathbf{a} = \frac{1}{5}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{5}\mathbf{j}$$

$$f_x(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\|\mathbf{a}\| = 1$$

$$D_{\mathbf{u}}f(3, 4) = f_x(3, 4)\left(\frac{1}{5}\right) + f_y(3, 4)\left(\frac{-\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{96 + 72\sqrt{3}}{625}$$

$$3) \quad f(x, y) = e^{xy}; P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \mathbf{a} = 4\mathbf{i}$$

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 4e^{xy} \quad \text{و} \quad \|\mathbf{a}\| = 4$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \mathbf{i}$$

$$D_{\mathbf{u}}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(1) + f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(0) = 0$$

$$۴) \quad f(x, y) = \tan(x + ۲y); P = \left(0, \frac{\pi}{۶}\right); \mathbf{a} = -۴\mathbf{i} + ۵\mathbf{j}$$

$$f_x(x, y) = \sec^۲(x + ۲y) \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = ۲ \sec^۲(x + ۲y) \quad \text{و} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{۴۱}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{-۴}{\sqrt{۴۱}}\mathbf{i} + \frac{۵}{\sqrt{۴۱}}\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f\left(0, \frac{\pi}{۶}\right) &= f_x\left(0, \frac{\pi}{۶}\right)\left(\frac{-۴}{\sqrt{۴۱}}\right) + f_y\left(0, \frac{\pi}{۶}\right)\left(\frac{۵}{\sqrt{۴۱}}\right) \\ &= \frac{-۱۶}{\sqrt{۴۱}} + \frac{۲۰}{\sqrt{۴۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۴۱}} \end{aligned}$$

$$۵) \quad f(x, y, z) = x^۲y^۲z; P = (۲, -۱, ۲); \mathbf{a} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$f_x(x, y, z) = ۲x^۱y^۲z \quad \text{و} \quad f_y(x, y, z) = ۲x^۲y^۱z \quad \text{و} \quad f_z(x, y, z) = x^۲y^۲$$

$$\|\mathbf{a}\| = ۳ \quad \text{و} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{۲}{۳}\mathbf{i} - \frac{۱}{۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۳}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(۲, -۱, ۲) &= f_x(۲, -۱, ۲)\left(\frac{۲}{۳}\right) + f_y(۲, -۱, ۲)\left(\frac{-۱}{۳}\right) + f_z(۲, -۱, ۲)\left(\frac{-۲}{۳}\right) \\ &= ۱۶ + \frac{۳۲}{۳} - \frac{۱۶}{۳} = \frac{۶۴}{۳} \end{aligned}$$

$$۶) \quad f(x, y, z) = \frac{x - y - z}{x + y + z}; P = (۲, ۱, -۱); \mathbf{a} = -۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$f_x(x, y, z) = \frac{(x + y + z) - (x - y - z)}{(x + y + z)^۲} = \frac{۲y + ۲z}{(x + y + z)^۲}$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{-(x + y + z) - (x - y - z)}{(x + y + z)^۲} = \frac{-۲x}{(x + y + z)^۲}$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{-(x + y + z) - (x - y - z)}{(x + y + z)^۲} = \frac{-۲x}{(x + y + z)^۲}$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{۶} \quad \text{و} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{-۲}{\sqrt{۶}}\mathbf{i} - \frac{۱}{\sqrt{۶}}\mathbf{j} - \frac{۱}{\sqrt{۶}}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{u}}f(2, 1, -1) &= f_x(2, 1, -1) \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} \right) + f_y(2, 1, -1) \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right) + f_z(2, 1, -1) \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \\
 &= 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

۵.۶ - گرادیان Gradient

گرادیان در بعضی از کتب فارسی زبان، به شیب یا شیب خط و یا ضریب زاویه ترجمه شده است. اما، ما همان کلمه رادیان که کلی تر است بکار می بریم. اکثر کتب هم کلمه رادیان بکار برده اند.

بوسیله مشتق های پاره ای مرتبه اول یک تابع، می توان یک بردار را تعریف کرد بنام گرادیان. این بردار در تجزیه و تحلیل مشتق های جهت دار نقش مهمی دارد. این بردار نقش مهمی در تعریف صفحه مماس بر نمودار یک تابع دو متغیره بازی می کند. و اهمیت مخصوصی در کاربرد های فیزیکی دارد. برای محاسبه شیب یک نمودار، یا تغییرات یک تابع می توان از مفهوم گرادیان استفاده کرد. مثلا، تصویر کنید شما در نقطه $(x_0, y_0, \dots)$ در ورودی فضای f ایستاده آید، بردار $(x_0, y_0, \dots)$ به شما می گوید در چه جهتی باید حرکت کنید تا مقدار خروجی f با سرعت بیشتری افزایش پیدا کند.

تعریف گرادیان Definition of Gradient

الف - فرض می کنیم f یک تابع دو متغیره باشد که در (x_0, y_0) مشتق های پاره ای دارد. پس گرادیان f در (x_0, y_0) که با نماد $\text{grad } f(x_0, y_0)$ و یا $\nabla f(x_0, y_0)$ نشان داده می شود، مطابق زیر تعریف می شود.

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

ب - فرض می کنیم f یک تابع سه متغیره باشد که در (x_0, y_0, z_0) مشتق های پاره ای دارد. پس گرادیان f در (x_0, y_0, z_0) که با نماد $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ و یا $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ نشان داده می شود، مطابق زیر تعریف می شود.

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \nabla(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

نماد ∇ خوانده می شود “دل”

نماد grad خوانده می شود “گراد”

توجه کنید نماد ∇ وارونه دلتا Δ است. این دو نماد با هم اشتباه نشود.

مثال ۱ - فرض کنید $f(x, y) = \sin xy$ باشد، یک فرمول برای گرادیان f پیدا کنید. و

$$\text{grad } f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) \text{ را محاسبه کنید.}$$

پاسخ

$$\text{grad } f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = y \cos xy\mathbf{i} + x \cos xy\mathbf{j}$$

$$\text{grad } f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \cos \frac{\pi}{3}\mathbf{i} + \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\pi}{6}\mathbf{j}$$

مثال ۲ - فرض کنید $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ باشد. یک فرمول برای گرادیان f پیدا کنید و $\nabla f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\right)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k} \\ &= \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\end{aligned}$$

چون $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-3)^2 = 14$ پس

$$\nabla f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\right) = \frac{1}{14\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right)$$

اگر f یک تابع دو متغیره باشد و در (x_0, y_0) مشتق پذیر، و اگر $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ یک بردار واحد در صفحه xy باشد، پس

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} &= \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \\ &= f_x(x_0, y_0)a_1 + f_y(x_0, y_0)a_2\end{aligned}$$

پس بر اساس شماره (۱) بخش ۵.۵ داریم.

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = [\text{grad } f(x_0, y_0)] \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

فرمول بالا رابطه مشتق جهت دار با گرادیان و جهت $\mathbf{u}$ را نشان می دهد. اگر $\text{grad } f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$

پس شماره (۱) می گوید $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = 0$ است، برای هر انتخاب $\mathbf{u}$.

اگر $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ باشد، پس می توانیم بیشترین مقدار $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ را به صورت یک تابع $\mathbf{u}$ مشخص کنیم. علاوه بر این می توانیم جهتی را که $\mathbf{u}$ این مقدار $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ ایجاد می کند، مشخص کنیم. فرض می کنیم $\mathbf{u}$ یک بردار واحد در صفحه مختصات xy باشد، و فرض می کنیم

ϕ یک زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\text{grad } f(x_0, y_0)$ باشد. بر اساس شماره (۱) نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= [\text{grad } f(x_0, y_0)] \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| \cos \phi \\ &= \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| \cos \phi\end{aligned}$$

از فرمول بالا نتیجه می شود که بیشترین مقدار $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ عبارت است از

$\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|$ و این هنگامی اتفاق می افتد که $\phi = 0$ باشد، یعنی $\mathbf{u}$ در همان جهت $\text{grad } f(x_0, y_0)$ باشد.

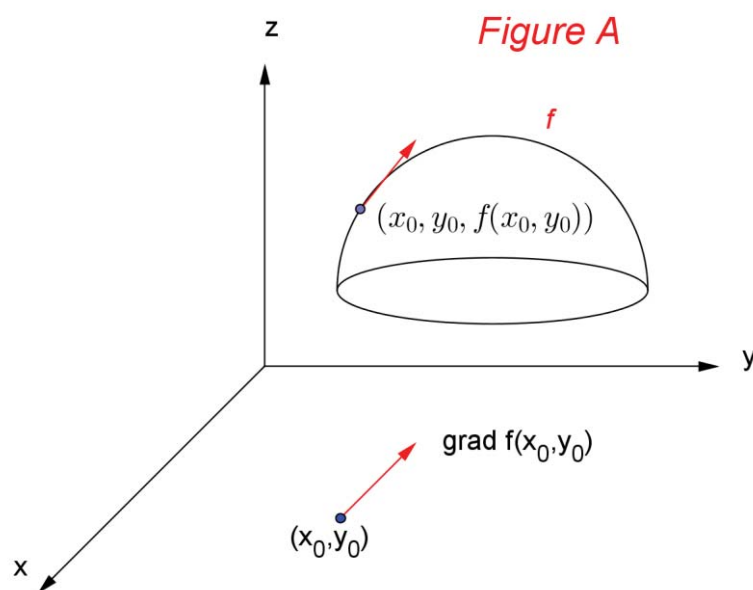
نتیجه مطالب فوق را در قضیه زیر خلاصه می کنیم.

Maximum Value of Directional Derivative قضیه مقدار ماکسیمم مشتق جهت دار

برای تابع های دو متغیره

فرض می کنیم f یک تابع دو متغیره باشد و در (x_0, y_0) مشتق پذیر.الف - برای یک بردار واحد u داریم.

$$D_u f(x_0, y_0) = [\text{grad } f(x_0, y_0)] \cdot u$$

ب - مقدار ماکسیمم $D_u f(x_0, y_0)$ مساوی است با $\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|$ ج - اگر $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$ باشد، پس $D_u f(x_0, y_0)$ به عنوان یک تابع u ، به مقدار ماکسیمم می رسد هنگامی که u در همان جهت $\text{grad } f(x_0, y_0)$ باشد.

قضیه بالا قسمت ج می توان مطابق زیر تفسیر کرد.

در (x_0, y_0) تابع f در جهت $\text{grad } f(x_0, y_0)$ به سرعت افزایش می یابدمخصوصا، قضیه می گوید در $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ نمودار f تند ترین شیب در جهت گرادیان دارد. تصویر Aپس اگر این نمودار، نمایش سطح یک کوه باشد، پس در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ کوه تند ترین شیب در جهت گرادیان دارد.مثال ۳ - فرض کنید $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ باشد، مشخص کنید f در نقطه $(1, 2)$ در کدام جهت سریع تر افزایش می یابد.

پاسخ

بر اساس مثال ۱ بخش ۵.۵ داریم.

$$f_x(x, y) = -6x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -2y$$

پس

$$\text{grad } f(1, 2) = f_x(1, 2)\mathbf{i} + f_y(1, 2)\mathbf{j} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

پس f در نقطه $(1, 2)$ در جهت $-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ سریع تر افزایش می یابد.

اثبات قضیه زیر ، مانند توضیحاتی است که برای تابع های دو متغیره داده شد.

قضیه مقدار ماکسیمم مشتق جهت دار Maximum Value of Directional Derivative

برای تابع های سه متغیره

فرض می کنیم f یک تابع سه متغیره باشد و در (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر.

الف - برای یک بردار واحد $\mathbf{u}$ داریم.

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = [\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)] \cdot \mathbf{u}$$

ب - مقدار ماکسیمم $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ مساوی است با $\|\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)\|$

ج - اگر $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ باشد ، پس $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ به عنوان یک تابع $\mathbf{u}$ ، به مقدار

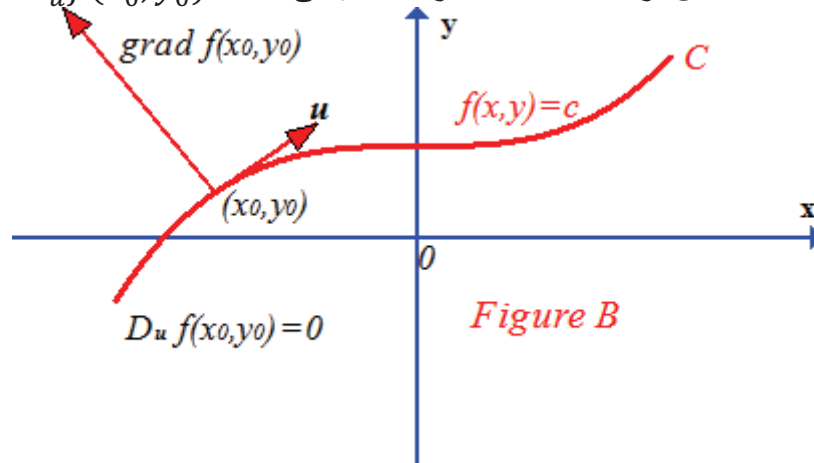
ماکسیمم می رسد هنگامی که $\mathbf{u}$ در همان جهت $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ باشد.

گرادیان به عنوان یک بردار نرمال یا عمودی The Gradient as a Normal Vector

فرض کنید یک منحنی هموار C ، نمایش منحنی تراز یک تابع f باشد که در نقطه (x_0, y_0) روی C مشتق پذیر است. هنگامی که یک نقطه (x, y) در امتداد C حرکت می کند ، بر اساس فرض بالا

مقدار $f(x, y)$ ثابت است ، و در نتیجه تغییر نمی کند. این یعنی در (x_0, y_0) میزان تغییر f در

جهت بردار واحد $\mathbf{u}$ که مماس بر C باشد ، صفر است. یعنی $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = 0$ تصویر B



اما شماره (۱) می گوید $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = 0$ است برای هر بردار واحد $\mathbf{u}$ که عمود بر $\text{grad } f(x_0, y_0)$ باشد. با جمع کردن این نتایج ، می توان پیش بینی کرد که $\text{grad } f(x_0, y_0)$ عمود و در نهایت نرمال بر C در نقطه (x_0, y_0) است. تصویر B .

قضیه نرمال بر منحنی تراز Normal to the Level Curve

فرض می‌کنیم f در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد، و فرض می‌کنیم $f(x_0, y_0) = c$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم C منحنی تراز $f(x, y) = c$ که از (x_0, y_0) می‌گذرد، باشد. اگر C هموار باشد و $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$ پس $\text{grad } f(x_0, y_0)$ در (x_0, y_0) نرمال است بر C

اثبات

فرض می‌کنیم I یک بازه باشد. و

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in I$$

یک پارامتری شده هموار C باشد. چون $f(x, y) = f(x(t), y(t))$ است برای $t \in I$ ، قاعده زنجیره ای می‌گوید که

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = [\text{grad } f(x(t), y(t))] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

اما $f(x(t), y(t)) = c$ است برای $t \in I$ بطوری که

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = 0$$

است. در نتیجه

$$0 = [\text{grad } f(x(t), y(t))] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

چون $\mathbf{r}$ بر اساس فرض قضیه، هموار است، پس $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ که مماس بر C است، غیر صفر است. لذا $\text{grad } f(x_0, y_0)$ که باز بر اساس فراز قضیه، غیر صفر است، عمود است بر بردار مماس بر C در نقطه (x_0, y_0) و در نتیجه نرمال است بر C در نقطه (x_0, y_0) .

مثال ۴- فرض کنید $x^2 - xy + 3y^2 = 5$ یک منحنی هموار باشد. یک بردار واحد که در نقطه $(1, -1)$ عمود بر منحنی باشد، پیدا کنید.

پاسخ

فرض می‌کنیم $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$ باشد، پس منحنی داده شده، منحنی تراز

$$f(x, y) = 5$$

است. چون $f(1, -1) = 5$ است، پس نقطه $(1, -1)$ روی منحنی تراز داده شده است. بر اساس قضیه بالا $\text{grad } f(1, -1)$ عمود است بر منحنی داده شده در $(1, -1)$ پس داریم.

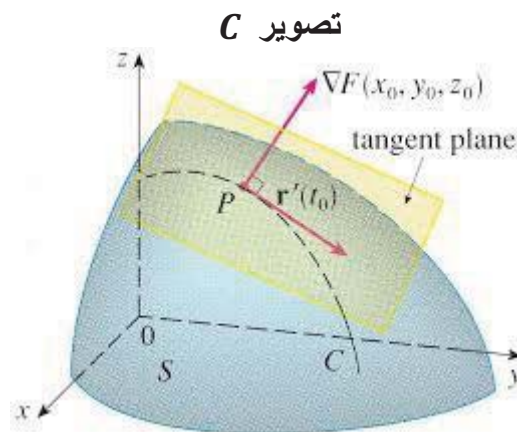
$$\text{grad } f(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (-x + 6y)\mathbf{j}$$

و

$$\text{grad } f(1, -1) = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$$

لذا بردار واحد زیر، بردار ی است که می‌خواستیم.

$$\frac{1}{\|3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}\|} (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{58}} (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j})$$



حالا فرض می‌کنیم F یک تابع سه متغیره است که در نقطه (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر است و فرض می‌کنیم $F(x_0, y_0, z_0) = c$ است. اگر C یک منحنی هموار روی رویه تراز $F(x, y, z) = c$ باشد، رویه آبی رنگ در تصویر C ، و اگر C از نقطه (x_0, y_0, z_0) عبور کند، پس مانند اثبات قضیه بالا، اگر $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ پس $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ عمود است بر بردار مماس بر C در نقطه (x_0, y_0, z_0) . ملاحظه می‌کنید که در تصویر C بردار $\mathbf{r}'$ مماس است بر C و گرادیان ∇F عمود است بر این بردار مماس.

حال چون $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ عمود است بر بردار مماس بر هر منحنی مانند C در (x_0, y_0, z_0) پس تمام چنین مماس‌ها بی‌روی یک صفحه بنام صفحه مماس قرار می‌گیرند. صفحه مماس در تصویر بالا به رنگ زرد نشان داده شده است.

تعریف

فرض می‌کنیم f در یک نقطه (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر باشد، این نقطه روی رویه تراز f بنام S است. در تصویر C رویه تراز به رنگ آبی است. اگر $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ باشد پس صفحه‌ای که از (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و نرمال آن $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ است، صفحه‌ای است مماس بر S در (x_0, y_0, z_0) و $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ نرمال است بر S .

تعریف بالا را می‌توان چنین خلاصه کرد: صفحه مماس مجموعه خطوط مماس است. یا به عبارت دیگر کلیه خطوط مماس روی صفحه مماس قرار دارند.

چون

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

است و چون $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ نرمال است بر صفحه مماس در (x_0, y_0, z_0) ، پس یک معادله برای صفحه مماس مطابق زیر است.

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

مثال ۵ - یک معادله برای صفحه مماس بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در نقطه $(-1, 1, \sqrt{2})$ پیدا کنید.

پاسخ

کره، رویه تراز $f(x, y, z) = 4$ است. بطوری که $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ است. مشتق های پاره ای f در $(-1, 1, \sqrt{2})$ مطابق زیر است.

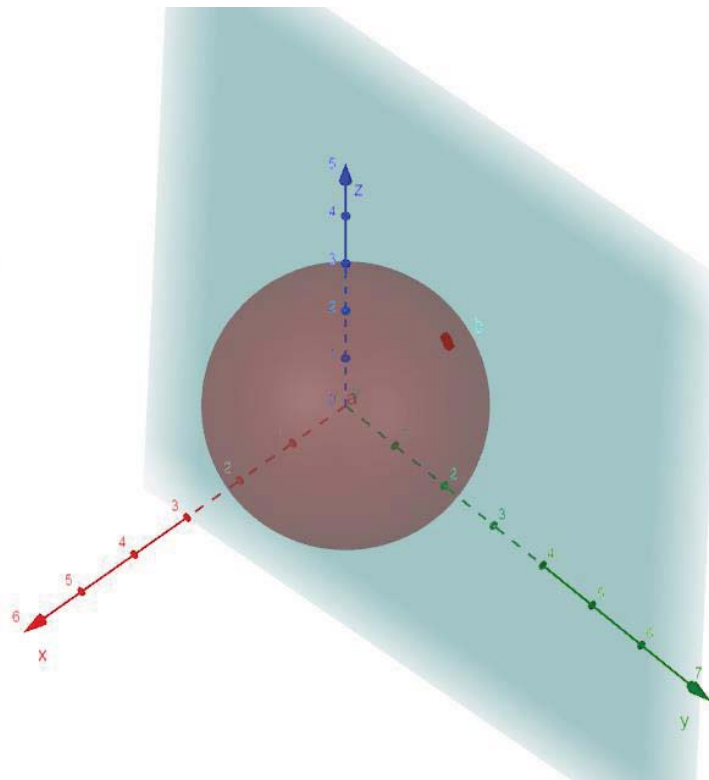
$$f_x(-1, 1, \sqrt{2}) = -2, \quad f_y(-1, 1, \sqrt{2}) = 2, \quad f_z(-1, 1, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

پس معادله صفحه مماس در نقطه $(-1, 1, \sqrt{2})$ مطابق زیر است.

$$-2(x - (-1)) + 2(y - 1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0$$

یا $-x + y + \sqrt{2}z = 4$ تصویر D کره به رنگ قرمز و صفحه مماس به رنگ آبی

Figure D



فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد که در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد. و فرض کنید

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z$$

باشد، پس نمودار f رویه تراز $g(x, y, z) = 0$ است. در نتیجه، صفحه مماس بر نمودار f در

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \text{ را صفحه مماس بر رویه تراز } g(x, y, z) = 0 \text{ در}$$

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \text{ تعریف می کنیم.}$$

چون

$$\text{grad } g(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad (2)$$

است. یک معادله برای صفحه مماس f در $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ مطابق زیر است.

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - [z - f(x_0, y_0)] = 0 \quad (3)$$

و یا

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (4)$$

و گفته می شود بردار شماره (۲) بالا، نرمال نمودار f در $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ است.

مثال ۶ - فرض کنید $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ باشد. یک بردار نرمال بر نمودار f در

$$(1, 2, -1) \text{ پیدا کنید، یک معادله برای صفحه مماس بر نمودار } f \text{ در } (1, 2, -1) \text{ پیدا کنید.}$$

پاسخ

$$f_x(x, y) = -6x \text{ و } f_y(x, y) = -2y$$

$$f_x(1, 2) = -6 \quad f_y(1, 2) = -4$$

پس بر اساس شماره (۲) یک بردار نرمال بر نمودار f در $(1, 2, -1)$ مطابق زیر است.

$$f_x(1, 2)\mathbf{i} + f_y(1, 2)\mathbf{j} - \mathbf{k} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

پس شماره (۳) می گوید یک معادله برای صفحه مماس بر f در $(1, 2, -1)$ مطابق زیر است.

$$-6(x - 1) - 4(y - 2) - (z + 1) = 0$$

و یا

$$6x + 4y + z = 13$$

تمرینات ۵.۶

در تمرینات زیر گرادیان تابع را پیدا کنید.

- ۱) $f(x, y) = 3x - 5y$
- ۲) $g(x, y) = e^{-x} \ln(y - 4)$
- ۳) $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2$
- ۴) $g(x, y, z) = \frac{-x + y}{-x + z}$

در تمرینات زیر گرادیان تابع در نقطه داده شده را پیدا کنید.

- ۵) $f(x, y) = \frac{x + 3y}{5x + 2y}; \left(-1, \frac{3}{2}\right)$
- ۶) $g(x, y) = x \ln(x + y); (-2, 3)$
- ۷) $f(x, y, z) = ze^{-x} \tan y; (0, \pi, -2)$
- ۸) $f(x, y) = e^x (\cos y + \sin y); (0, 0)$
- ۹) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2; (-1, 1)$
- ۱۰) $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^{2z}; (1, 1, -1)$

در تمرین زیر یک بردار نرمال بر نمودار معادله در نقطه داده شده، پیدا کنید. فرض کنید منحنی هموار است.

$$۱۱) \sin \pi xy = \frac{\sqrt{3}}{2}; \left(\frac{1}{6}, 2\right)$$

در تمرینات زیر یک بردار نرمال بر نمودار f در نقطه داده شده، پیدا کنید.

- ۱۲) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2; (-2, 1, 16)$
- ۱۳) $f(x, y) = 1 - x^2; (0, 2, 1)$

در تمرینات زیر یک معادله صفحه، مماس بر نمودار تابع داده شده در نقطه مشخص شده پیدا کنید.

- ۱۴) $f(x, y) = xy - x + y + 5; (0, 2, 7)$
- ۱۵) $g(x, y) = \sin \pi xy; \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$

در تمرینات زیر یک معادله صفحه، مماس بر رویه تراز داده شده در نقطه داده شده، پیدا کنید.

$$۱۶) x^2 + y^2 + z^2 = 1; \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$۱۷) xyz = 1; \left(\frac{1}{2}, -2, -1\right)$$

پاسخ تمرینات ۵.۶

در تمرینات زیر گرادیان تابع را پیدا کنید.

۱) $f(x, y) = 3x - 5y$

$$\text{grad } f(x, y) = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$$

۲) $g(x, y) = e^{-2x} \ln(y - 4)$

$$\text{grad } g(x, y) = -2e^{-2x} \ln(y - 4)\mathbf{i} + \frac{e^{-2x}}{y - 4}\mathbf{j}$$

۳) $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2$

$$\text{grad } f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 8z\mathbf{k}$$

۴) $g(x, y, z) = \frac{-x + y}{-x + z}$

$$\begin{aligned} \text{grad } g(x, y, z) &= \frac{-(-x + z) - (-x + y)(-1)}{(-x + z)^2}\mathbf{i} + \frac{1}{-x + z}\mathbf{j} - \frac{-x + y}{(-x + z)^2}\mathbf{k} \\ &= \frac{y - z}{(-x + z)^2}\mathbf{i} + \frac{1}{-x + z}\mathbf{j} + \frac{x - y}{(-x + z)^2}\mathbf{k} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر گرادیان تابع در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۵) $f(x, y) = \frac{x + 3y}{5x + 2y}; \left(-1, \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= \frac{5x + 2y - (x + 3y)(5)}{(5x + 2y)^2}\mathbf{i} + \frac{3(5x + 2y) - (x + 3y)(2)}{(5x + 2y)^2}\mathbf{j} \\ &= \frac{-13y}{(5x + 2y)^2}\mathbf{i} + \frac{13x}{(5x + 2y)^2}\mathbf{j} \\ \text{grad } f\left(-1, \frac{3}{2}\right) &= -\frac{39}{8}\mathbf{i} - \frac{13}{4}\mathbf{j} \end{aligned}$$

۶) $g(x, y) = x \ln(x + y); (-2, 3)$

$$\begin{aligned} \text{grad } g(x, y) &= \left[\ln(x + y) + \frac{x}{x + y}\right]\mathbf{i} + \frac{x}{x + y}\mathbf{j} \\ \text{grad } g(-2, 3) &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$۷) \quad f(x, y, z) = ze^{-x} \tan y; (0, \pi, -۲)$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = -ze^{-x} \tan y \mathbf{i} + ze^{-x} \sec y \mathbf{j} + e^{-x} \tan y \mathbf{k}$$

$$\text{grad } f(0, \pi, -۲) = -۲ \mathbf{j}$$

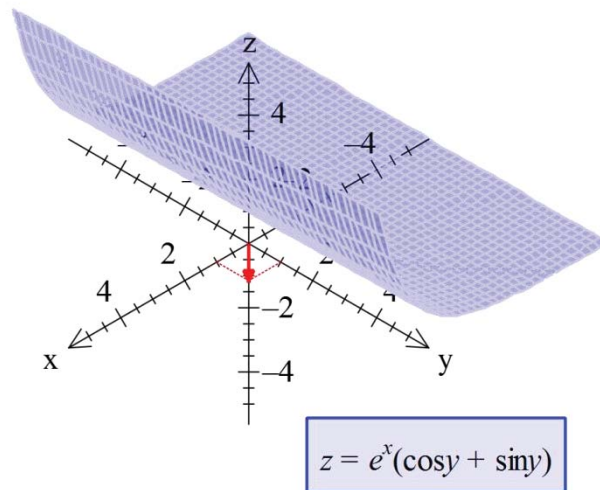
در تمرینات زیر مشخص کنید که f در نقطه داده شده در کدام جهت سریع ترین افزایش را دارد.

$$۸) \quad f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y); (0, 0)$$

$$\text{grad } f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y) \mathbf{i} + e^x(-\sin y + \cos y) \mathbf{j}$$

$$\text{grad } f(0, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

پس جهتی که f در $(0, 0)$ سریع ترین افزایش را دارد $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ است.

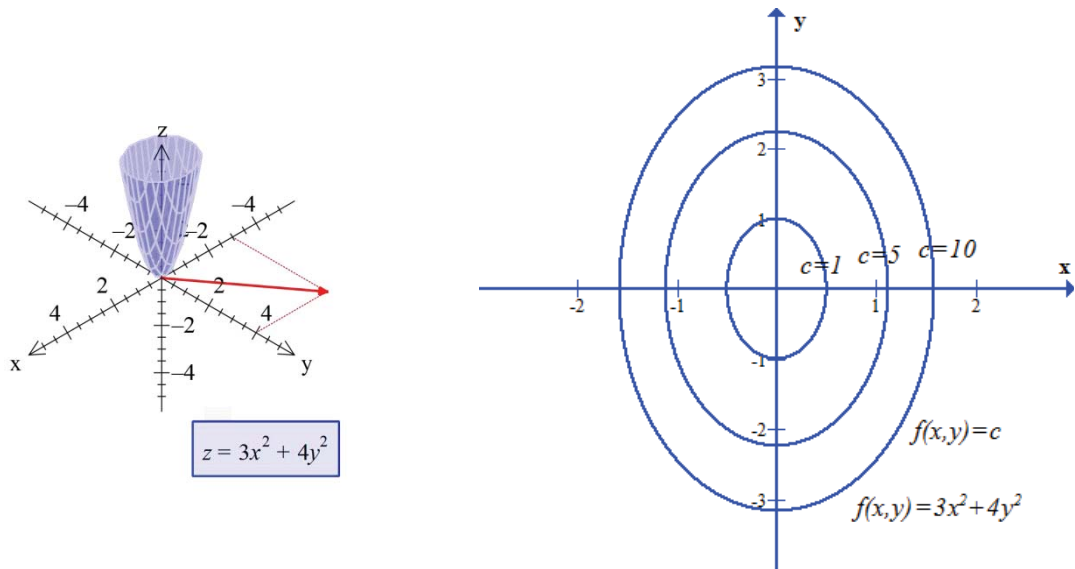


$$۹) \quad f(x, y) = ۳x^۲ + ۴y^۲; (-۱, ۱)$$

$$\text{grad } f(x, y) = ۶x \mathbf{i} + ۸y \mathbf{j}$$

$$\text{grad } f(-۱, ۱) = -۶ \mathbf{i} + ۸ \mathbf{j} = ۲(-۳ \mathbf{i} + ۴ \mathbf{j})$$

پس جهتی که f در $(-۱, ۱)$ سریع ترین افزایش را دارد $-۳ \mathbf{i} + ۴ \mathbf{j}$ است. تصویر سمت راست، منحنی تراز است و سمت چپ رویه تراز است.



$$۱۰) f(x, y, z) = e^x + e^y + e^{yz}; (1, 1, -1)$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = e^x \mathbf{i} + e^y \mathbf{j} + ye^{yz} \mathbf{k}$$

$$\text{grad } f(1, 1, -1) = e\mathbf{i} + e\mathbf{j} + 2e^{-2}\mathbf{k} = e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2e^{-3}\mathbf{k})$$

پس جهتی که f در $(1, 1, -1)$ سریع ترین افزایش را دارد $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2e^{-3}\mathbf{k}$ است.

در تمرین زیر یک بردار نرمال بر نمودار معادله در نقطه داده شده ، پیدا کنید. فرض کنید منحنی هموار است .

$$۱۱) \sin \pi xy = \frac{\sqrt{3}}{2}; \left(\frac{1}{6}, 2\right)$$

پاسخ

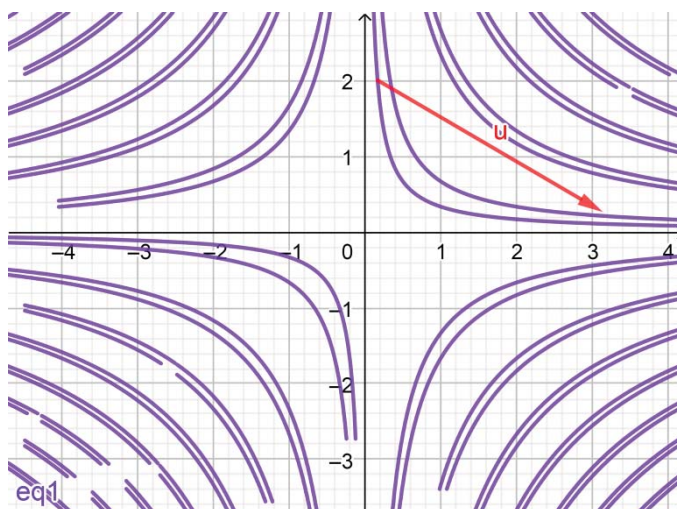
فرض می کنیم $f(x, y) = \sin \pi xy$ باشد ، چون نمودار معادله داده شده ، یک منحنی تراز f است. بر اساس قضیه نرمال بر منحنی تراز ، $\text{grad } f\left(\frac{1}{6}, 2\right)$ یک نرمال است بر نمودار در

$\left(\frac{1}{6}, 2\right)$ و چون

$$\text{grad } f(x, y) = \pi y \cos \pi xy \mathbf{i} + \pi x \cos \pi xy \mathbf{j}$$

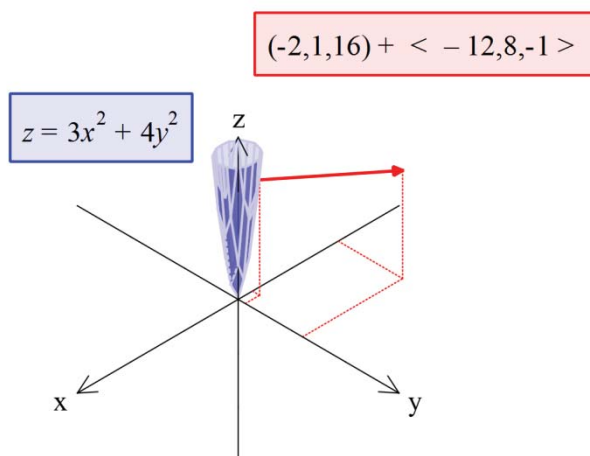
$$\text{grad } f\left(\frac{1}{6}, 2\right) = \pi \mathbf{i} + \frac{\pi}{12} \mathbf{j}$$

پس $\pi \mathbf{i} + \frac{\pi}{12} \mathbf{j}$ یک نرمال است بر نمودار در $\left(\frac{1}{6}, 2\right)$



در تمرینات زیر یک بردار نرمال بر نمودار f در نقطه داده شده، پیدا کنید.

۱۲) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2; (-2, 1, 16)$



بر اساس شماره (۲) نرمال بر نمودار f در نقطه $(-2, 1, 16)$ بردار زیر است.

$$f_x(-2, 1)\mathbf{i} + f_y(-2, 1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

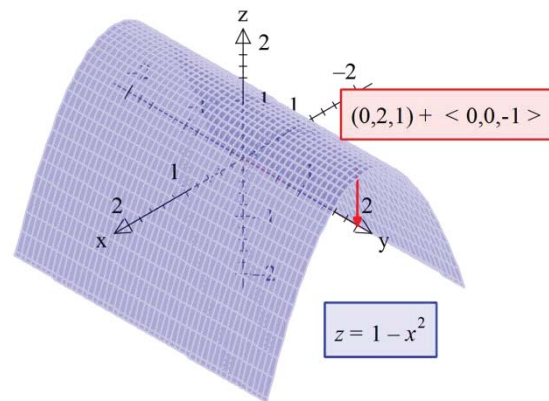
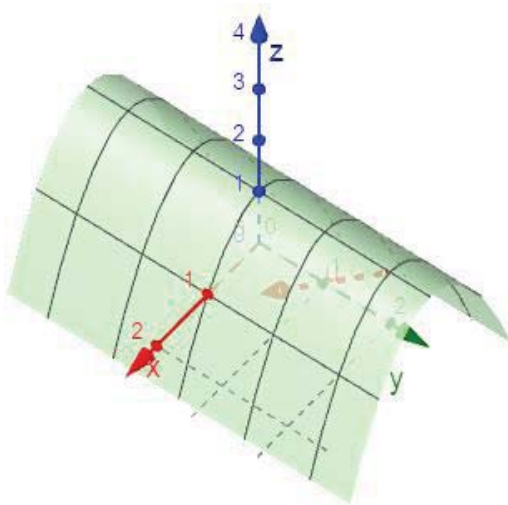
حال چون $f_x(x, y) = 6x$ و $f_y(x, y) = 8y$ است، پس $f_x(-2, 1) = -12$ و $f_y(-2, 1) = 8$ است، پس $-12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ نرمال است بر نمودار در $(-2, 1, 16)$

$$۱۳) f(x, y) = 1 - x^2; (0, 2, 1)$$

بر اساس شماره (۲) نرمال بر نمودار f در $(0, 2, 1)$ بردار زیر است.

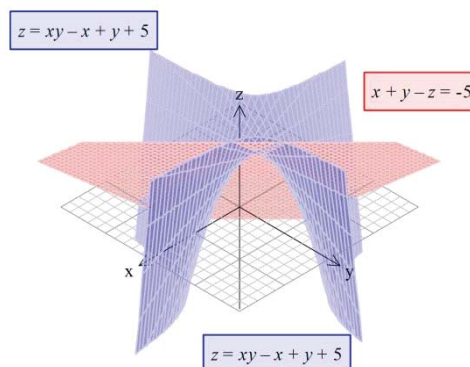
$$f_x(0, 2)\mathbf{i} + f_y(0, 2)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

حال چون $f_x(x, y) = -2x$ و $f_y(x, y) = 0$ است، پس $f_x(0, 2) = 0 = f_y(0, 2)$ است. لذا $-\mathbf{k}$ نرمال بر نمودار در $(0, 2, 1)$ است.



در تمرینات زیر یک معادله صفحه، مماس بر نمودار تابع داده شده در نقطه مشخص شده پیدا کنید.

$$۱۴) f(x, y) = xy - x + y + 5; (0, 2, 7)$$



چون $f_x(x, y) = y - 1$ و $f_y(x, y) = x + 1$ است، پس $f_x(0, 2) = 1$ و $f_y(0, 2) = 1$

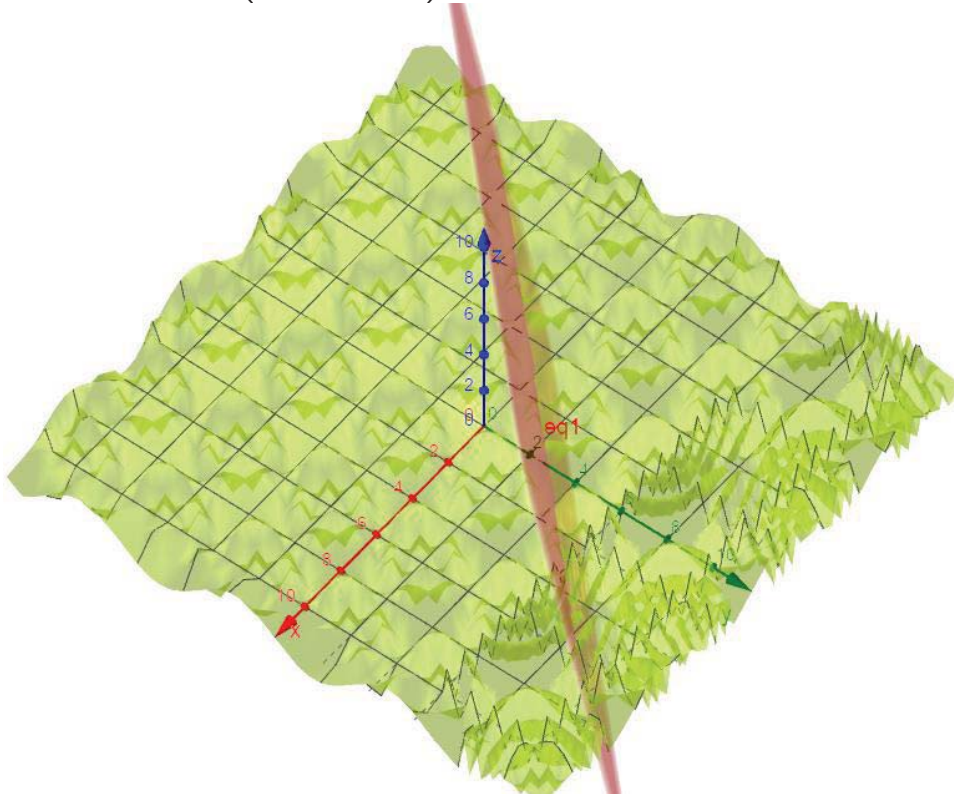
است. پس بر اساس شماره (۳) یک معادله صفحه مماس در $(0, 2, 7)$ مطابق زیر است.

$$(x - 0) + (y - 2) - (z - 7) = 0$$

و یا

$$x + y - z = -5$$

$$۱۵) \quad g(x, y) = \sin \pi xy; \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$$



چون $g_x(x, y) = \pi y \cos \pi xy$ و $g_y(x, y) = \pi x \cos \pi xy$ است، پس

$$g_x\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \pi \sqrt{2} \quad , \quad g_y\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -\pi \sqrt{2}$$

پس یک معادله صفحه مماس در $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ مطابق زیر است.

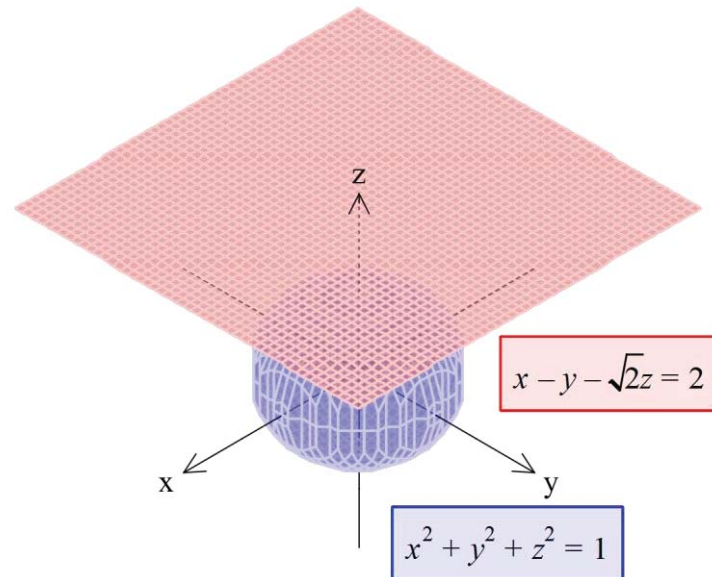
$$\pi \sqrt{2} \left(x + \sqrt{2}\right) - \pi \sqrt{2} \left(y - \sqrt{2}\right) - (z - 0) = 0$$

و یا

$$\pi \sqrt{2} x - \pi \sqrt{2} y - z = -4\pi$$

در تمرینات زیر یک معادله صفحه، مماس بر رویه تراز داده شده در نقطه داده شده، پیدا کنید.

$$۱۶) \quad x^2 + y^2 + z^2 = ۱; \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



اگر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ باشد، پس $x^2 + y^2 + z^2 = ۱$ یک رویه تراز f است. چون $f_x(x, y, z) = 2x$ و $f_y(x, y, z) = 2y$ و $f_z(x, y, z) = 2z$ است، پس

$$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1, \quad f_z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

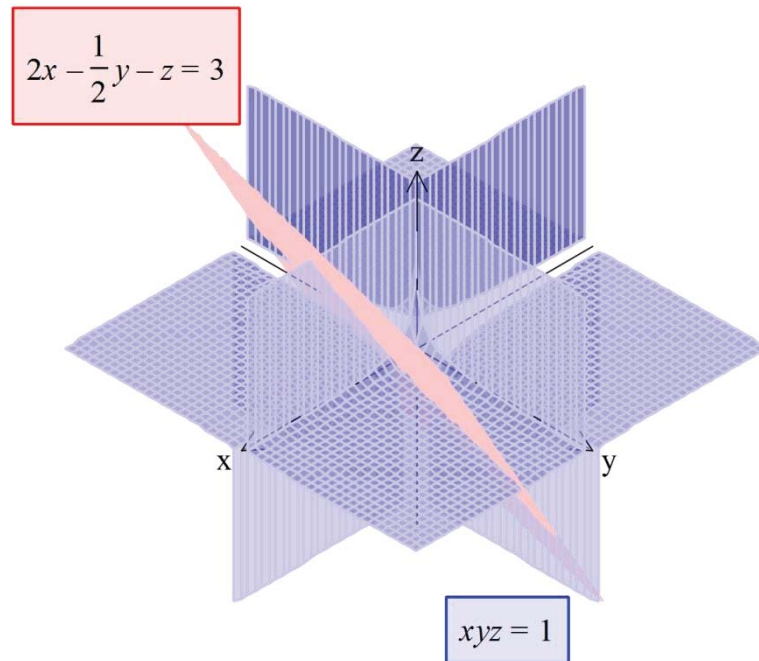
است، پس یک معادله صفحه مماس در $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ مطابق زیر است.

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

و یا

$$x - y - \sqrt{2}z = 2$$

$$۱۷) \quad xyz = 1; \left(\frac{1}{4}, -2, -1\right)$$



اگر $f(x, y, z) = xyz$ باشد، پس $xyz = 1$ یک رویه تراز f است. چون
 $f_x(x, y, z) = yz$ ، $f_y(x, y, z) = xz$ ، $f_z(x, y, z) = xy$
 است، پس

$$f_x\left(\frac{1}{4}, -2, -1\right) = 2, \quad f_y\left(\frac{1}{4}, -2, -1\right) = -\frac{1}{4}, \quad f_z\left(\frac{1}{4}, -2, -1\right) = -1$$

لذا یک معادله صفحه مماس در $\left(\frac{1}{4}, -2, -1\right)$ مطابق زیر است.

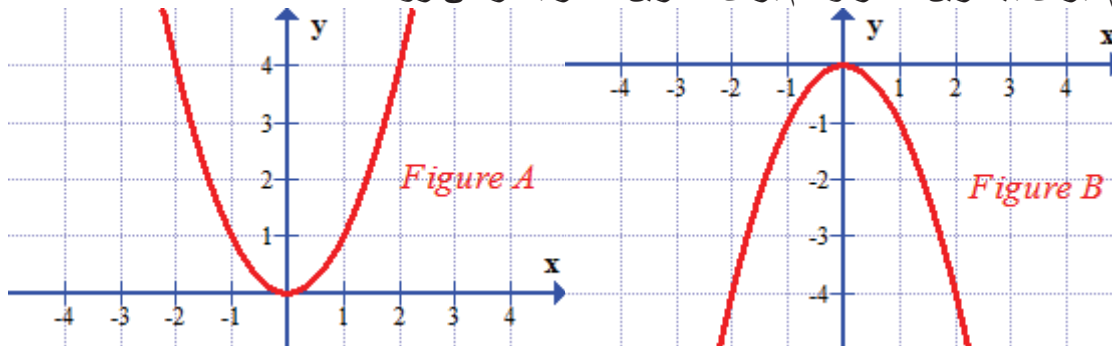
$$2\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}(y + 2) - (z + 1) = 0$$

و یا

$$2x - \frac{1}{4}y - z = 3$$

مقادیر اکستريم Extreme Values

توضیح - کلمه Extreme در زبان انگلیسی به معنی بیشترین و یا حد غایی است. این کلمه در ریاضی، هم برای بیشترین مقدار و هم برای کمترین مقدار بکار می رود.



در تصویر A نمودار تابع $f(x) = x^2$ را ملاحظه می کنید. در این تصویر مقدار اکستريم 0 است و در عین حال این مقدار مینیمم یا حد اقل مقدار تابع است. در تصویر B نمودار تابع $f(x) = -x^2$ را ملاحظه می کنید. مقدار اکستريم باز 0 است، اما این مقدار، مقدار ماکسیمم و یا حد اکثر مقدار تابع است.

تابع های چند متغیره، مانند تابع های یک متغیره، می توانند در یک مجموعه، مقادیر حد اکثر و یا حد اقل یعنی ماکسیمم و مینیمم داشته باشند.

این جا هم مانند تابع های یک متغیره، ایده مقادیر اکستريم نسبی یا موضعی، بر رسی مقادیر اکستريم تابع های چند متغیره را آسان می کند. اما تشخیص مقادیر اکستريم موضعی برای تابع های چند متغیره، مشکل تر از تشخیص آنها در تابع های یک متغیره است. لذا در این بخش، فقط در مورد تابع های دو متغیره صحبت می کنیم.

مقدار اکستريم نسبی Relative Extreme Value

مقدار اکستريم موضعی Local Extreme Value

تعریف مقدار ماکسیمم و مینیمم Maximum and Minimum value Definition

فرض می کنیم f یک تابع دو متغیره باشد، و R یک مجموعه داخل دامنه f باشد. پس f یک مقدار ماکسیمم در R در نقطه (x_0, y_0) دارد، اگر $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ باشد، برای تمام (x, y) ها در R به همین ترتیب،

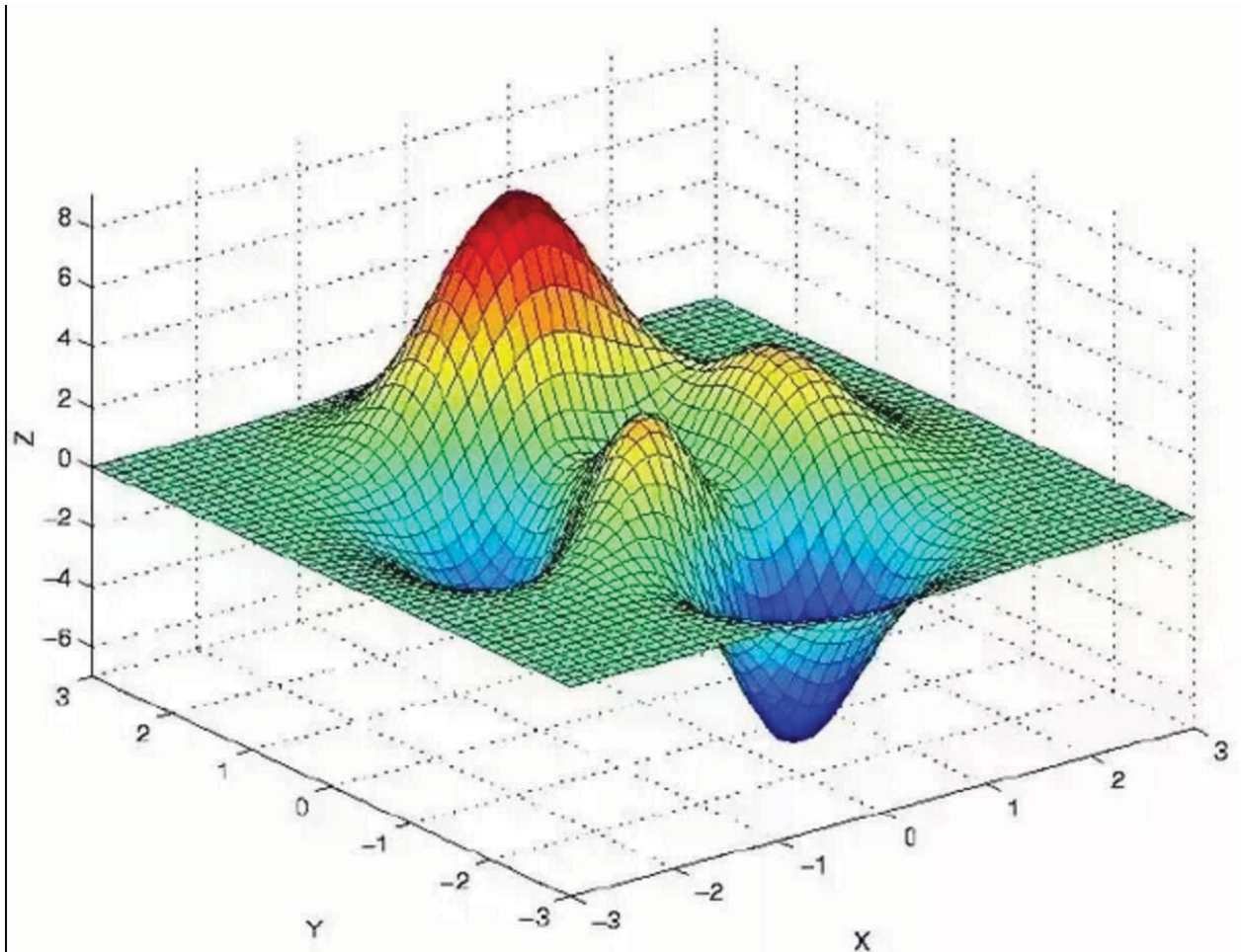
f یک مقدار مینیمم در R در نقطه (x_0, y_0) دارد، اگر $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ باشد، برای تمام (x, y) ها در R

علاوه بر این f یک مقدار ماکسیمم نسبی در (x_0, y_0) دارد، اگر یک دیسک D به مرکز (x_0, y_0) در دامنه f وجود دارد بطوری که $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ باشد، برای تمام (x, y) ها در D . به همین ترتیب،

f یک مقدار مینیمم نسبی در (x_0, y_0) دارد، اگر یک دیسک D به مرکز (x_0, y_0) در دامنه f وجود دارد بطوری که $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ باشد، برای تمام (x, y) ها در D .

همان طور که در ابتدای این بخش گفتیم، مقادیر ماکسیمم و مینیمم را مقادیر اکستريم و مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی را مقادیر اکستريم نسبی می نامیم. اگر یک دیسک به مرکز (x_0, y_0) در دامنه f وجود داشته باشد، پس مقدار اکستريم f در (x_0, y_0) مقدار اکستريم نسبی هم هست.

تصویر C



در تصویر C مقادیر اکستريم، مربوط است به راس تپه ها و قعر داره ها. بخاطر دارید که مقدار اکستريم یک تابع یک متغیره f در یک نقطه بحرانی اتفاق می افتد. و باز بخاطر دارید که نقطه بحرانی یک نقطه x_0 است بطوری که $f'(x_0) = 0$ و یا $f'(x_0)$ وجود ندارد. به عنوان قدم اول جهت مشخص کردن مقادیر اکستريم نسبی تابع های دو متغیره، فرض می کنیم f در (x_0, y_0) یک مقدار اکستريم نسبی داشته باشد. و فرض می کنیم

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \text{و} \quad G(y) = f(x_0, y)$$

باشد. پس در x_0 یک مقدار اکستريم نسبی دارد، و G در y_0 یک مقدار اکستريم نسبی دارد.

تصویر D

پس اگر $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد، پس

$$f_x(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad f_y(x_0, y_0) = G'(x_0) = 0$$

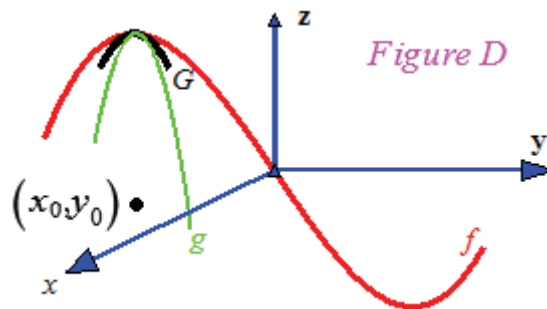
توضیحات بالا، قضیه زیر را ثابت می کند.

قضیه، مقادیر اکستريم نسبی Relative Extreme Values Theorem

فرض می کنیم f یک مقدار اکستريم نسبی در (x_0, y_0) داشته باشد. اگر f در (x_0, y_0) مشتق های پاره ای داشته باشد، پس

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

است.



از قضیه بالا نتیجه می گیریم که مقادیر اکستريم نسبی f تنها در نقاطی اتفاق می افتد که مشتق های جزئی f وجود دارند و صفر هستند و یا یک و یا هر دو مشتق های پاره ای وجود نداشته باشند.

می گوئیم f یک **نقطه بحرانی Critical Point** در نقطه (x_0, y_0) در دامنه f دارد، اگر

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

باشد، و یا اگر یکی از مشتق های پاره ای وجود نداشته باشد.

قضیه بالا را می توان چنین تفسیر کرد.

تابع f دارای مقادیر اکستريم نسبی است، فقط در

نقاط بحرانی در دامنه اش.

مثال ۱ - فرض کنید $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$ باشد. کلیه نقاط بحرانی f را پیدا کنید.

پاسخ

مشتق های پاره ای f در تمام نقاط دامنه f وجود دارند، پس مقادیر اکستريم نسبی می توانند فقط در نقاطی اتفاق افتند که هر دو مشتق پاره ای صفر باشند. مشتق های پاره ای مطابق زیر هستند.

$$f_x(x, y) = -2x + 2 \text{ و } f_y(x, y) = -2y - 4$$

پس $f_x(x, y) = 0$ است، فقط اگر $x = 1$ باشد و $f_y(x, y) = 0$ است، فقط اگر

$y = -2$ باشد، یعنی

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

است، فقط اگر $(x, y) = (1, -2)$ باشد.

لذا $(1, -2)$ تنها نقطه بحرانی f است.

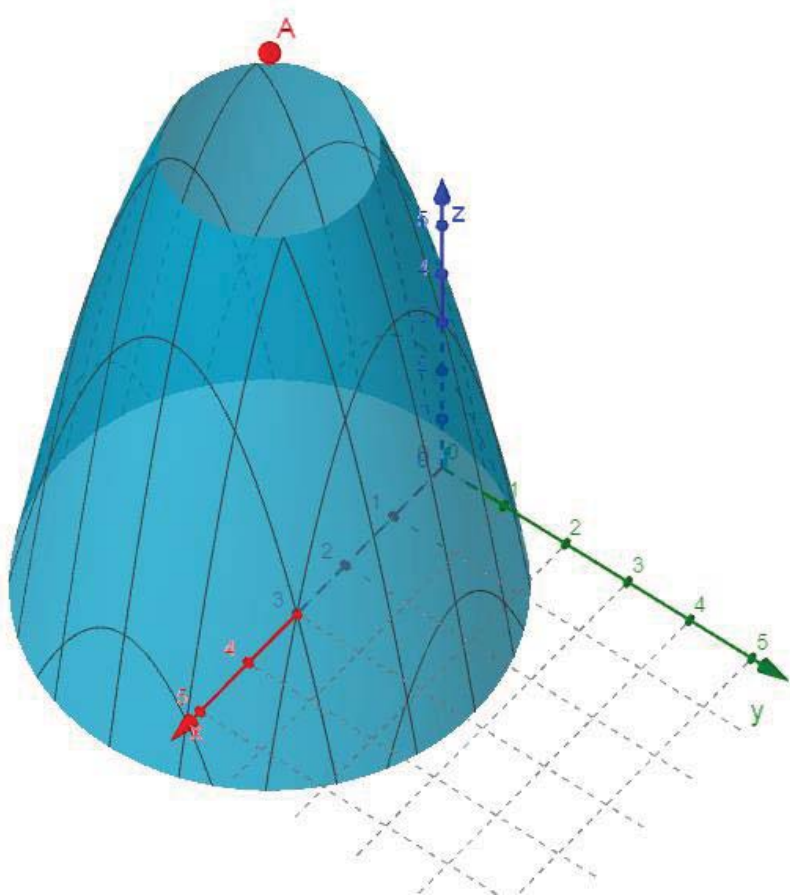
می توان مشخص کرد که آیا تابع مثال ۱ یک مقدار اکستريم نسبی در $(1, -2)$ دارد یا نه. برای این کار، در فرمول $f(x, y)$ ، عمل کامل کردن مربع ها را انجام می دهیم. داریم.

$$3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y = 3 - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) + 1 + 4$$

$$= 8 - (x-1)^2 - (y+2)^2$$

چون $(x-1)^2 \geq 0$ و $(y+2)^2 \geq 0$ هستند برای تمام x ها و y ها، پس به نظر می‌رسد که $f(1, -2) = 8$ یک مقدار ماکسیمم نسبی f است. در حقیقت می‌توان نتیجه گرفت که ۸ مقدار ماکسیمم f است. تصویر E

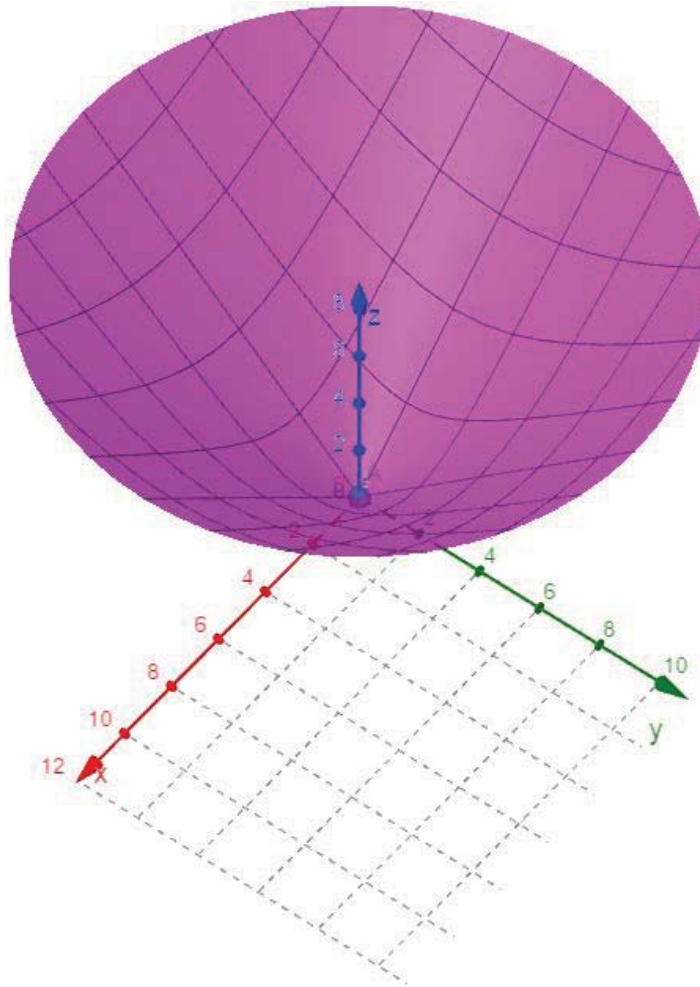
تصویر E



مثال ۲ - فرض کنید $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد. تمام نقاط بحرانی و مقادیر اکستريم نسبی f را پیدا کنید.
پاسخ

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

چون مشتق های پاره ای در تمام نقاط بجز مبدا مختصات وجود دارند ، و چون مبدا مختصات در دامنه f است ، پس مبدا مختصات یک نقطه بحرانی است.
 چون $f_x(x, y) = 0$ است فقط اگر $x = 0$ باشد ، و $f_y(x, y) = 0$ است فقط اگر $y = 0$ باشد ، پس هیچ نقطه (x, y) وجود ندارد بطوری که $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ باشد.
 لذا $(0, 0)$ تنها نقطه بحرانی f است. چون $f(0, 0) = 0$ و $f(x, y) \geq 0$ است برای تمام (x, y) ها ، نتیجه می گیریم که 0 تنها مقدار مینیمم نسبی f است ، و هیچ مقدار ماکسیمم نسبی وجود ندارد. تصویر F

تصویر F 

مثال بعد نشان می دهد که لزومی ندارد ، یک تابع یک مقدار اکستريم نسبی در یک نقطه بحرانی داشته باشد.

مثال ۳ - فرض کنید $f(x, y) = y^2 - x^2$ باشد. نشان دهید که مبدا مختصات تنها نقطه بحرانی است اما ، $f(0, 0)$ یک مقدار اکستريم نسبی f نیست.
 پاسخ

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 2y$$

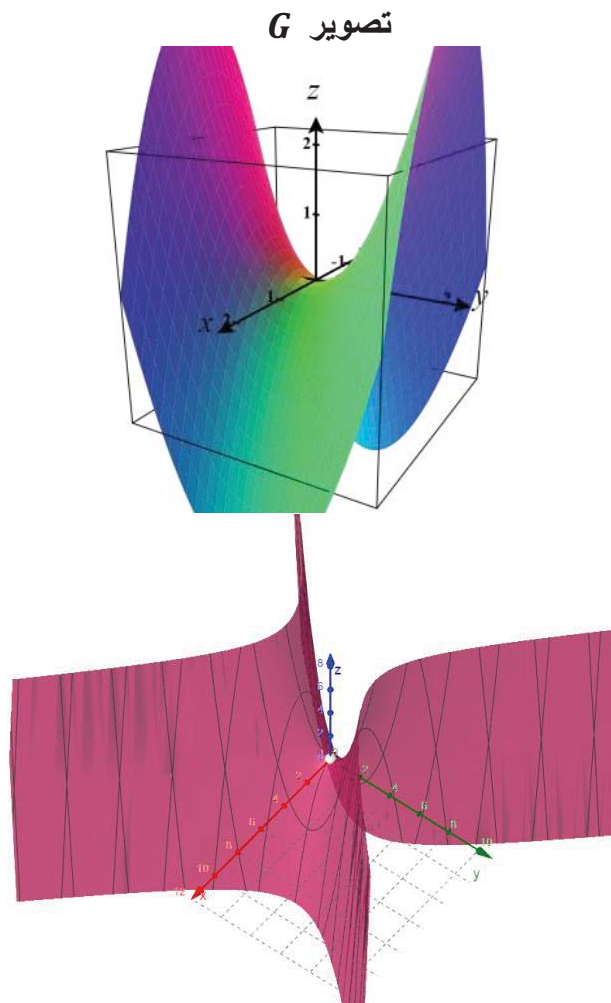
ملاحظه می کنید که $(0,0)$ تنها نقطه بحرانی f است. اما $f(0,0) = 0$ یک مقدار اکستريم نسبی f نیست. زیرا

$$f(x, 0) = -x^2 < 0 \quad \text{برای } x \neq 0$$

و

$$f(0, y) = y^2 > 0 \quad \text{برای } y \neq 0$$

است. در نتیجه f هیچ مقدار اکستريم نسبی ندارد. تصویر G



نکته - اگر در مثال ۳ مقادیر f را در روی محور x در نظر بگیریم، یک تابع بر حسب x بدست می آوریم که مقدار ماکسیم آن مبدا مختصات است. اما اگر مقادیر f را روی محور y در نظر بگیریم، یک تابع بر حسب y بدست می آوریم که مقدار مینیم آن در مبدا مختصات است. پس نمودار شبیه یک زین اسب است. تصویر G

به همین جهت f در $(0,0)$ یک مقدار اکستريم نسبی ندارد، با وجودی که داریم

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

بطور کلی، اگر f تابعی است که در آن $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ باشد، می‌گوییم f در (x_0, y_0) یک **نقطه زین اسبی** دارد اگر یک دیسک به مرکز (x_0, y_0) وجود داشته باشد بطوری که شرط زیر برقرار باشد.

مقدار ماکسیم f روی یک قطر دیسک فقط در نقطه (x_0, y_0) اتفاق می‌افتد و مقدار مینیم آن روی قطر دیگر فقط در همان نقطه (x_0, y_0) اتفاق می‌افتد. بر اساس این تعریف و بحث ما در بالا نتیجه می‌گیریم که اگر $f(x, y) = y^2 - x^2$ باشد، پس f یک نقطه زین اسبی در مبدا دارد.

نقطه زین اسبی : Saddle Point

قضیه آزمون مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم Second Partial Test Theorem

فرض کنید f در نقطه (x_0, y_0) یک نقطه بحرانی داشته باشد و این که f در یک دیسک به مرکز (x_0, y_0) مشتق‌های مرتبه دوم پیوسته داشته باشد. فرض می‌کنیم

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

باشد.

الف - اگر $D(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ و یا $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ باشد، پس f در (x_0, y_0) یک مقدار ماکسیم نسبی دارد.

ب - اگر $D(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ و یا $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ باشد، پس f در (x_0, y_0) یک مقدار مینیم نسبی دارد.

ج - اگر $D(x_0, y_0) < 0$ باشد، پس f در (x_0, y_0) یک نقطه زین اسبی دارد.

و در نهایت، اگر $D(x_0, y_0) = 0$ باشد، پس f در (x_0, y_0) ممکن است یک مقدار اکستريم نسبی داشته باشد و یا ممکن است نداشته باشد.

عبارت $D(x_0, y_0)$ در قضیه بالا **مشخص کننده** f در (x_0, y_0) می‌نامند. می‌توان به شکل زیر هم نوشت.

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

توجه داشته باشید که اگر $D(x_0, y_0) > 0$ باشد، پس $f_{xx}(x_0, y_0)$ و $f_{yy}(x_0, y_0)$ دارای یک علامت هستند، یعنی $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ و $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ است و یا $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ و $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ است. لذا اگر $D(x_0, y_0) > 0$ باشد، پس علامت $f_{xx}(x_0, y_0)$ و یا $f_{yy}(x_0, y_0)$ ماهیت مقدار اکستريم نسبی را مشخص می‌کند.

اگر $D(x_0, y_0) = 0$ باشد، در این صورت نقطه بحرانی (x_0, y_0) **تباهیده Degenerate** است. در کتب ریاضی فارسی زبان کلمه Degenerate را تباهیده ترجمه کرده‌اند، اما من کلمه **مشخص** ترجمه می‌کنم.

نقطه بحرانی، تباهیده و یا نا مشخص است، یعنی نمی‌توانیم مشخص کنیم آیا در این نقطه مقدار اکستريم نسبی داریم و یا نداریم.

اگر $D(x_0, y_0) \neq 0$ باشد، می‌گوییم نقطه بحرانی **نا تبهگون Nondegenerate** است. یعنی مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم ماهیت نقطه بحرانی را مشخص می‌کند. اما نقطه بحرانی تباهیده، این تست مشخص نمی‌کند آیا در این نقطه بحرانی مقدار اکستريم نسبی داریم یا نه.

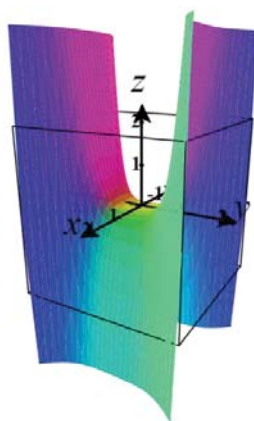
برای مثال اگر داشته باشیم

$f(x, y) = y^4 - x^4$ ، $g(x, y) = x^4 + y^4$ و $h(x, y) = x^5 + x^3 + y^3$
پس ، نقطه $(0,0)$ نقطه بحرانی h و g ، f است. در هر سه مورد داریم.

$$D(0,0) = 0$$

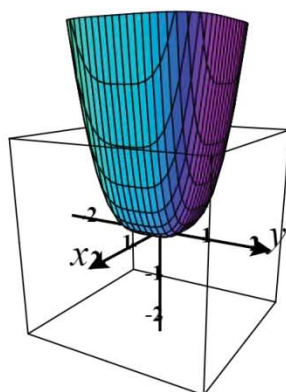
اما یک محاسبه ساده نشان می دهد که f در نقطه $(0,0)$ یک نقطه زین اسبی دارد. تصویر H

تصویر H



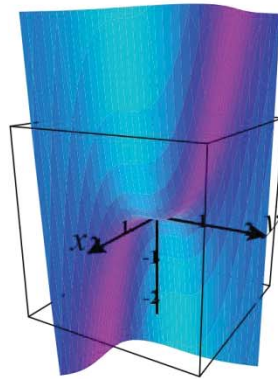
همچنین با یک محاسبه می بینیم $g(x, y) \geq 0$ است و $g(0,0) = 0$ است ، پس g یک مقدار
مینیمم در $(0,0)$ دارد. تصویر I

تصویر I



و در نهایت، ملاحظه می‌کنیم روی هر خطی که از مبدا در صفحه xy بگذرد، h یک مقدار اکستريم نسبی ندارد. یعنی f در (x_0, y_0) نه یک مقدار اکستريم نسبی دارد و نه نقطه زین اسبی. تصویر J

تصویر J



مثال ۴ - فرض کنید $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ باشد. با استفاده از آزمون مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم، مشخص کنید، f در کدام نقاط مقادیر اکستريم نسبی دارد و در کدام نقاط f نقاط زین اسبی دارد.

پاسخ

$f_x(x, y) = 2x - 2y$ و $f_y(x, y) = -2x + y^2 - 3$
ملاحظه می‌کنید که $f_x(x, y) = 0$ است، اگر $x = y$ باشد. و $f_y(x, y) = 0$ است اگر $-2x + y^2 - 3 = 0$ باشد. پس (x, y) یک نقطه بحرانی است اگر

$$x = y \text{ و } -2x + y^2 - 3 = 0$$

باشد. اگر در معادله دوم بجای x بگذاریم y خواهیم داشت $y^2 - 2y - 3 = 0$ پاسخ‌های معادله بالا $y = 3$ و $y = -1$ است. لذا نقاط بحرانی f عبارتند از $(3, 3)$ و $(-1, -1)$

مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم f مطابق زیر هستند.

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2y, \quad f_{xy} = -2$$

پس

$$D(3, 3) = f_{xx}(3, 3)f_{yy}(3, 3) - [f_{xy}(3, 3)]^2 = (2)(6) - (-2)^2 = 8 > 0$$

و

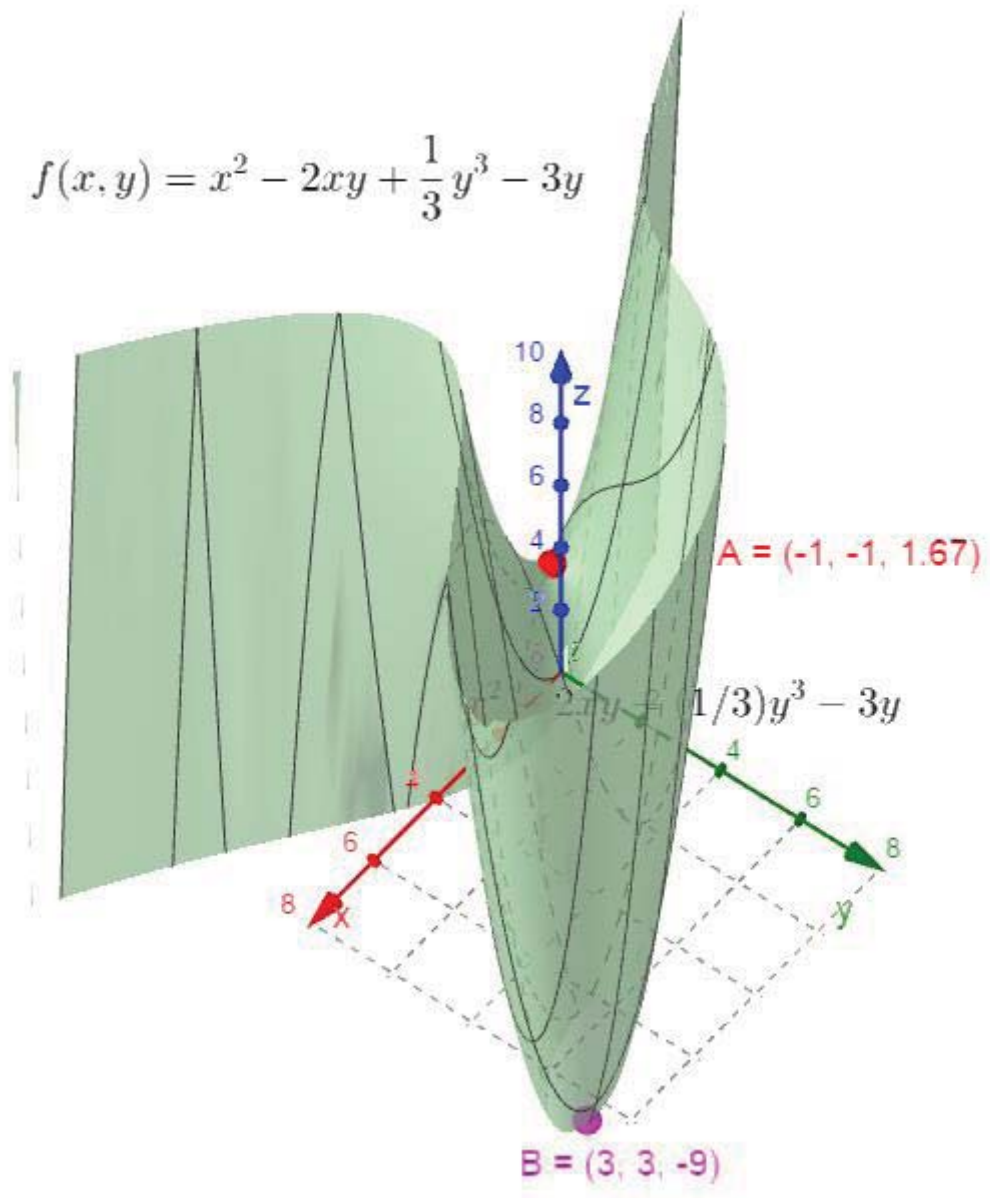
$$D(-1, -1) = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - [f_{xy}(-1, -1)]^2$$

$$= (2)(-2) - (-2)^2 = -8 < 0$$

چون $D(3, 3) > 0$ و $f_{xx}(3, 3) = 2 > 0$ است، پس f در نقطه $(3, 3)$ یک مقدار مینیمم نسبی دارد. و چون $D(-1, -1) < 0$ است، پس f در نقطه $(-1, -1)$ یک نقطه زین اسبی دارد. علاوه بر این داریم. تصویر k

$$f(3, 3) = -9 \quad \text{و} \quad f(-1, -1) = \frac{5}{3}$$

تصویر k



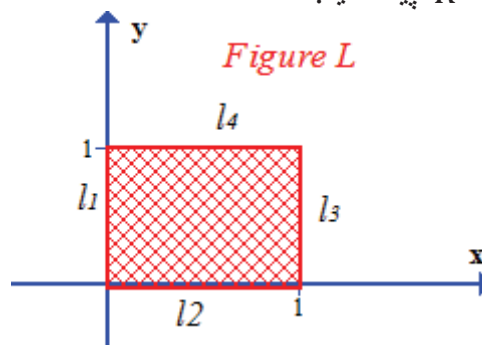
مقادیر اکستريم در یک مجموعه Extreme Values on a Set

فرض می کنیم R یک مجموعه در صفحه باشد. و فرض می کنیم R کران دار **Bounded** باشد، یعنی مشمول یا داخل یک مستطیل باشد که شامل مرز هایش هم می شود. تحت این شرایط قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ماکسیمم – مینیمم برای دو متغیره Maximum-Minimum Theorem for Two Variables
فرض می کنیم R یک مجموعه کران دار در صفحه که شامل مرز هایش هم هست، می باشد. و فرض می کنیم f در R پیوسته باشد. پس f هم یک مقدار ماکسیمم و یک مقدار مینیمم در R دارد.

روش پیدا کردن مقادیر f اکستريم اگر شروط قضیه بالا را داشته باشد.
۱ - نقاط بحرانی f را در R پیدا کنید، و مقادیر f را در این نقاط محاسبه کنید.
۲ - مقادیر اکستريم f روی مرز های R پیدا کنید.
۳ - مقدار ماکسیمم f در R بیشترین مقادیری است که در مراحل ۱ و ۲ پیدا شد. و مقدار مینیمم f در R کوچک ترین این مقادیر است.

مثال ۵ - فرض کنید $f(x, y) = xy - x^2$ باشد، و R یک ناحیه مربع شکل مطابق تصویر L باشد. مقادیر اکستريم f در R پیدا کنید.



پاسخ

بر اساس قضیه ماکسیمم – مینیمم f مقادیر اکستريم در R دارد. چون داریم

$$f_x(x, y) = y - 2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = x$$

پس $f_x(x, y) = 0$ است، اگر $y = 2x$ باشد. و $f_y(x, y) = 0$ است اگر $x = 0$ باشد. لذا تنها نقطه بحرانی f نقطه $(0, 0)$ است که یک نقطه مرزی R است. پس مقادیر اکستريم f در R باید روی مرز R اتفاق افتد، که شامل چهار خط l_1, l_2, l_3 و l_4 است. تصویر L

روی خط l_1 داریم $x = 0$ و $0 \leq y \leq 1$ و چون $f(0, y) = 0$ است، مقادیر ماکسیمم و مینیمم f روی l_1 هر دو صفر هستند.

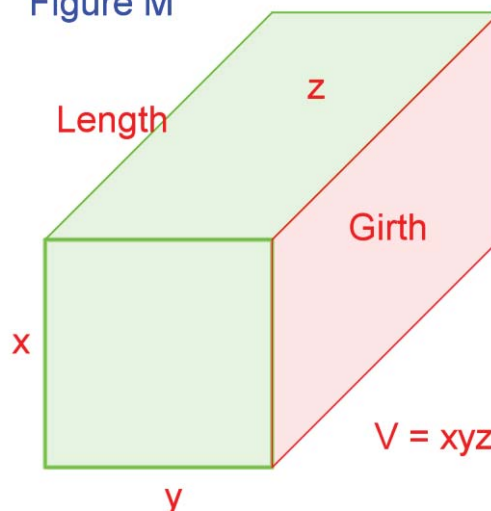
روی خط l_2 داریم $y = 0$ و $0 \leq x \leq 1$ و چون $f(x, 0) = -x^2$ است، مقدار ماکسیمم f روی l_2 صفر است و مینیمم -1 است.

روی خط l_3 داریم $x = 1$ و $0 \leq y \leq 1$ و چون $f(1, y) = y - 1$ است، مقدار ماکسیمم f روی l_3 صفر است و مقدار مینیمم -1 است.

و در نهایت روی l_4 داریم $y = 1$ و $0 \leq x \leq 1$ و چون $f(x, 1) = x - x^2$ است، مقدار ماکسیمم f روی l_4 عبارت است از $\frac{1}{4}$ و مقدار مینیمم صفر است. لذا مقدار ماکسیمم f روی R می شود $\frac{1}{4}$ و مقدار مینیمم -1 است.

مثال ۶- بر اساس مقررات اداره پست، یک جعبه به شکل مکعب مستطیل با نرخ ارزان فرستاده می شود، اگر مجموع اضلاع آن بیش از 108 اینچ نباشد. تصویر M . مطلوب است بیشترین حجم چنین بسته پستی.

Figure M



ضخامت Girth
طول Length

پاسخ

اگر z و y و x ابعاد بسته باشد، و z طول بزرگ ترین ضلع، پس $2x + 2y$ ضخامت جعبه است. تصویر M صفحه قرمز رنگ. و

$$V = xyz \quad \text{و} \quad \overbrace{2x + 2y + z}^{\text{طول}} \leq 108$$

اینجا فرض می کنیم $z \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x \geq 0$ باشد.

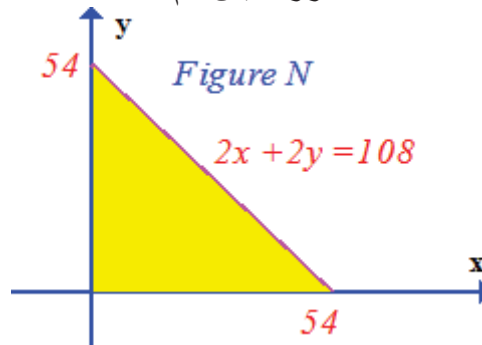
چون بیشترین حجم ممکن را می خواهیم، پس می توان گفت

$$2x + 2y + z = 108 \quad (1)$$

معادله (۱) را برای z حل می کنیم و نتیجه را در فرمول حجم جانشین می کنیم.

$$V = xy(108 - 2x - 2y) = 108xy - 2x^2y - 2xy^2$$

حالا می خواهیم مقدار ماکسیم V را به عنوان تابع x و y پیدا کنیم. چون x, y و z باید نامنفی باشند، بطوری که $2x + 2y \leq 108$ باشد، پس بر اساس شماره (۱) هدف ما، پیدا کردن مقدار ماکسیم V روی ناحیه مثلثی R که شامل مرز هایش هم باشد، است. تصویر N .



بر اساس قضیه ماکسیم -مینیم چنین مقدار ماکسیم وجود دارد. اگر $x = 0$ یا $y = 0$ یا $2x + 2y = 108$ باشد، که در این صورت بر اساس شماره (۱) داریم $z = 0$ ، پس حجم مساوی صفر است. بنا بر این مقدار ماکسیم V روی مرز R اتفاق نمی افتد، و در نتیجه مقدار ماکسیم باید در یک نقطه بحرانی در داخل R اتفاق افتد. برای پیدا کردن نقطه بحرانی در داخل R مشتق های پاره ای V را پیدا می کنیم.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 108y - 4xy - 2y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 108x - 2x^2 - 4xy$$

حال $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ است اگر $108y - 4xy - 2y^2 = 0$ باشد، یعنی اگر $y = 0$ و یا اگر

$$108x - 2x^2 - 4xy = 0 \quad \text{باشد. به همین طریق} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{است اگر} \quad 108x - 2x^2 - 4xy = 0$$

باشد یعنی اگر $x = 0$ و یا اگر $108 - 2x - 4y = 0$ باشد. چون (x, y) در داخل R می تواند یک نقطه بحرانی باشد اگر فقط و فقط $x \neq 0$ و $y \neq 0$ باشد، پس نتیجه می گیریم که (x, y) یک چنین نقطه بحرانی است فقط اگر

$$(2) \quad 108 - 2x - 4y = 0 \quad \text{و} \quad 108 - 4x - 2y = 0$$

باشد. اولین معادله را برای y حل می کنیم، پس $y = 54 - 2x$ بدست می آوریم. این تساوی را در معادله دوم جانشین می کنیم، نتیجه می شود

$$0 = 108 - 2x - 4(54 - 2x) = -108 + 6x$$

پس $x = 18$ و

$$y = 54 - 2(18) = 18$$

لذا $(18, 18)$ تنها نقطه بحرانی داخل R است. نتیجه می گیریم

$$V(18, 18) = 11664 \quad \text{اینچ مکعب}$$

ماکسیم حجم یک بسته است که بتوان با نرخ ارزان ارسال داشت.

تمرینات ۵.۷

در تمرینات زیر کلیه نوقت بحرانی را پیدا کنید ، و مشخص کنید آیا درنقاط بحرانی مقدار ماکسیمم نسبی ، مقدار مینیمم نسبی و یا نقطه زین اسبی اتفاق می افتد.

- ۱) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$
- ۲) $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$
- ۳) $k(x, y) = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 6x - 10y + 5$
- ۴) $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$
- ۵) $f(x, y) = |x| + |y|$

در تمرینات زیر مقادیر اکستريم f را در R پیدا کنید.

- ۶) $f(x, y) = x^2 - y^2$; R : دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$
- ۷) $f(x, y) = 2 \sin x + 3 \cos y$

در تمرین شماره ۷ مجموعه R یک ناحیه مربع شکل است که راس های آن مطابق زیر هستند.

$$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

در تمرین زیر فرض کنید مقادیر اکستريم مورد نیاز ، وجود دارد.

۸- سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموع آنها ۴۸ و حاصل ضرب آنها هر اندازه که ممکن است بزرگ باشد. آن حاصل ضرب را محاسبه کنید.

پاسخ تمرينات ۵.۷

در تمرينات زير کليه نوقت بحراني را پيدا کنيد ، و مشخص کنيد آيا درنقاط بحراني مقدار ماکسيم نسبي ، مقدار مينيم نسبي و يا نقطه زين اسبي اتفاق مي افتد.

$$۱) \quad f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$$

پاسخ

$$f_x(x, y) = 2x - 6 \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 4y + 8$$

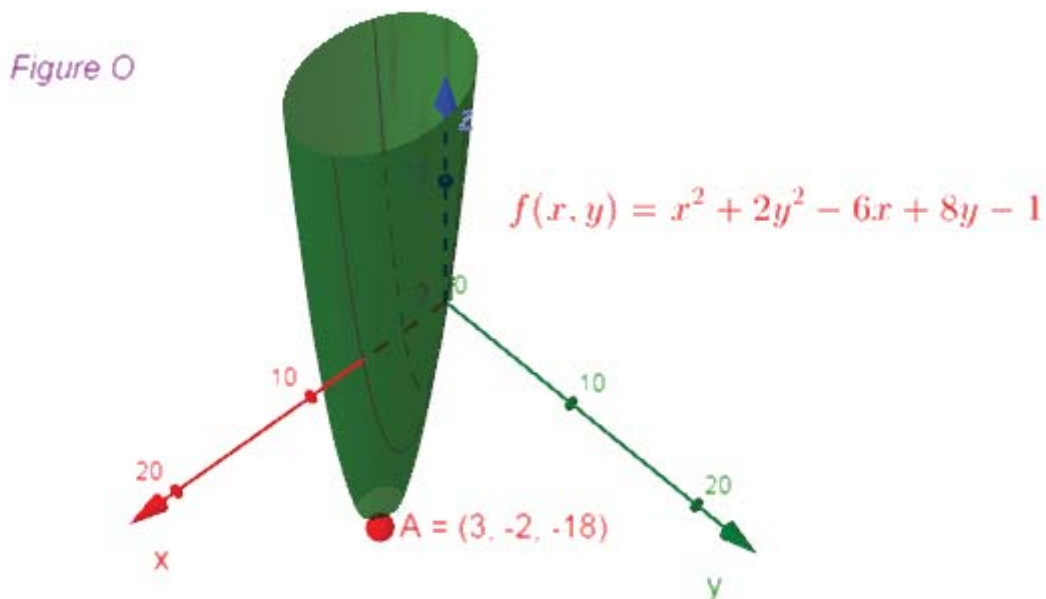
پس $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است اگر $x = 3$ و $y = -2$ باشد. لذا $(3, -2)$ يک نقطه بحراني است.

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 4 \quad \text{و} \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

است ، پس

$$D(3, -2) = f_{xx}(3, -2)f_{yy}(3, -2) - [f_{xy}(3, -2)]^2 = 2(4) - 0^2 = 8$$

چون $D(3, -2) > 0$ و $f_{xx}(3, -2) > 0$ است ، پس f يک مقدار مينيم نسبي در $(3, -2)$ دارد. تصوير 0



$$۲) \quad f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$$

پاسخ

$$f_x(x, y) = 2x + 6y - 6 \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 6x + 4y + 10$$

پس $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است اگر

$$2x + 6y - 6 = 0 \quad \text{و} \quad 6x + 4y + 10 = 0$$

باشد. اولین معادله را برای x حل می کنیم و در معادله دوم جانشین می کنیم.

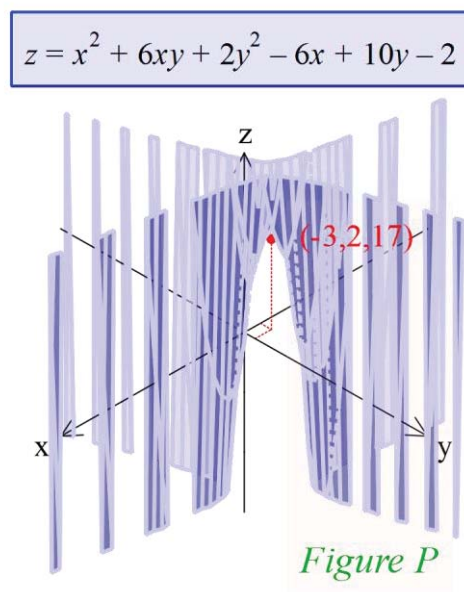
$$6(3 - 3y) + 4y + 10 = 0, \quad \text{پس} \quad y = 2 \quad \text{و} \quad x = -3$$

لذا $(-3, 2)$ یک نقطه بحرانی است.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad f_{yy}(x, y) = 4 \quad f_{xy}(x, y) = 6$$

پس

$$D(-3, 2) = f_{xx}(-3, 2)f_{yy}(-3, 2) - [f_{xy}(-3, 2)]^2 = (2)(4) - 6^2 = -28$$

چون $D(-3, 2) < 0$ است، پس f در $(-3, 2)$ یک نقطه زین اسبی دارد. تصویر P 

$$۳) \quad k(x, y) = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 6x - 10y + 5$$

پاسخ

$$k_x(x, y) = -2x - 2y + 6 \quad \text{و} \quad k_y(x, y) = -2x - 4y - 10$$

پس $k_x(x, y) = 0 = k_y(x, y)$ است اگر

$$-2x - 2y + 6 = 0 \quad \text{و} \quad -2x - 4y - 10 = 0$$

باشد. از معادله اول y را بدست می آوریم و در معادله دوم جانشین می کنیم. پس داریم.

$$-2x - 4(-x + 3) - 10 = 0 \quad \text{پس} \quad x = 11 \quad \text{و} \quad y = -8$$

لذا $(11, -8)$ یک نقطه بحرانی است. حالا داریم

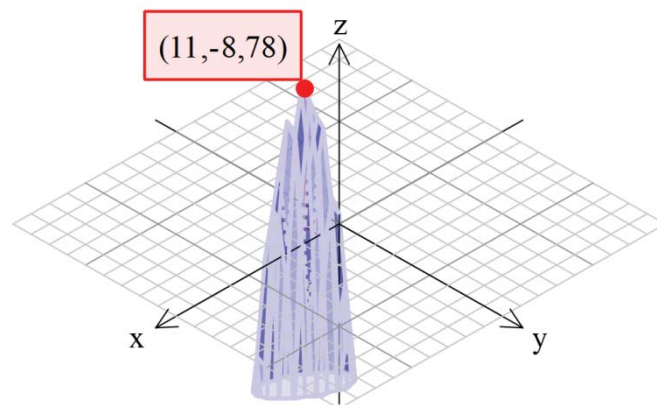
$$k_{xx}(x, y) = -2 \quad k_{yy}(x, y) = -4 \quad k_{xy}(x, y) = -2$$

است. پس

$$D(11, -8) = k_{xx}(11, -8)k_{yy}(11, -8) - [k_{xy}(11, -8)]^2$$

$$= (-2)(-4) - (-2)^2 = 4$$

چون $D(11, -8) > 0$ است و $k_{xx}(11, -8) < 0$ ، پس k یک ماکسیمم نسبی در $(11, -8)$ دارد. تصویر Q



$$z = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 6x - 10y + 5$$

Figure Q

$$۴) \quad f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$$

پاسخ

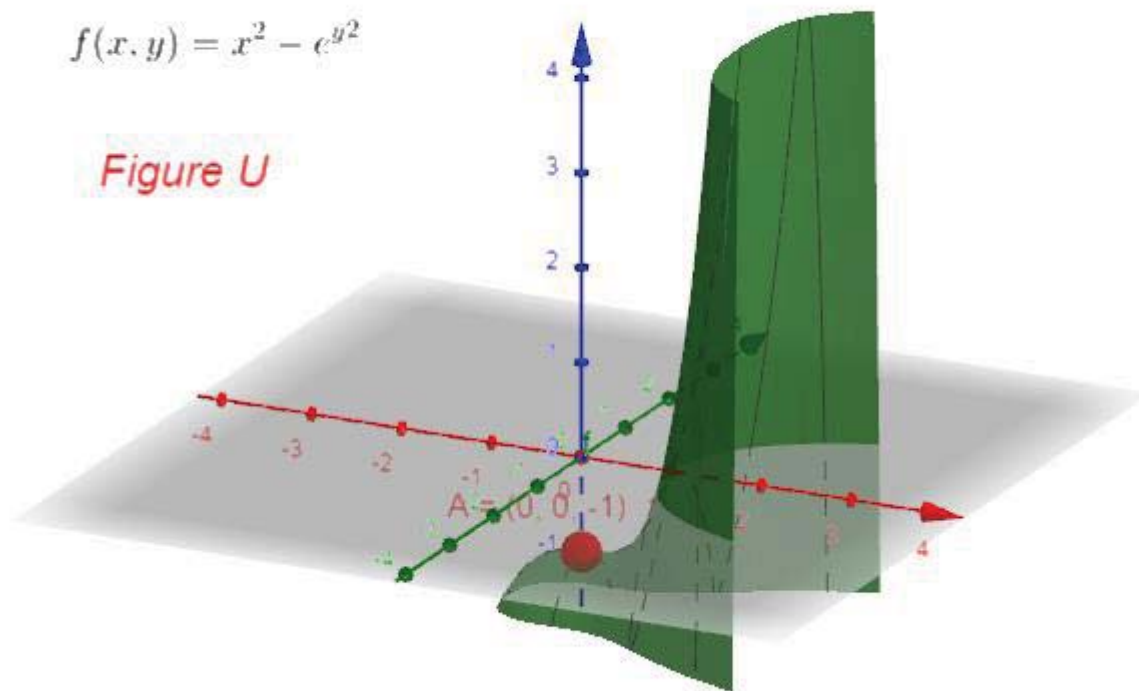
پس $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است اگر $x = y = 0$ باشد، پس $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی است. حالا داریم.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad f_{yy}(x, y) = -2e^{y^2} - 4y^2e^{y^2} \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

پس

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = (2)(-2) - (0)^2 = -4$$

چون $D(0, 0) < 0$ است، پس f در $(0, 0)$ یک نقطه زین اسبی دارد. تصویر U

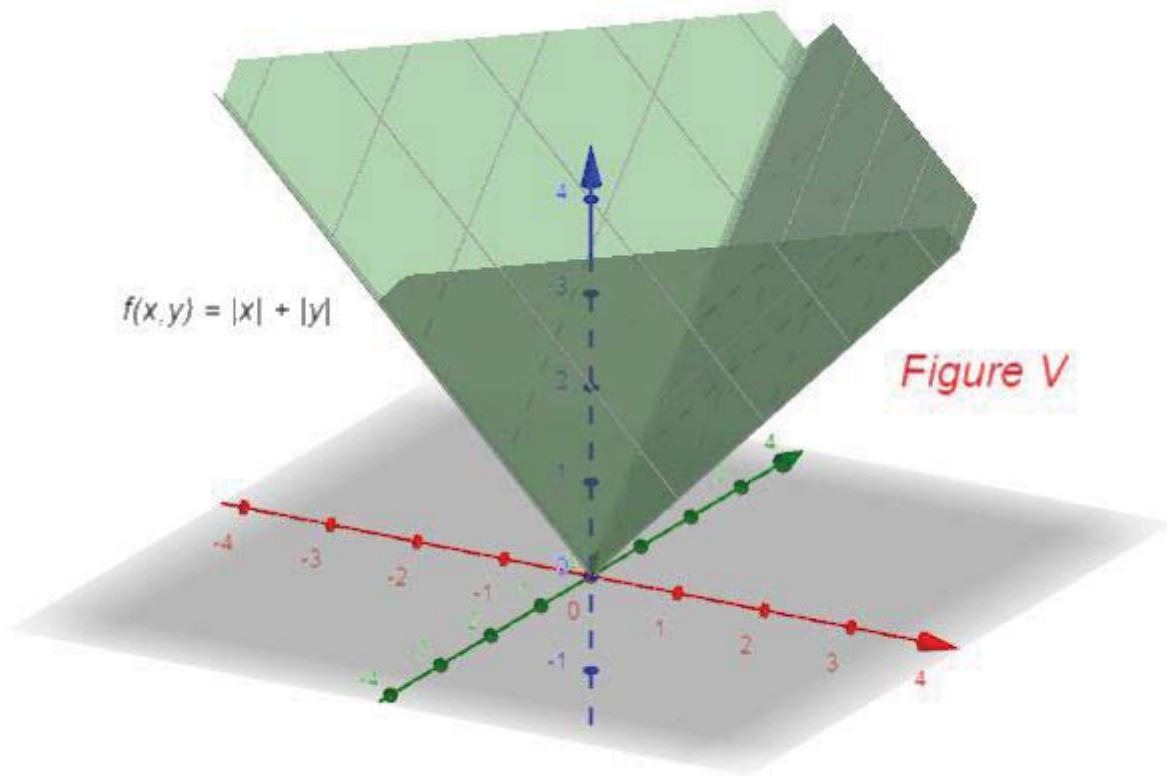


۵) $f(x, y) = |x| + |y|$

پاسخ

اگر $x > 0$ باشد، پس $f_x(x, y) = 1$ است. اگر $x < 0$ باشد، پس $f_x(x, y) = -1$ است. و اگر $x = 0$ باشد، پس $f_x(x, y)$ وجود ندارد. به همین طریق اگر $y > 0$ باشد، پس $f_y(x, y) = 1$ است. اگر $y < 0$ باشد، پس $f_y(x, y) = -1$ است. و اگر $y = 0$ باشد، پس $f_y(x, y)$ وجود ندارد.

لذا هر نقطه ای به شکل $(x, 0)$ یا $(0, y)$ یک نقطه بحرانی f است. چون f_{xx} یا f_{yy} برای چنین نقاطی وجود ندارند، پس مشتق های پاره ای مرتبه دوم کار برد ندارند. ملاحظه می کنید که $f(0, 0) = 0$ و $f(x, y) \geq 0$ است برای تمام x ها و y ها، پس f در $(0, 0)$ یک مینیمم نسبی دارد. اما، در هر نقطه بحرانی (x, y) یا $f_x(x, y) \neq 0$ یا $f_y(x, y) \neq 0$ است، بطوری که f در هر نقطه بحرانی بجز $(0, 0)$ مقدار اکستريم نسبی یا نقطه زین اسبی ندارد. تصویر V

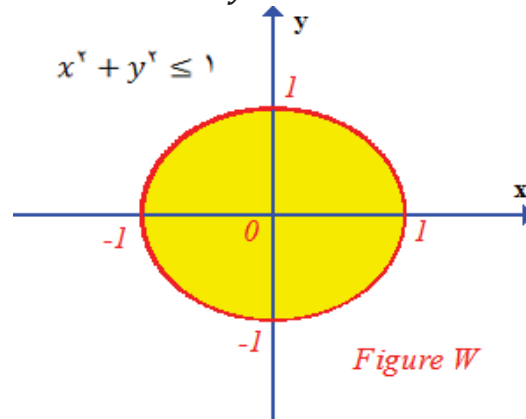


در تمرینات زیر مقادیر اکستريم f را در R پیدا کنید.

۶) $f(x, y) = x^2 - y^2$; R : دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$

پاسخ

در تصویر W مجموعه R که شامل دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$ است، ملاحظه می کنید.



$$f_x(x, y) = 2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -2y$$

است، بطوری که $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ اگر $x = 0 = y$ باشد. پس $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی در R است.

روی مرز R داریم $y^2 = 1 - x^2$ بطوری که داریم

$$f(x, y) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1 \quad \text{برای} \quad -1 \leq x \leq 1$$

مقدار ماکسیمم $2x^2 - 1$ در $[-1, 1]$ یک است و برای $x = 1$ و $x = -1$ اتفاق می افتاد.

و مقدار مینیمم -1 است که برای $x = 0$ اتفاق می افتد.

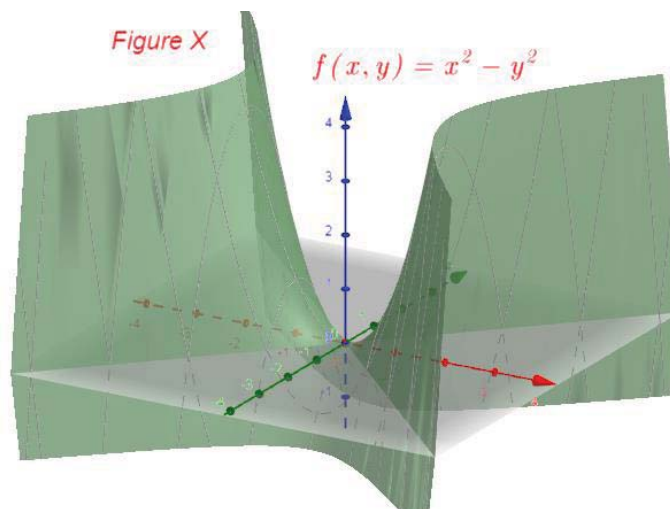
چون $f(0, 0) = 0$ است، پس مقدار ماکسیمم f روی R عبارت است از

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$$

و مقدار مینیمم عبارت است از

$$f(0, 1) = f(0, -1) = -1$$

تصویر X



$$۷) \quad f(x, y) = ۲ \sin x + ۳ \cos y$$

در تمرين شماره ۷ مجموعه R يك ناحيه مربع شكل است كه راس هاي آن مطابق زير هستند.

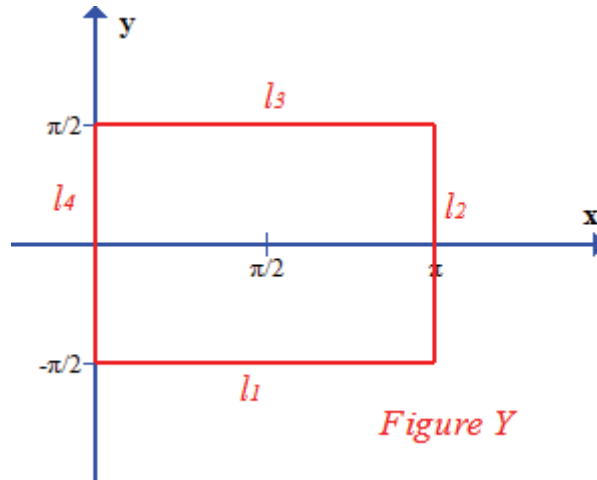
$$\left(0, -\frac{\pi}{۲}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{۲}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{۲}\right), \left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$$

پاسخ

$$f_x(x, y) = ۲ \cos x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -۳ \sin y$$

پس $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است براي (x, y) در R اگر $x = \frac{\pi}{۲}$ و $y = 0$ باشد.

پس $\left(\frac{\pi}{۲}, 0\right)$ يك نقطه بحراني f در R است. از تصوير Y ملاحظه مي كنيد كه



براي (x, y) روي $l_۱$ داريم $y = -\frac{\pi}{۲}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = 0$ است بطوري كه

$$f(x, y) = ۲ \sin x$$

است. پس روي $l_۱$ مقدار ماكسيم f عبارت است از $۲ \sin \frac{\pi}{۲} = ۲$

و مقدار مينيم f عبارت است از $۲ \sin 0 = 0$

همين مقادير اكستريم براي $l_۲$ بدست مي آيد.

براي (x, y) روي $l_۳$ داريم $x = \pi$ بطوري كه $f(x, y) = ۳ \cos y$ پس روي $l_۳$ مقدار

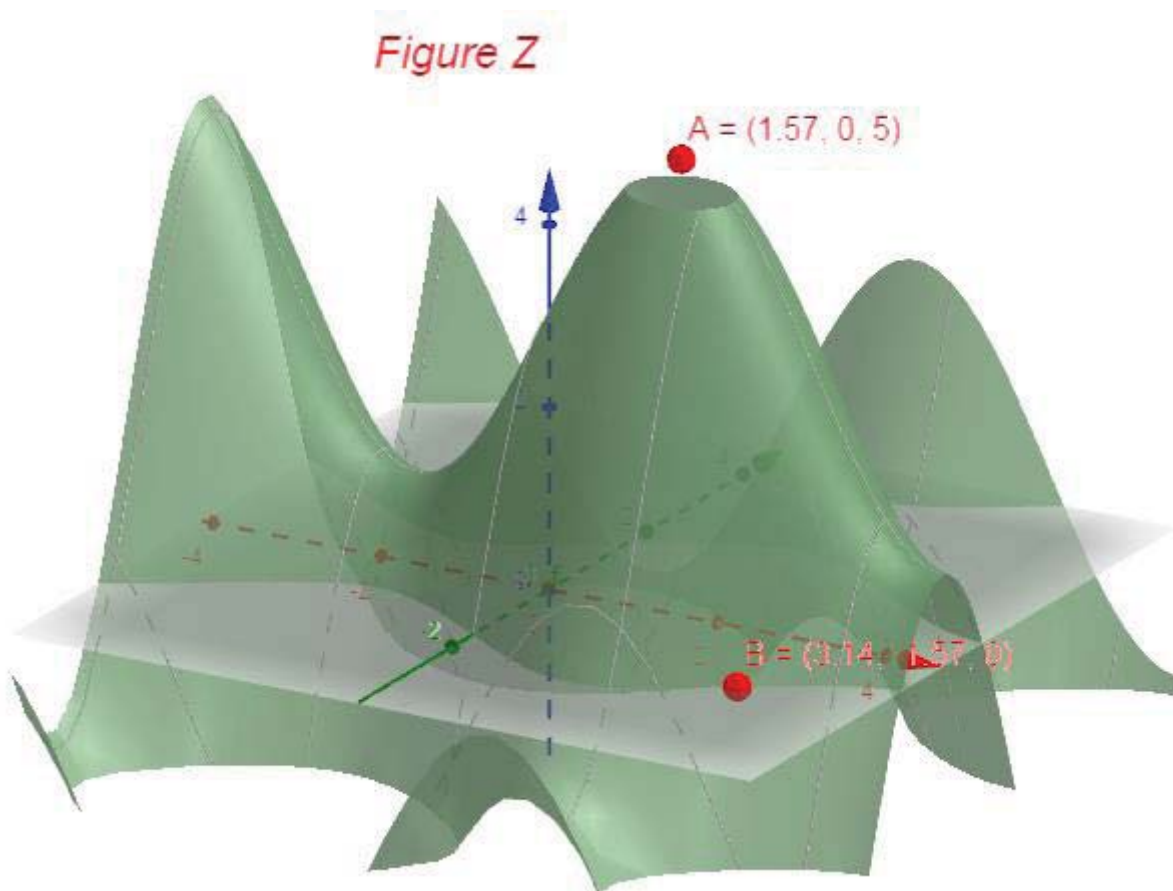
ماكسيم f عبارت است از $۳ \cos 0 = ۳$ و مقدار مينيم عبارت است از

$$f\left(\pi, -\frac{\pi}{۲}\right) = ۳ \cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = 0$$

همين مقادير اكستريم براي $l_۴$ بدست مي آيند.

چون $۵ = ۲ + ۳ = f\left(\frac{\pi}{۲}, 0\right)$ است، پس ماكسيم f روي R عبارت

است از $۵ = f\left(\frac{\pi}{۲}, 0\right)$ و مقدار مينيم عبارت است از $0 = f\left(\pi, -\frac{\pi}{۲}\right)$ تصوير Z



در تمرین زیر فرض کنید مقادیر اکستريم مورد نیاز ، وجود دارد.
۸- سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموع آنها ۴۸ و حاصل ضرب آنها هر اندازه که ممکن است بزرگ باشد. آن حاصل ضرب را محاسبه کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $p = xyz$ باشد برای سه عدد نامنفی x, y و z بطوری که رابطه زیر برقرار باشد.

$$x + y + z = 48$$

پس داریم $z = 48 - x - y$ و لذا $p = xy(48 - x - y)$ است.
می خواهیم مقدار ماکسیم p را روی ناحیه مثلثی R پیدا کنیم بطوری که R شامل تمام (x, y) هایی باشد بطوری که $x \geq 0, y \geq 0$ و $x + y \leq 48$ باشد. چنین مقدار ماکسیم وجود دارد ، بر اساس قضیه ماکسیم - مینیم.

چون $p = 0$ است ، اگر $x + y = 48$ یا $x = 0, y = 0$ باشد. پس مقدار ماکسیم p روی مرز R اتفاق نمی افتد ، و لذا باید در یک نقطه بحرانی داخل R اتفاق افتد.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = y(48 - x - y) - xy = y(48 - 2x - y)$$

و

$$\frac{\partial p}{\partial y} = x(48 - x - y) - xy = x(48 - x - 2y)$$

پس $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 = \frac{\partial p}{\partial y}$ است اگر $y(48 - 2x - y) = 0$ و $x(48 - x - 2y) = 0$ باشد. از

معادله اول می بینیم $y = 0$ و یا $48 - 2x - y = 0$ است. از معادله دوم می بینیم $x = 0$ و یا $48 - x - 2y = 0$ است. چون $x \neq 0$ و $y \neq 0$ است در هر نقطه داخلی R ، پس نتیجه می گیریم یک نقطه (x, y) داخل R یک نقطه بحرانی p است، اگر فقط $48 - 2x - y = 0$ و $48 - x - 2y = 0$ باشد. معادله اول را برای y حل می کنیم و $y = 48 - 2x$ بدست می آوریم. حالا y را در معادله دوم جانشین می کنیم و $48 - x - 2(48 - 2x) = 0$ بدست می آوریم. پس $x = 16$ و $y = 16$ است. لذا $(16, 16)$ تنها نقطه بحرانی p در R است. و لذا $z = 16$

حاصل ضرب ماکسیمم در نقطه بحرانی $(16, 16)$ اتفاق می افتد و $p(16, 16) = 4096$

۵.۸ - ضریب های لاگرانژ Lagrange Multipliers

در مثال ۶ بخش ۵.۷ مقدار ماکسیم تابع xyz را مشروط به این که $2x + 2y + z = 108$ باشد، پیدا کردیم. چنین شرطی برای مقادیر x ، y و z را قید یا محدودیت **Constraint** می نامند. در این بخش یک روش کلی برای پیدا کردن مقادیر اکستریم یک تابع به شرط یک محدودیت را شرح می دهیم. این روش توسط ریاضی دان فرانسوی بنام ژوزف لویی لاگرانژ ابداع شد.

Joseph Louis Lagrange

روش لاگرانژ برای تابع های دو متغیره

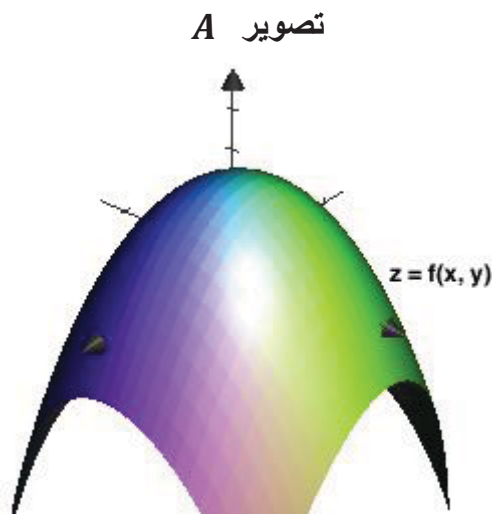
The Lagrange Method for Functions of Two Variables

فرض کنید می خواهیم مقدار اکستریم یک تابع دو متغیره f را، به شرط محدودیت $g(x, y) = c$ ، پیدا کنیم. یعنی می خواهیم یک مقدار اکستریم f روی منحنی تراز $g(x, y) = c$ را پیدا کنیم، بجای این که مقدار اکستریم را در تمام دامنه f جستجو کنیم. اگر f یک مقدار اکستریم روی منحنی تراز در نقطه (x_0, y_0) داشته باشد، پس تحت شرایطی یک عدد مانند λ وجود دارد، بطوری که داریم.

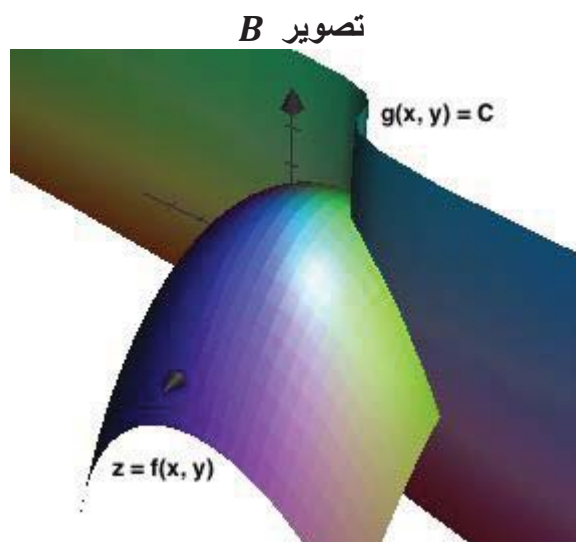
$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0) \quad (1)$$

برای این که نشان دهیم که چگونه رابطه (۱) برقرار است، در ذیل توضیح می دهیم.

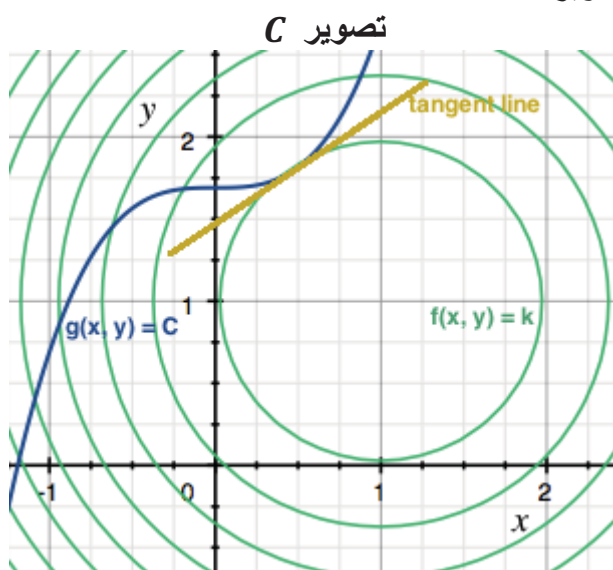
فرض می کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع حقیقی دو متغیره باشد. پس f یک رویه در $\mathbb{R}^3$ را نمایش می دهد. تصویر A



حالا فرض کنید می خواهیم $f(x, y)$ را به حد اکثر و یا حد اقل برسانیم، به شرط محدودیت $g(x, y) = c$. یعنی می خواهیم سعی کنیم ماکسیم یا مینیم f را پیدا کنیم در صورتی که نقاط (x, y) روی منحنی تراز $g(x, y) = c$ قرار داشته باشند. تصویر B .



برای بدست آوردن یک مقدار ماکسیمم ، باید مقدار k پیدا کنیم بطوری که منحنی تراز $f(x, y) = k$ مماس بر منحنی تراز $g(x, y) = C$ در نقطه ای مانند (x_0, y_0) باشد. این موضوع هنگامی اتفاق می افتد که هر دو منحنی های $f(x, y) = k$ و $g(x, y) = C$ یک خط مماس مشترک در نقطه (x_0, y_0) داشته باشند. تصویر C



چون هر دو منحنی های $f(x, y) = k$ سبز رنگ ، و $g(x, y) = C$ آبی رنگ ، یک خط مماس مشترک در (x_0, y_0) دارند ، خط خردلی رنگ ، و می دانیم حد دو منحنی دارای نرمال های مشترک در (x_0, y_0) دارند و لذا بردار های گرادیان f و g موازی هستند ، پس برای یک عدد مانند λ داریم.

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0)$$

تعریف - اگر (x_0, y_0) ایجاد یک مقدار اکستريم برای تابع $z = f(x, y)$ کند ، به شرط محدودیت $g(x, y) = C$ ، پس یک λ در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که داریم:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0)$$

عدد λ را ضریب لاگرانژ می نامند.

قضیه ضریب لاگرانژ برای تابع های دو متغیره

Lagrange Multipliers for Two Variables Functions Theorem

فرض می کنیم f و g در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشند. فرض می کنیم C منحنی تراز $g(x, y) = c$ که شامل (x_0, y_0) است ، باشد. فرض می کنیم C هموار باشد و (x_0, y_0) یک نقطه انتهایی منحنی C نباشد. اگر $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq 0$ و اگر f یک مقدار اکستريم روی C در نقطه (x_0, y_0) داشته باشد ، پس یک عدد مانند λ وجود دارد ، بطوری که

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0) \quad (۲)$$

اثبات

اگر $\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$ باشد ، پس شماره (۲) برای $\lambda = 0$ بر قرار است. پس فرض می کنیم $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$ باشد ، و فرض می کنیم I یک بازه باشد و

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} , \quad t \in I$$

یک پارامتری شده C باشد. فرض می کنیم t_0 به گونه ای باشد که $\mathbf{r}(t_0)$ متناظر نقطه (x_0, y_0) باشد ، پس t_0 یک نقطه انتهایی I نیست زیرا (x_0, y_0) نقطه انتهایی C نیست. و در نهایت فرض می کنیم F مطابق زیر تعریف شود.

$$F(t) = f(x(t), y(t)) , \quad t \in I$$

بر اساس قاعده زنجیری داریم.

$$F'(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \text{grad } f(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

چون f یک مقدار اکستريم روی C در $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ دارد ، نتیجه می گیریم F یک مقدار اکستريم در I در نقطه t_0 دارد. چون F در I مشتق پذیر است و t_0 یک نقطه انتهایی I نیست ، پس $F'(t_0) = 0$ است. لذا

$$0 = F'(t_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$$

اما ، $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ است ، چون $\mathbf{r}$ یک پارامتری شده هموار I است ، و بر اساس فرض قضیه $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$ است. بنا بر این $\text{grad } f(x_0, y_0)$ عمود است بر $\mathbf{r}'(t_0)$ که خود مماس است بر C . لذا $\text{grad } f(x_0, y_0)$ نرمال است بر C . در نهایت بر اساس قضیه نرمال بر منحنی تراز بخش ۵.۶ نتیجه می گیریم که $g(x_0, y_0)$ نرمال است بر C . پس شماره (۲) ثابت شد.

همان طور که گفتیم λ را ضریب لاگرانژ می نامند. همچنین ملاحظه می کنید که شماره (۲) معادل دو رابطه زیر است.

$$f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0) \quad \text{و} \quad f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$$

روش پیدا کردن مقادیر اکستريم برای تابع های دو متغیره از طریق ضریب لاگرانژ ، مطابق زیر است.

۱- فرض کنید f یک مقدار اکستريم روی منحنی تراز $g(x, y) = c$ دارد.

۲- معادله های زیر را برای پیدا کردن x و y بکار برید.

$$g(x, y) = c \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \end{cases}$$

۳- مقدار f در هر نقطه (x, y) که در مرحله دوم پیدا می شود ، محاسبه کنید و همچنین در هر نقطه انتهایی منحنی ، اگر وجود داشته باشد. اگر f روی منحنی تراز $g(x, y) = c$ یک مقدار ماکسیمم داشته باشد ، بزرگ ترین مقادیری است که محاسبه شده است. اگر f روی منحنی تراز $g(x, y) = c$ یک مقدار مینیمم داشته باشد ، کوچک ترین مقادیری است که محاسبه شده است.

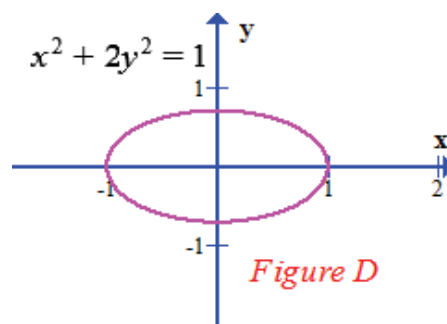
مثال ۱ - فرض کنید $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ باشد. مقادیر اکستريم f را روی بیضی

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y) = x^2 + 2y^2$ باشد ، پس محدودیت $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$ است. تصویر D



چون

$$\text{grad } f(x, y) = 2xi + 4y^2j \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = 2xi + 4y^2j$$

است ، پس معادله هایی که بکار خواهیم برد مطابق زیر هستند.

$$(3) \quad x^2 + 2y^2 = 1 \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad \begin{cases} 2x = 2x\lambda & (4) \\ 4y^2 = 4y\lambda & (5) \end{cases}$$

بر اساس (۴) یا $x = 0$ است و یا $\lambda = 1$ اگر $x = 0$ باشد ، پس شماره (۳) می شود

$2y^2 = 1$ که در این صورت یا $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است و یا $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. اگر $\lambda = 1$ باشد ، پس

شماره (۵) می شود $4y = 12y^2$ یعنی $y = 0$ و یا $y = \frac{1}{3}$ بر اساس شماره (۳) اگر $y = 0$ باشد، پس $x^2 + 2(0)^2 = 1$ است یعنی $x = 1$ و یا $x = -1$ است. اگر $y = \frac{1}{3}$

باشد، پس $x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ است، یعنی $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و یا $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ است. پس تنها مقادیر اکستريم f در

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0), (-1, 0), \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ و } \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

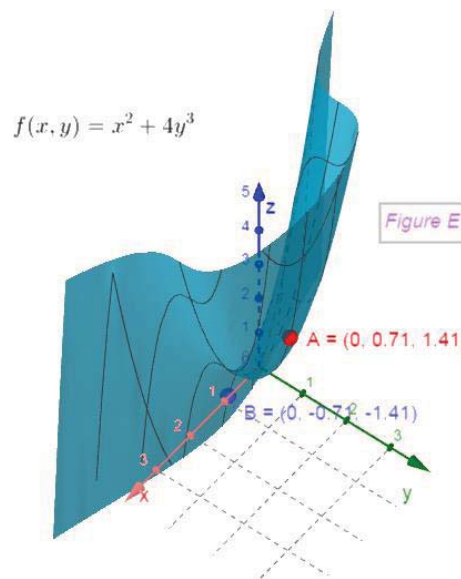
اتفاق می افتد. حال چون

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \quad f(1, 0) = 1 = f(-1, 0)$$

$$f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \quad f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27} = f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

است، نتیجه می گیریم مقدار ماکسیم $\sqrt{2}$ در $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و مقدار مینیم $-\sqrt{2}$ در $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

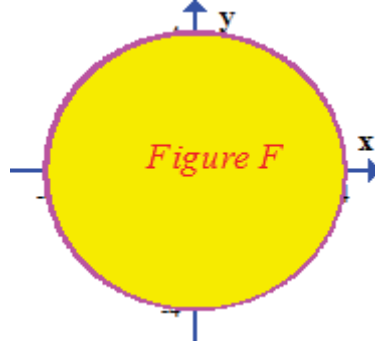
اتفاق می افتد. تصویر E



مثال ۲ - فرض کنید $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ باشد. مقادیر اکستریم f روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 16$ پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس قضیه ماکسیمم-مینیمم، f روی دیسک مقادیر اکستریم دارد، که می تواند روی مرز $x^2 + y^2 = 16$ باشد و یا داخل دیسک $x^2 + y^2 < 16$ تصویر F



ابتدا ضریب های لاگرانژ را برای پیدا کردن مقادیر احتمالی f روی دایره $x^2 + y^2 = 16$ بکار می بریم. فرض می کنیم $g(x, y) = x^2 + y^2 = 16$ باشد، پس محدودیت $g(x, y) = x^2 + y^2 = 16$ است. چون داریم

$$\text{grad } f(x, y) = 6xi + (4y - 4)j \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = 2xi + 2yj$$

پس، معادله های زیر را برای پیدا کردن x و y بکار می بریم.

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 16 \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y) \quad \begin{cases} 6x = 2x\lambda & (7) \\ 4y - 4 = 2y\lambda & (8) \end{cases}$$

بر اساس (۷) یا $x = 0$ است و یا $\lambda = 3$ اگر $x = 0$ باشد، پس بر اساس (۶) داریم $y = 4$ و یا $y = -4$ است. اگر $\lambda = 3$ باشد، پس شماره (۸) می شود

$$4y - 4 = 6y \quad \text{یا} \quad y = -2$$

پس بر اساس (۶) داریم.

$$x^2 + (-2)^2 = 16 \quad \text{پس} \quad x = \sqrt{12} \quad \text{یا} \quad x = -\sqrt{12}$$

پس f می تواند مقادیر اکستریم روی دایره $x^2 + y^2 = 16$ فقط در نقاط زیر داشته باشد.

$$(0, 4), (0, -4), (\sqrt{12}, -2) \quad \text{یا} \quad (-\sqrt{12}, -2)$$

حالا بر می گردیم به داخل دیسک. پس داریم

$$f_x(x, y) = 6x \quad f_y(x, y) = 4y - 4$$

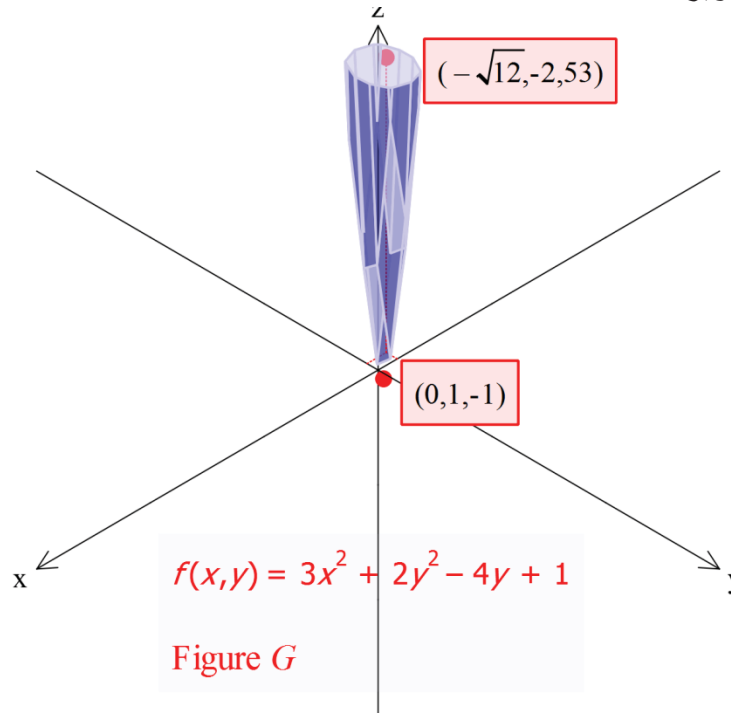
بطوری که $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است، فقط اگر $x = 0$ و یا $y = 1$ باشد. پس f

می تواند مقدار اکستریم روی دیسک در نقطه $(0, 1)$ داشته باشد. محاسبه می کنیم و نتیجه می گیریم.

$$f(0, 4) = 17 \quad f(\sqrt{12}, -2) = f(-\sqrt{12}, -2) = 53$$

$$f(0, -4) = 49 \quad f(0, 1) = -1$$

و در نهایت ، نتیجه می گیریم که مقدار ماکسیمم f روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 16$ مقدار ۵۳ است و مینیمم ۱- است. تصویر G



روش پیدا کردن مقادیر اکستریم برای تابع های سه متغیره از طریق ضریب لاگرانژ ، مطابق زیر است.
مانند توضیحاتی که در مورد تابع های دو متغیره دادیم ، برای تابع های سه متغیره داریم.
$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0, z_0)$$

۱ - فرض می کنیم f یک مقدار اکستریم روی رویه تراز $g(x, y, z) = c$ داشته باشد.

۲ - معادله های زیر را حل کنید.

$$g(x, y, z) = c \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z) \quad \begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \end{cases}$$

۳ - مقدار f در هر نقطه (x, y, z) که در مرحله دوم پیدا می شود ، محاسبه کنید و همچنین در هر نقطه انتهایی منحنی ، اگر وجود داشته باشد. اگر f روی رویه تراز $g(x, y, z) = c$ یک مقدار ماکسیمم داشته باشد ، بزرگ ترین مقادیری است که محاسبه شده است. اگر f روی رویه تراز $g(x, y, z) = c$ یک مقدار مینیمم داشته باشد ، کوچک ترین مقادیری است که محاسبه شده است.

مثال ۳ - فرض کنید $V(x, y, z) = xyz$ برای $z \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x \geq 0$ باشد. مقدار ماکسیمم V را پیدا کنید به شرطی که $2x + 2y + z = 108$ باشد.

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y, z) = 2x + 2y + z$ باشد ، پس محدودیت $g(x, y, z) = 2x + 2y + z = 108$ است .

چون

$$\text{grad } V(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

است پس ، معادله هایی که باید برای پیدا کردن x, y, z بکار ببریم ، مطابق زیر هستند.

$$(9) \quad 2x + 2y + z = 108 \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z) \quad \begin{cases} yz = 2\lambda & (10) \\ xz = 2\lambda & (11) \\ xy = \lambda & (12) \end{cases}$$

ابتدا λ را بر حسب x, y و z در معادله های (10) تا (12) پیدا می کنیم.

$$(13) \quad \lambda = \frac{yz}{2} = \frac{xz}{2} = xy$$

چون $V(x, y, z) = 0$ است اگر z یا y یا x صفر باشد ، و چون مسلماً صفر مقدار ماکسیمم V نیست ، پس می توان فرض کرد z و y و x نا صفر باشند. پس ، بر اساس (13) داریم $x = y$ و $z = 2y$ است. x و z را در (9) جانشین می کنیم. پس داریم.

$$2y + 2y + 2y = 108 \quad \text{یا} \quad y = 18$$

لذا $x = 18$ و $z = 2(18) = 36$ و در نهایت $V(18, 18, 36)$ تنها مقدار اکستریم ممکن V است با توجه به محدودیت داده شده. لذا

$$\text{حد اکثر حجم} \quad V(18, 18, 36) = 11664$$

مثال ۴ - نقطه ای ای را روی رویه $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ پیدا کنید که فاصله آن تا مبدا حد اقل باشد.

پاسخ

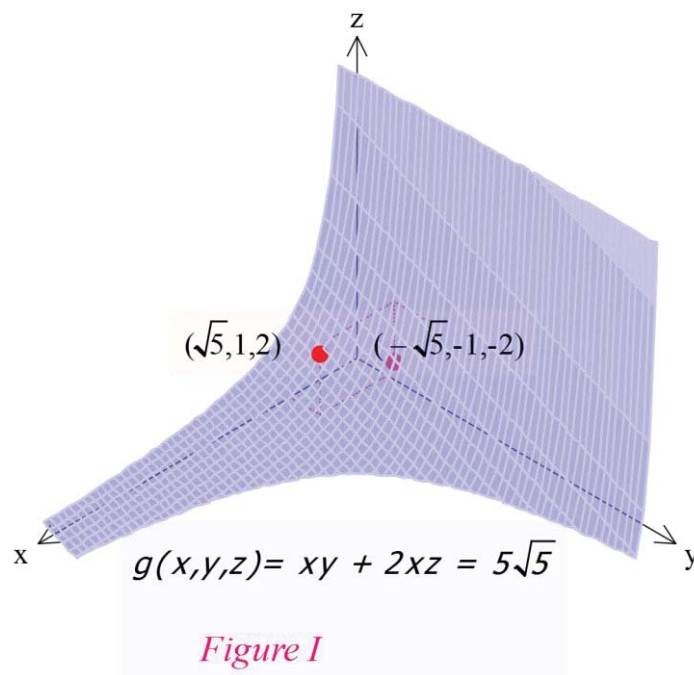
فرض می کنیم $f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله بین (x, y, z) تا مبدا مختصات باشد. می خواهیم مقدار مینیمم f_1 روی رویه پیدا کنیم. برای آسان شدن کار ، فرض می کنیم

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

باشد ، می خواهیم مینیمم f را به شرط شرط محدودیت

$$g(x, y, z) = xy + 2xz = 5\sqrt{5}$$

پیدا کنیم. تصویر I



ملاحظه می کنید که f و f_1 مقادیر اکستريم یکسان دارند، پس f را بجای f_1 بکار می بریم. حال چون داریم.

$$\text{grad } f(x, y, z) = 2xi + 2yj + 2zk$$

و

$$\text{grad } g(x, y, z) = (y + 2z)i + xj + 2xk$$

معادله هایی که برای پیدا کردن x, y و z بکار خواهیم برد، مطابق زیر هستند.

$$xy + 2xz = 5\sqrt{5} \quad (14) \quad \text{محدودیت}$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z) \quad \begin{cases} 2x = (y + 2z)\lambda & (15) \\ 2y = x\lambda & (16) \\ 2z = 2x\lambda & (17) \end{cases}$$

ملاحظه می کنید که λ نمی تواند صفر باشد، زیرا آنوقت بر اساس (15) تا (17) خواهیم داشت.

$$x = y = z = 0$$

و در این صورت معادله (14) برقرار نیست. حال چون $\lambda \neq 0$ است، پس (16) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x = \frac{2y}{\lambda} \quad (18)$$

نتیجه را در (17) جانشین می کنیم.

$$2z = 2\left(\frac{2y}{\lambda}\right)\lambda \Rightarrow z = 2y \quad (19)$$

اگر y صفر باشد، پس بر اساس (۱۸) و (۱۹) خواهیم داشت $x = 0$ و $z = 0$ و در این صورت شماره (۱۴) برقرار نیست. پس $y \neq 0$ است. با استفاده از (۱۸) و (۱۹) و جانشین کردن x و z در (۱۵) داریم.

$$2\left(\frac{2y}{\lambda}\right) = [y + 2(2y)]\lambda$$

و چون $y \neq 0$ است، پس

$$\frac{4}{\lambda} = 5\lambda \quad \text{یا} \quad \lambda^2 = \frac{4}{5} \quad (20)$$

با استفاده از (۱۸) و (۱۹) برای جانشین کردن x و z خواهیم داشت.

$$5\sqrt{5} = \left(\frac{2y}{\lambda}\right)y + 2\left(\frac{2y}{\lambda}\right)(2y) = \frac{1}{\lambda}y^2 \quad (21)$$

از (۲۱) نتیجه می گیریم λ مثبت است. پس (۲۰) می گوید $\lambda = 2\sqrt{5}$ است و (۲۱) می گوید $y = 1$ و یا $y = -1$ است. بر اساس (۱۸) و (۱۹) اگر $y = 1$ باشد، پس

$$x = \frac{2y}{\lambda} = \sqrt{5} \quad \text{و} \quad z = 2y = 2$$

است. و اگر $y = -1$ باشد، پس

$$x = \frac{2y}{\lambda} = -\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z = 2y = -2$$

است. در نتیجه تنها نقاط روی $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ که می توانند کمترین فاصله را تا مبدا داشته باشند

نقاط $(\sqrt{5}, 1, 2)$ و $(-\sqrt{5}, -1, -2)$ هستند. چون بر اساس فرض مساله چنین مینیمم وجود دارد و آن مقدار مینیمم f_1 روی رویه است و چون

$$f_1(\sqrt{5}, 1, 2) = f_1(-\sqrt{5}, -1, -2) = \sqrt{10}$$

است، پس کمترین فاصله از یک نقطه روی رویه تا مبدا عبارت است از $\sqrt{10}$

تمرینات ۵.۸

در تمرینات زیر مقادیر اکستريم f مشروط به محدودیت داده شده ، پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x, y) = x + y^2; x^2 + y^2 = 4$$

$$۲) \quad f(x, y) = x^3 + 2y^3; x^2 + y^2 = 1$$

$$۳) \quad f(x, y, z) = xyz; x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$$

در تمرینات زیر ، مقدار مینیم f را مشروط به محدودیت داده شده ، پیدا کنید.

$$۴) \quad f(x, y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7; 2x^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{4}$$

$$۵) \quad f(x, y, z) = x^4 + 8y^4 + 27z^4; x + y + z = \frac{11}{12}$$

در تمرین زیر مقادیر اکستريم f را در ناحیه ای که بوسیله نا مساوی داده شده مشخص شده ، پیدا کنید.

$$۶) \quad f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3; x^2 + y^2 \leq 4$$

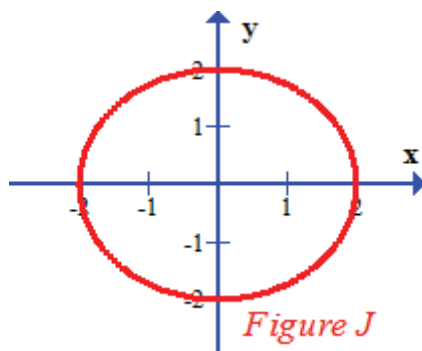
پاسخ تمرینات ۵.۸

در تمرینات زیر مقادیر اکستریم f مشروط به محدودیت داده شده ، پیدا کنید.

$$۱) \quad f(x, y) = x + y^2; x^2 + y^2 = 4$$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y) = x^2 + y^2$ باشد ، پس محدودیت $g(x, y) = 4$ است. تصویر J



حالا داریم

$$\text{grad } f(x, y) = i + 2y j \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = 2x i + 2y j$$

پس

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$$

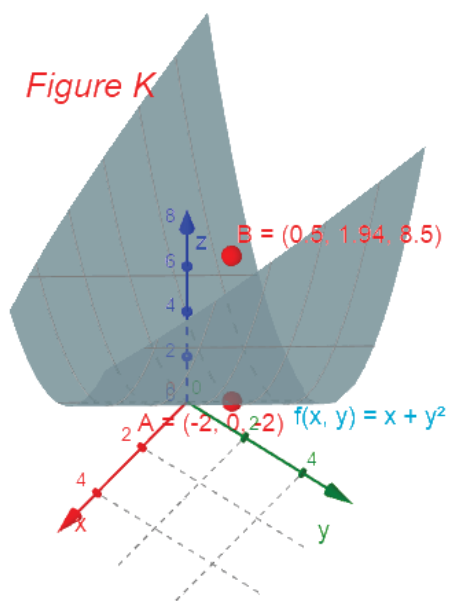
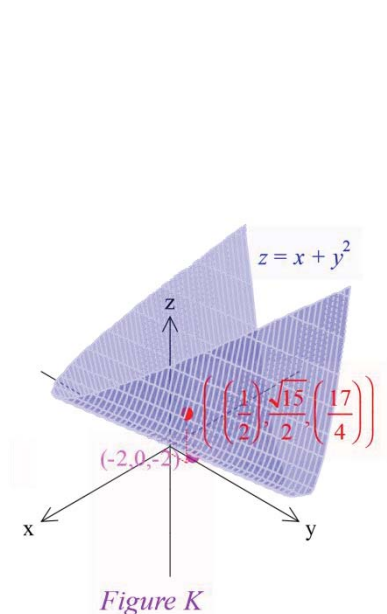
است ، اگر $1 = 2x\lambda$ و $2y = 2y\lambda$ باشد. بر اساس معادله دوم $y = 0$ است و یا $\lambda = 1$ است. بر اساس محدودیت ، اگر $y = 0$ باشد ، پس $x^2 + 0^2 = 4$ است و لذا $x = \pm 2$ است. اگر $\lambda = 1$ باشد ، پس $1 = 2x$ است و لذا $x = \frac{1}{2}$ است و

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

مقادیر اکستریم ممکن f عبارتند از

$$f(2, 0) = 2, \quad f(-2, 0) = -2, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{17}{4}, \quad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{17}{4}$$

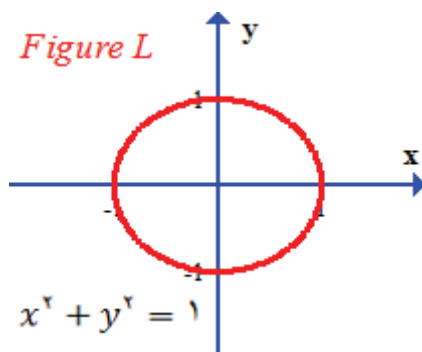
و در نهایت مقدار ماکسیمم $\frac{17}{4}$ و مقدار مینیمم -2 است. تصویر K



$$۲) \quad f(x, y) = x^۳ + ۲y^۳; x^۲ + y^۲ = ۱$$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y) = x^۲ + y^۲$ باشد، پس محدودیت $g(x, y) = x^۲ + y^۲ = ۱$ است. تصویر L



$$\text{grad } f(x, y) = ۳x^۲\mathbf{i} + ۶y^۲\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = ۲x\mathbf{i} + ۲y\mathbf{j}$$

بطوری که $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$ است اگر

$$۳x^۲ = ۲x\lambda \quad \text{و} \quad ۶y^۲ = ۲y\lambda$$

باشد. بر اساس معادله اول، یا $x = 0$ یا $x = \frac{۲}{۳}\lambda$ است. و بر اساس معادله دوم یا $y = 0$ است

و یا $y = \frac{۱}{۳}\lambda$. حال اگر $x = 0$ باشد، پس بر اساس محدودیت $y = \pm ۱$ است. و اگر $y = 0$

باشد، پس بر اساس محدودیت $x = \pm ۱$ است، در غیر اینصورت $x = \frac{۲}{۳}\lambda$ و $y = \frac{۱}{۳}\lambda$ است.

لذا محدودیت می شود

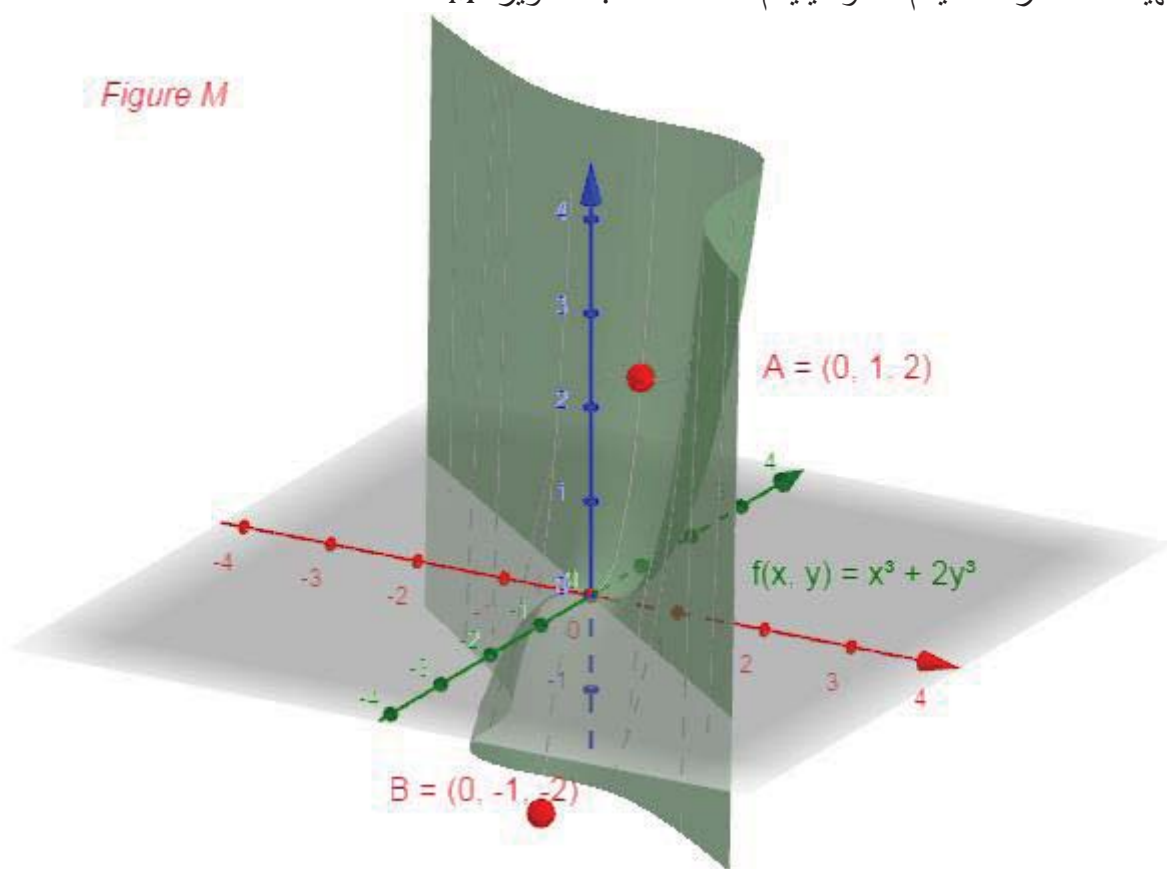
$$\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda\right)^2 = 1$$

پس $\lambda = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$ است بطوری که $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ و $y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ است. مقادیر اکستریم ممکن عبارتند از

$$f(0, 1) = 2, \quad f(0, -1) = -2, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(-1, 0) = -1, \\ f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-6}{5\sqrt{5}}$$

در نهایت، مقدار ماکسیمم ۲ و مینیمم ۲- است. تصویر M

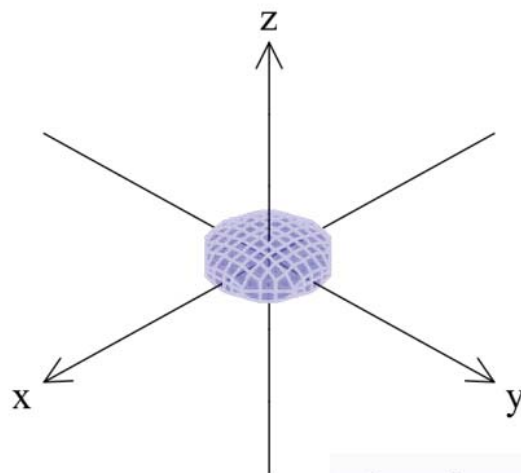


$$۳) \quad f(x, y, z) = xyz; x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2$ باشد، پس محدودیت

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$$

است. تصویر N .

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$$

Figure N

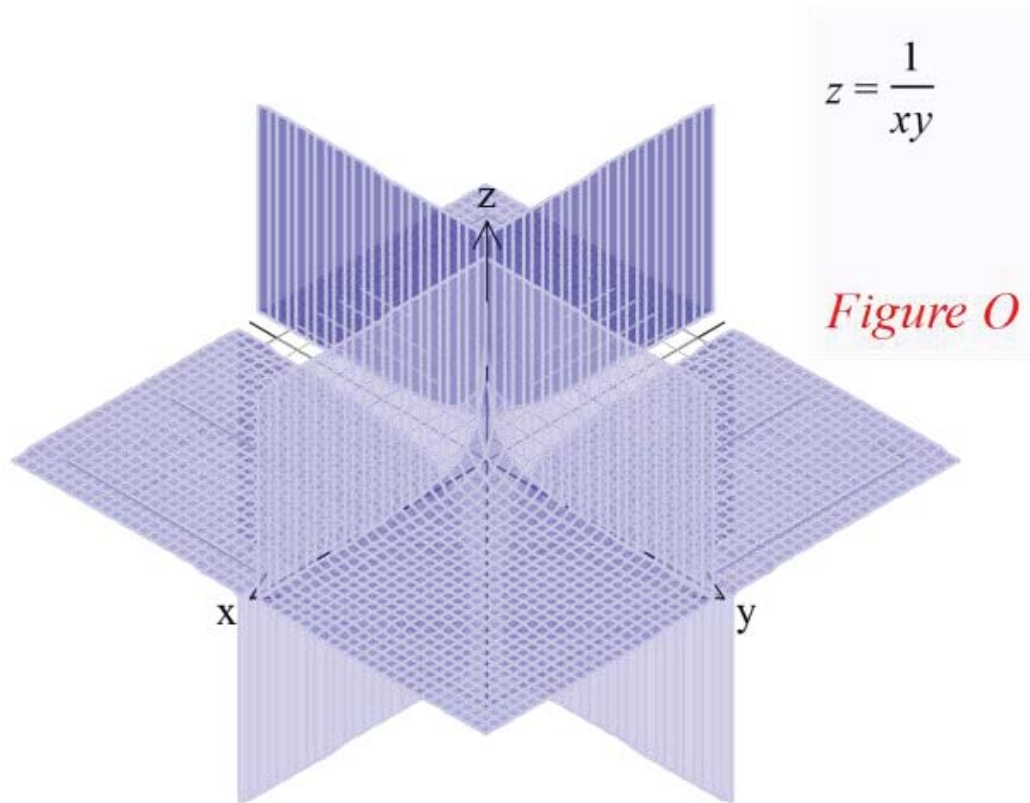
همانطور که گفتیم، نمی توان نمودار یک تابع سه متغیره را در سیستم سه بعدی رسم کرد. اما می توانیم رویه تراز را رسم کنیم. برای این کار $f(x, y, z) = c$ قرار می دهیم و معادله بدست آمده را برای z حل می کنیم.

پس برای رسم $f(x, y, z) = xyz$ داریم.

$$xyz = ۱$$

$$z = \frac{1}{xy}$$

تصویر O



حال داریم.

$$\text{grad } f(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

است. بطوری که $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{grad } g(x, y, z)$ است، اگر داشته باشیم

$$yz = 2x\lambda, \quad xz = 2y\lambda \quad \text{و} \quad xy = 2z\lambda$$

اگر $\lambda = 0$ یا $z = 0$ یا $y = 0$ یا $x = 0$ باشد، پس $f(x, y, z) = 0$ است. لذا فرض می کنیم همه این متغیرها، نا صفر باشند. پس داریم.

$$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z}$$

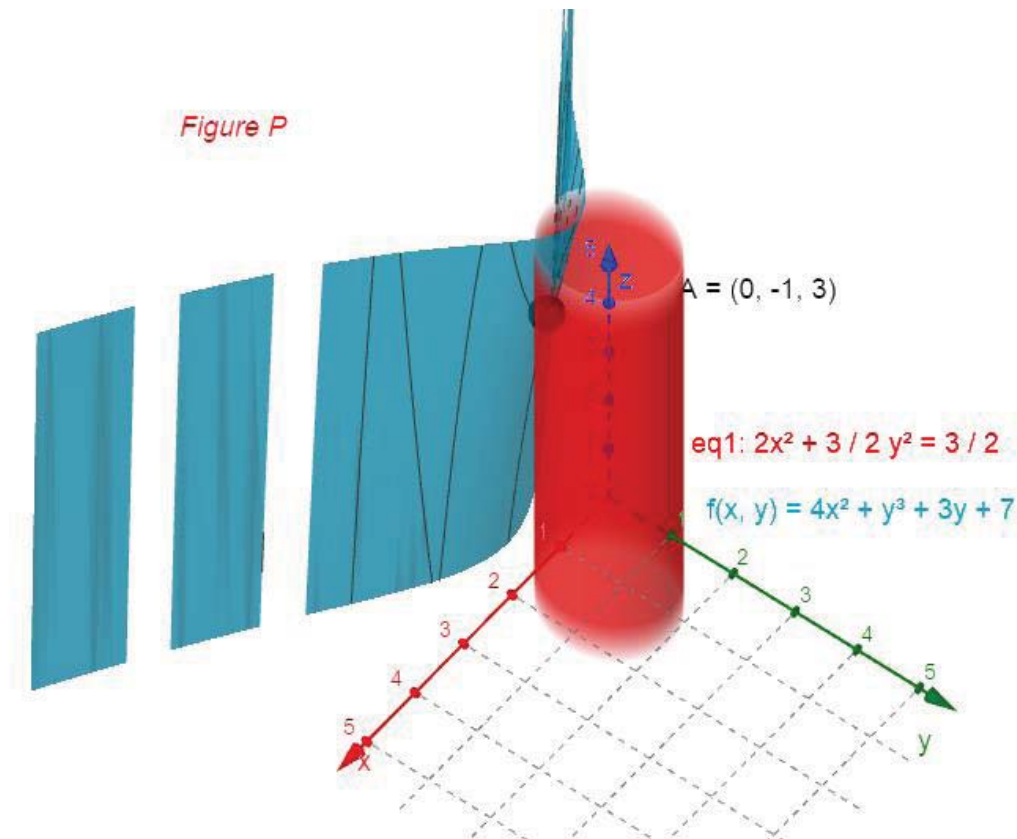
بطوری که $x^2 = y^2$ و $y^2 = 4x^2$ است. پس $z = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ ، $x = \pm\sqrt{2}$ ، $y = \pm\sqrt{2}$ است.

چون $f\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{2}$ است، پس مقدار ماکسیمم f می شود $\sqrt{2}$ و مقدار مینیمم $-\sqrt{2}$ می شود f

در تمرینات زیر، مقدار مینیمم f را مشروط به محدودیت داده شده، پیدا کنید.

$$۴) \quad f(x, y) = ۴x^۲ + y^۳ + ۳y + ۷; \quad ۲x^۲ + \frac{۳}{۲}y^۲ = \frac{۳}{۲}$$

پاسخ
تصویر P



فرض می کنیم $g(x, y) = ۲x^۲ + \frac{۳}{۲}y^۲ = \frac{۳}{۲}$ باشد، پس محدودیت $g(x, y) = ۲x^۲ + \frac{۳}{۲}y^۲ = \frac{۳}{۲}$ است.

$$\text{grad } f(x, y) = ۸xi + (۳y^۲ + ۳)j \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = ۴xi + ۳yj$$

است، بطوری که $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$ است، اگر

$$۸x = ۴x\lambda \quad \text{و} \quad ۳y^۲ + ۳ = ۳y\lambda$$

باشد. بر اساس معادله اول داریم $\lambda = 2$ یا $x = 0$ است. اگر $x = 0$ باشد پس بر اساس محدودیت داریم

$$2 * 0^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{4}$$

بطوری که $y = 1$ و یا $y = -1$ است. اگر $\lambda = 2$ باشد، پس بر اساس معادله دوم، داریم

$$3y^2 + 3 = 6y$$

است، بطوری که $3y^2 - 6y + 3 = 0$ است. و لذا $y = 1$ است. اما، بر اساس محدودیت، اگر

$y = 1$ باشد، پس $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} * 1^2 + \frac{3}{4}x^2$ است. پس $x = 0$ است. چون $f(0, 1) = 11$ است و

$f(0, -1) = 3$ نتیجه می گیریم مقدار مینیمم تابع ۳ است.

$$5) \quad f(x, y, z) = x^4 + 8y^4 + 27z^4; x + y + z = \frac{11}{12}$$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x, y, z) = x + y + z$ باشد، پس محدودیت $g(x, y, z) = \frac{11}{12}$

است. تصویر Q

$$\text{grad } f(x, y, z) = 4x^3 \mathbf{i} + 32y^3 \mathbf{j} + 108z^3 \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

است. بطوری که $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$ است اگر

$$4x^3 = \lambda, \quad 32y^3 = \lambda \quad \text{و} \quad 108z^3 = \lambda$$

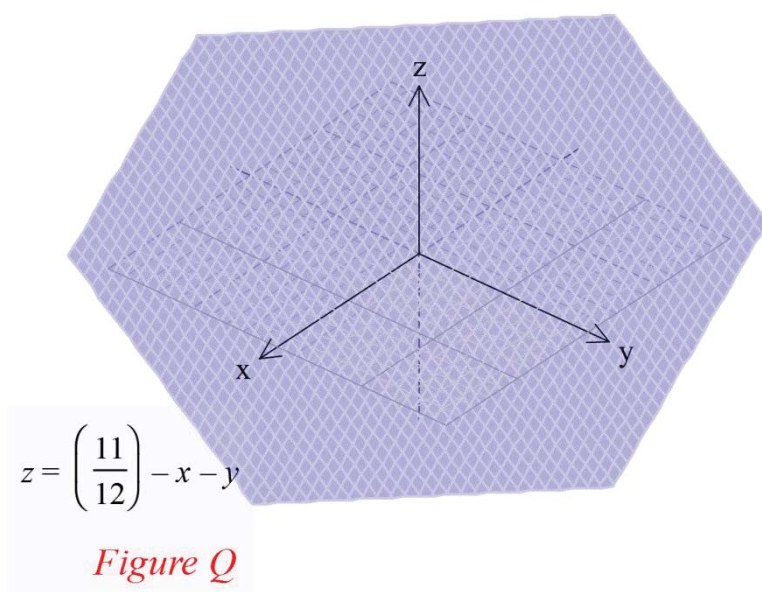
باشد. پس $4x^3 = 32y^3$ است، بطوری که $y = \frac{1}{4}x$ است، و $4x^3 = 108z^3$ و

است، بطوری که $z = \frac{1}{3}x$ است. لذا محدودیت می شود $x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{11}{12}$ یعنی $x = \frac{1}{4}$ و

$y = \frac{1}{4}$ و $z = \frac{1}{6}$ است. و در نهایت

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 8\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 27\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{11}{96}$$

مقدار مینیمم f است.



در تمرین زیر مقادیر اکستريم f را در ناحیه ای که بوسیله نا مساوی داده شده مشخص شده ، پیدا کنید.

۶) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3; x^2 + y^2 \leq 4$

پاسخ

ابتدا ضریب های لاگرانژ را بکار می بریم تا مقادیر اکستريم f را روی دایره $x^2 + y^2 = 4$ پیدا کنیم. فرض می کنیم $g(x, y) = x^2 + y^2$ باشد ، پس محدودیت $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$ است. چون داریم

$$\text{grad } f(x, y) = 4xi + (2y + 2)j \quad \text{و} \quad \text{grad } g(x, y) = 2xi + 2y j$$

پس

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

است اگر $4x = 2x\lambda$ و $2y + 2 = 2y\lambda$ باشد. از معادله اول داریم $x = 0$ یا $\lambda = 0$. اگر $x = 0$ باشد ، پس بر اساس محدودیت داریم $0^2 + y^2 = 4$ بطوری که $y = \pm 2$ است. اگر $\lambda = 2$ باشد ، پس بر اساس معادله دوم ، داریم $2y + 2 = 4y$ ، بطوری که $y = 1$ است ،

و محدودیت می گوید $x^2 + 1 = 4$ و یا $x = \pm\sqrt{3}$ است. مقادیر ممکن f روی دایره

$$x^2 + y^2 = 4$$

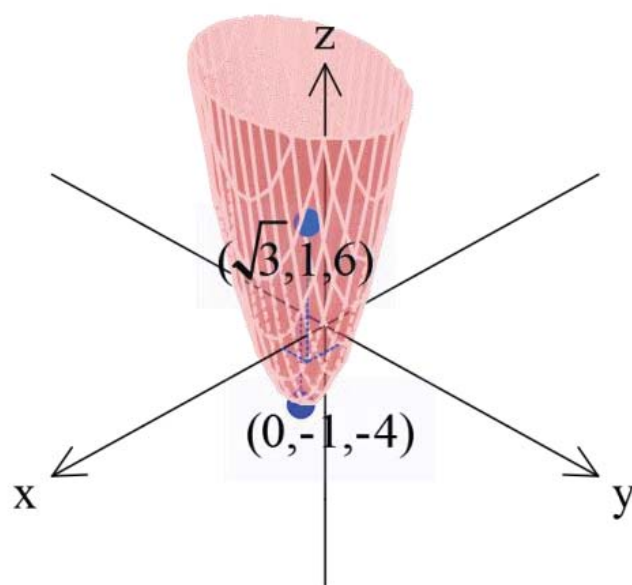
عبارتند از

$$f(0, 2) = 5, \quad f(0, -2) = -3 \quad \text{و} \quad f\left(\pm\sqrt{3}, 1\right) = 6$$

برای نقاط داخلی دیسک $x^2 + y^2 < 4$ داریم.

$$f_x(x, y) = 4x \text{ و } f_y(x, y) = 2y + 2$$

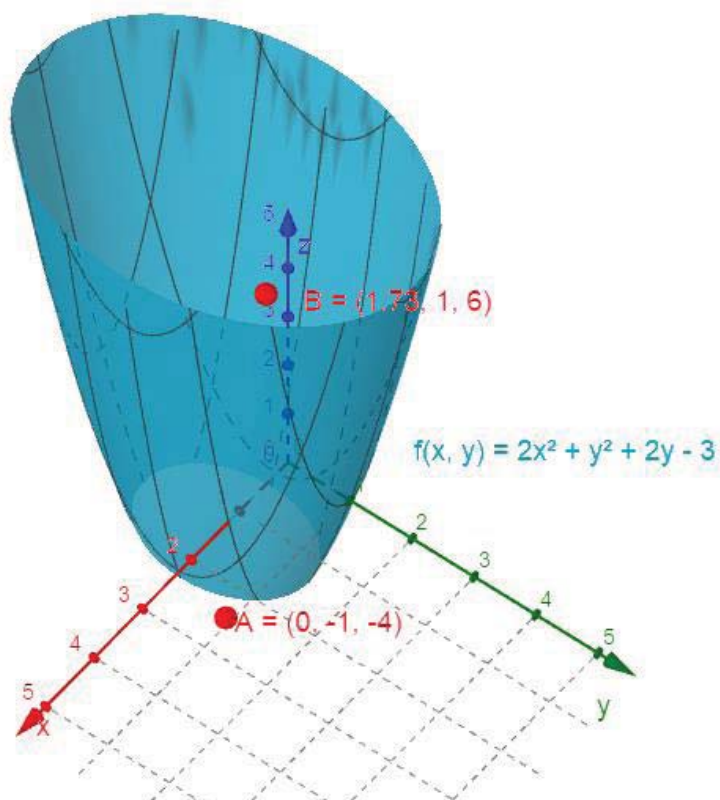
بطوری که $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ است، فقط اگر $x = 0$ و $y = -1$ باشد. اما $f(0, -1) = -4$ است، در نتیجه مقدار ماکسیمم f روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 4$ عبارت است از ۶ و مقدار مینیمم -4 است. تصویر U



$$z = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$$

Figure U

Figure U



جلد سوم حسابان

فصل ششم

انتگرال های چند گانه

Multiple Integrals

اگر f یک تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ باشد، پس انتگرال به شکل $\int_a^b f(x) dx$ برای پیدا کردن مساحت زیر نمودار f ، بکار می بردیم. انتگرال های تابع های دو و سه متغیره برای پیدا کردن مساحت های ناحیه های پیچیده تر، حجم و جرم اجسام و غیرو بکار می روند. اثبات قضیه های این بخش بسیار پیچیده هستند و در سطوح بالای حسابان مورد بحث قرار می گیرند. لذا اثبات این قضیه ها را به حسابان پیشرفته موکول می کنیم. اگر خداوند این توفیق را عطا کند.

۲.۱ - انتگرال های دو گانه Double Integrals

از این به بعد، انتگرال به شکل $\int_a^b f(x) dx$ را انتگرال ساده یا منفرد **Single Integral** می نامیم در این بخش، انتگرال های دو گانه را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که چگونه می توانیم آنها را برای پیدا کردن حجم یک ناحیه سه بعدی **Solid Region** روی یک ناحیه مستطیلی در صفحه xy بکار ببریم. بسیاری از خواص انتگرال های دو گانه، شبیه آنچه در مورد انتگرال های ساده دیدیم، می باشد.

حجم و انتگرال دو گانه Volume and the Double Integral

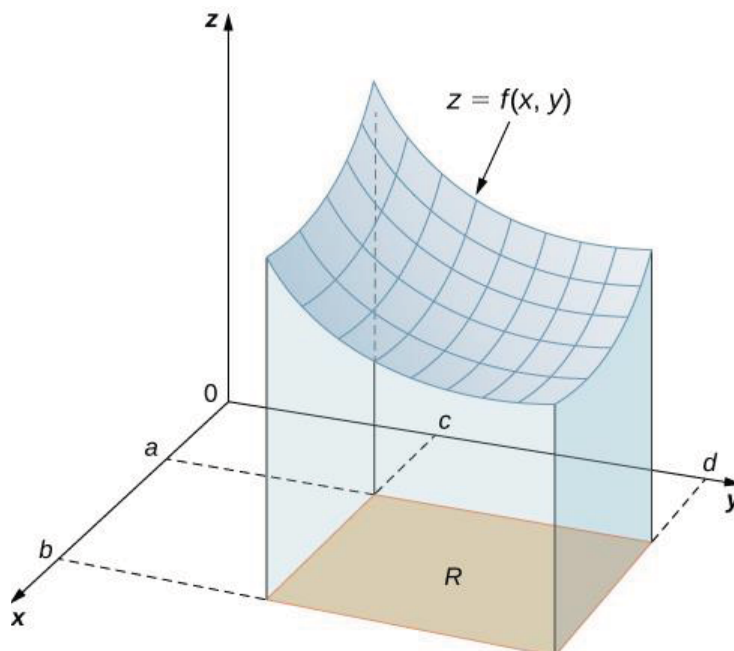
برای شروع کار، فضای بالای یک ناحیه مستطیلی R را در نظر بگیرید. همچنین یک تابع دو متغیره و پیوسته $f(x, y) \geq 0$ که در مستطیل بسته R تعریف شده باشد، ملاحظه کنید.

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

اینجا $[a, b] \times [c, d]$ حاصل ضرب دکارتی دو بازه بسته $[a, b]$ و $[c, d]$ است که شامل دو گانه های مستطیل (x, y) است، بطوری که $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ باشد. نمودار f نمایش یک رویه بالای صفحه xy است و معادله آن $z = f(x, y)$ است. اینجا z ارتفاع رویه در نقطه (x, y) است. فرض می کنیم D یک ناحیه سه بعدی است که بالای R و زیر f قرار دارد. قاعده ناحیه سه بعدی، مستطیل R در صفحه xy است. می خواهیم حجم ناحیه سه بعدی D را پیدا کنیم. تصویر A

ناحیه سه بعدی: Solid Region:

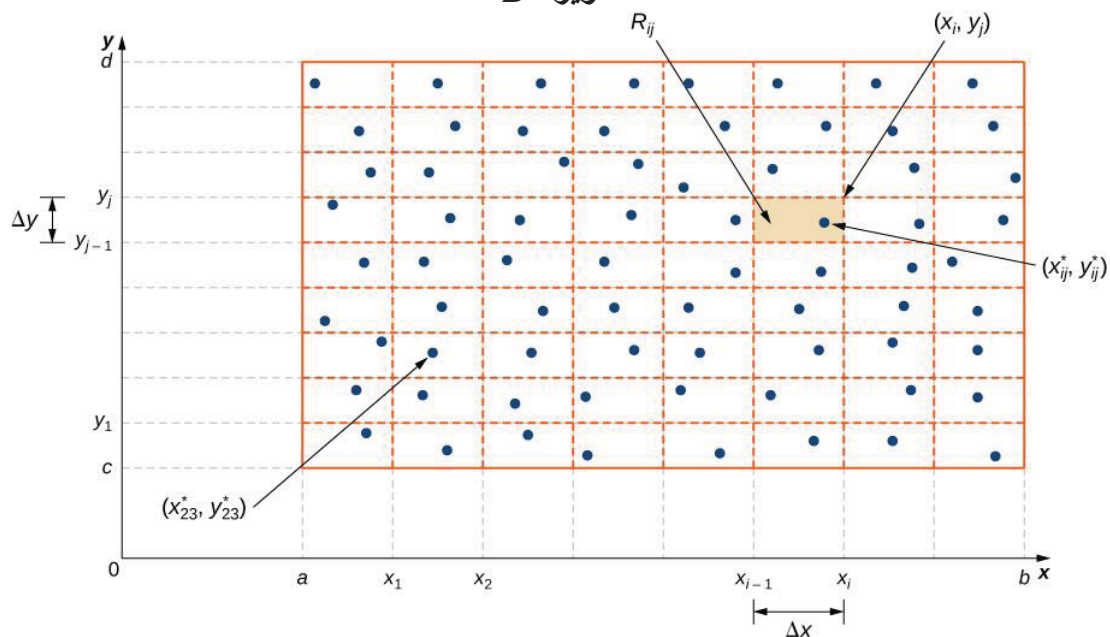
تصویر A



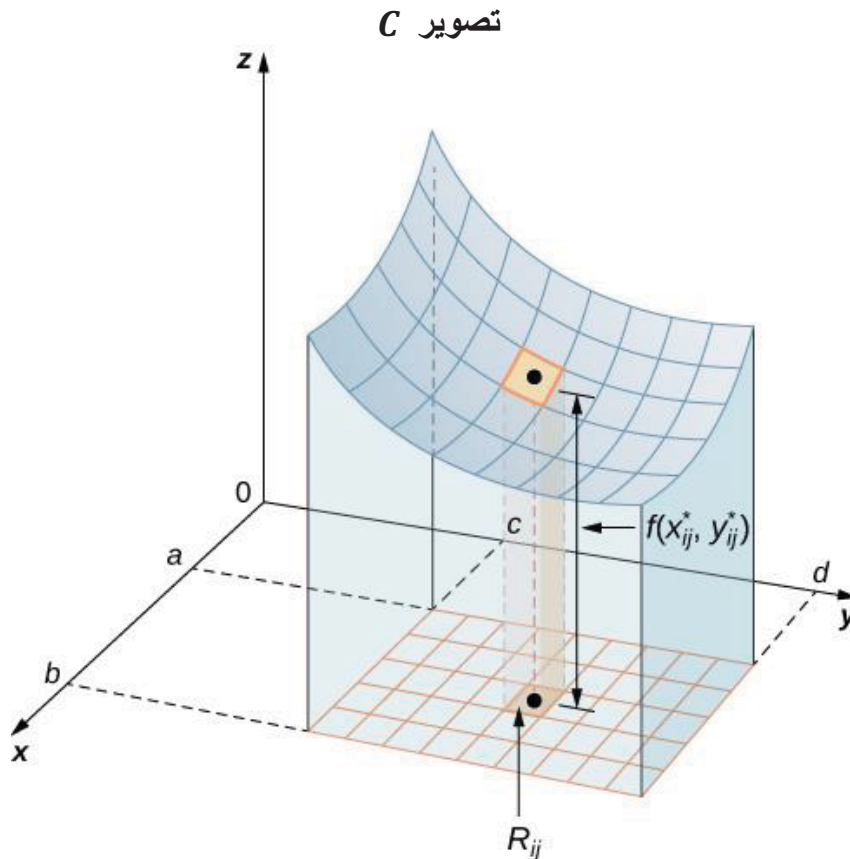
ناحیه R را به مستطیل های کوچک R_{ij} تقسیم می کنیم. مساحت هر یک از این مستطیل های کوچک ΔA است با اضلاع Δx و Δy تصویر B ، برای این کار، بازه $[a, b]$ به m بازه فرعی و بازه $[c, d]$ را به n بازه فرعی تقسیم می کنیم. لذا داریم.

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \Delta y = \frac{d-c}{n} \text{ و } \Delta A = \Delta x \Delta y$$

تصویر B



حجم یک جعبه باریک بالای R_{ij} عبارت است از $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$. هر یک از (x_{ij}^*, y_{ij}^*) یک نقطه اختیاری در هر کدام از R_{ij} ها است. همان طور که در تصویر C ملاحظه می کنید، $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ ارتفاع جعبه مستطیلی مربوطه است و ΔA مساحت هر یک از مستطیل های R_{ij} است.



اگر برای تمام مستطیل های فرعی، همین ایده را بکار ببریم، حجم تقریبی ناحیه سه بعدی D را مطابق زیر بدست می آوریم.

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

جمع بالا، **جمع دو گانه ریمان Double Riemann Sum** نامیده می شود، که می تواند برای بدست آوردن حجم تقریبی ناحیه سه بعدی بکار رود.

همان طور که برای تابع یک متغیره دیده ایم، می توانیم تقریب دقیق تری جهت حجم پیدا کنیم، اگر m و n را بزرگ تر و بزرگ تر کنیم.

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

یا

$$V = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

ملاحظه می کنید که جمع بالا به یک حد نزدیک می شود ، و این حد ، حجم ناحیه سه بعدی است که قاعده آن R است.

تعریف

انتگرال دوگانه تابع $f(x, y)$ روی ناحیه مستطیلی R در صفحه xy مطابق زیر تعریف می شود.

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

اگر $f(x, y) \geq 0$ و در R انتگرال پذیر باشد ، پس حجم ناحیه سه بعدی D که بالای R در صفحه xy و زیر نمودار f قرار دارد ، عبارت است از

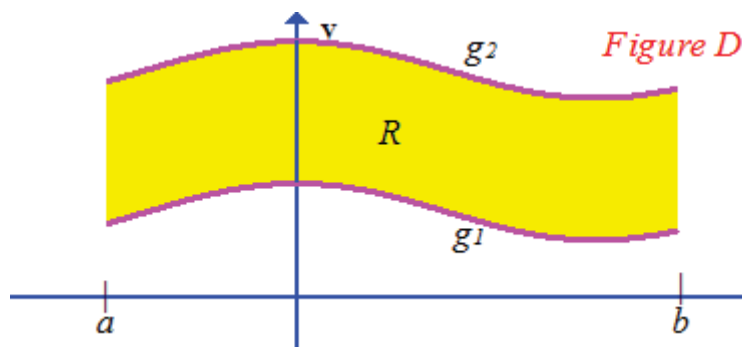
$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

توجه داشته باشید که محاسبه انتگرال های دو گانه از طریق جمع دو گانه ریمان طولانی و مشکل است. لذا باید راه عملی تری پیدا کنیم. همچنین ناحیه هایی هستند که در آنها همه تابع های پیوسته ، انتگرال پذیر نیستند. پس توجه خود را روی دو نوع مخصوص ناحیه متمرکز می کنیم. در این ناحیه ها تمام تابع های پیوسته انتگرال پذیر هستند ، و روش ساده ای برای محاسبه انتگرال روی این نواحی وجود دارد.

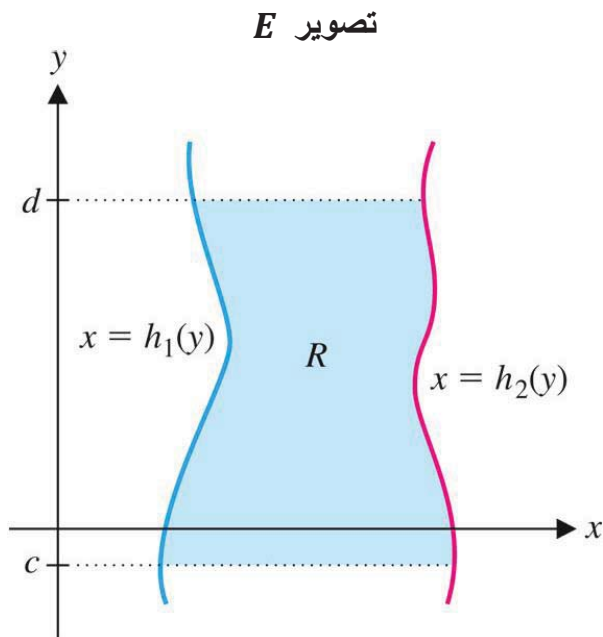
قبل از بررسی طریق انتگرال گیری دو گانه ، به تعریف ناحیه های مختلف که در آینده لازم می شود ، می پردازیم.

نواحی ساده عمودی و افقی Vertically and Horizontally Simple Regions

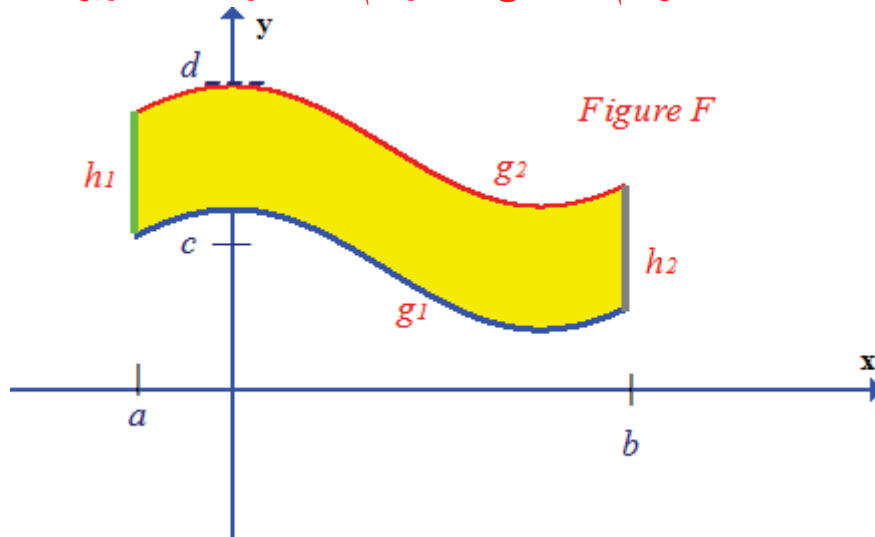
- ۱ - یک ناحیه مسطح R ساده عمودی Vertically Simple است ، اگر دو تابع پیوسته g_1 و g_2 در یک بازه $[a, b]$ وجود داشته باشد ، بطوری که برای $a \leq x \leq b$ $g_1(x) \leq g_2(x)$ باشد و R ناحیه ای است بین نمودارهای g_1 و g_2 در $[a, b]$ تصویر D در این صورت می گوئیم R ناحیه ساده عمودی بین نمودارهای g_1 و g_2 در $[a, b]$ است.



۲ - یک ناحیه مسطح R ساده افقی **Horizontally Simple** است، اگر دو تابع پیوسته h_1 و h_2 در یک بازه $[c, d]$ وجود داشته باشد، بطوری که برای $c \leq y \leq d$ $h_1(y) \leq h_2(y)$ باشد و R یک ناحیه بین نمودار های h_1 و h_2 در $[c, d]$ باشد. تصویر E در این صورت می گوییم R ناحیه ساده افقی است بین نمودار های h_1 و h_2 در $[c, d]$



۳ - یک ناحیه R ساده است، اگر هم ساده افقی باشد و هم ساده عمودی. تصویر F



خطوط عمودی، مرز یک ناحیه ساده عمودی R حد اکثر دو مرتبه قطع می کنند، بجز خطوط عمودی که قسمتی از مرز R را تشکیل می دهند. مستطیل ها، مثلث ها و دایره ها هم ساده عمودی هستند و هم ساده افقی.

خطوط افقی ، مرز ناحیه ساده افقی را حد اکثر در دو نقطه قطع می کنند، بجز خطوط افقی که قسمتی از مرز R تشکیل می دهند.

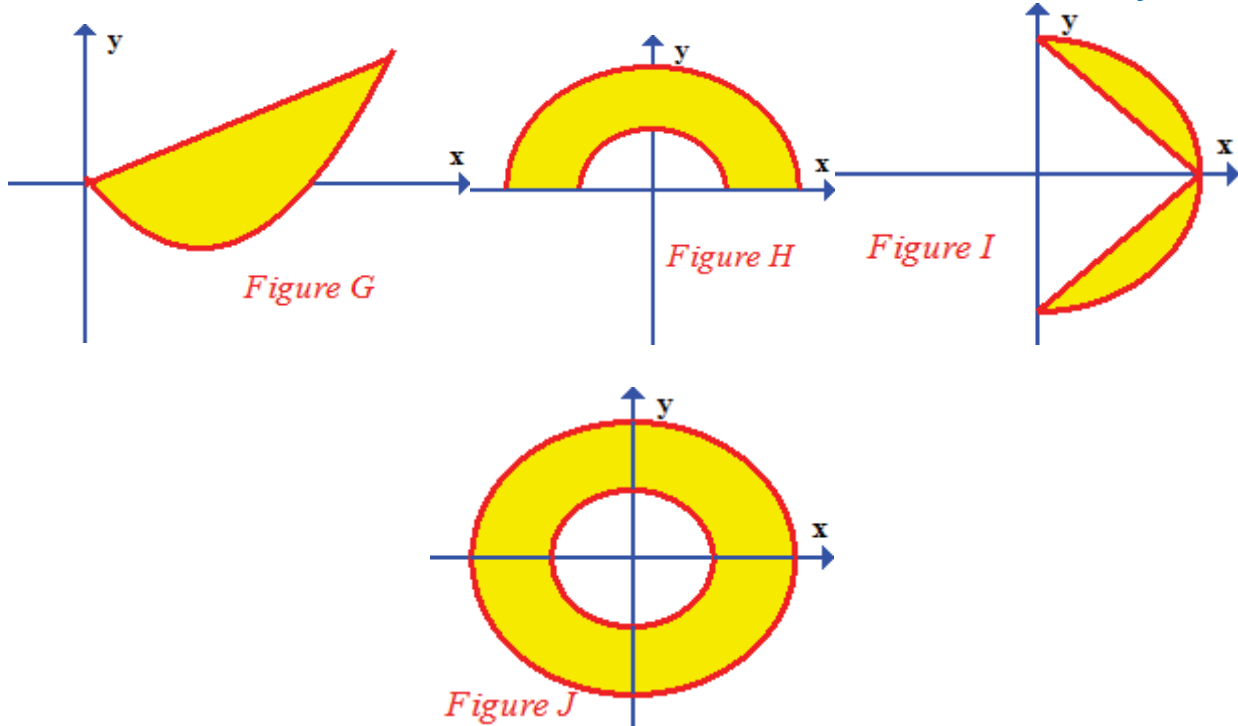
به تصویر های $G - J$ توجه کنید.

تصویر G هم ساده عمودی ، هم ساده افقی است ، پس ساده است.

تصویر H ساده عمودی است ، اما ساده افقی نیست.

تصویر I ساده افقی است ، اما ساده عمودی نیست.

تصویر J نه ساده عمودی است و نه ساده افقی.



مثال ۱- فرض کنید R یک ناحیه بین نمودار های $y = x^2$ و $y = x + 6$ است. نشان دهید که R ساده است.

پاسخ

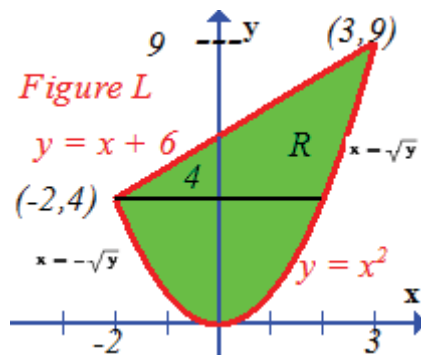
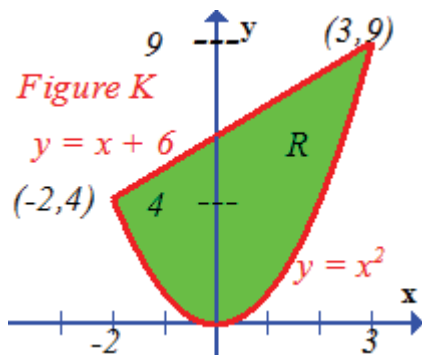
ابتدا محل تلاقی این دو تابع را پیدا می کنیم.

$$y = x^2 \text{ و } y = x + 6$$

$$y = x^2 = x + 6$$

$$x = -2 \text{ یا } x = 3$$

پس نمودار ها در نقاط $(-2, 4)$ و $(3, 9)$ تلاقی دارند. تصویر K



لذا اگر $g_1(x) = x^2$ و $g_2(x) = x + 6$ باشند، پس $g_1 \leq g_2$ است در بازه $[-2, 3]$ و در نتیجه R در بازه $[-2, 3]$ بین نمودار های g_1 و g_2 ناحیه ساده عمودی است. برای این که ثابت کنیم R ناحیه ساده افقی است، ملاحظه می کنید که R از دو قسمت تشکیل شده است. یکی برای $0 \leq y \leq 4$ و دیگری برای $4 \leq y \leq 9$ تصویر L لذا (x, y) در R است، اگر یا

$$0 \leq y \leq 4 \quad \text{و} \quad -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$$

و یا

$$4 \leq y \leq 9 \quad \text{و} \quad y - 6 \leq x \leq \sqrt{y}$$

باشد. در نتیجه اگر فرض کنیم

$$h_1(y) = \begin{cases} -\sqrt{y} & \text{برای } 0 \leq y \leq 4 \\ y - 6 & \text{برای } 4 \leq y \leq 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad h_2(y) = \sqrt{y}$$

باشد، پس $h_1 \leq h_2$ است در بازه $[0, 9]$ ، پس R ناحیه ساده افقی است در بازه $[0, 9]$ بین نمودار های h_1 و h_2 و چون R هم ساده عمودی است و هم ساده افقی، پس R ساده است.

در مثال ۱ نشان دادیم که ناحیه R هم ساده عمودی و هم ساده افقی است. اما بیشتر می توان گفت که ناحیه R ساده عمودی است تا ساده افقی

در آینده، وقتی که می خواهیم انتگرال دوگانه روی R محاسبه کنیم، اگر R ساده عمودی باشد، اغلب R را به عنوان ناحیه ای بین نمودار های

$$y = g_1(x) \quad \text{و} \quad y = g_2(x) \quad \text{برای} \quad a \leq x \leq b$$

توصیف می کنیم

یا اگر R ساده افقی باشد، آنرا به عنوان ناحیه ای بین نمودار های

$$x = h_1(y) \quad \text{و} \quad x = h_2(y) \quad \text{برای} \quad c \leq y \leq d$$

توصیف می کنیم.

قضیه محاسبه انتگرال های دوگانه Evaluation of Double Integrals Theorem

فرض کنید f روی یک ناحیه R در صفحه xy پیوسته باشد.

۱ - اگر R یک ناحیه ساده عمودی بین نمودار های g_1 و g_2 در بازه $[a, b]$ باشد، پس f در R انتگرال پذیر است و

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

۲ - اگر R یک ناحیه ساده افقی بین نمودار های h_1 و h_2 در بازه $[c, d]$ باشد، پس f در R انتگرال پذیر است و

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

اگر R ساده باشد، پس بر اساس قضیه بالا قسمت ۱ و ۲ داریم.

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

مثال ۲ - فرض کنید R یک ناحیه مستطیلی محصور بین خطوط

$$x = -1, x = 2, y = 0 \text{ و } y = 2$$

باشد. مطلوب است

$$\iint_R x^2 y dA$$

پاسخ

ناحیه R یک ناحیه ساده عمودی بین نمودار های

$$y = 0 \text{ و } y = 2 \text{ برای } -1 \leq x \leq 2$$

است. لذا

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{-1}^2 \int_0^2 x^2 y dy dx =$$

برای محاسبه انتگرال مکرر بالا، ابتدا $\int_0^2 x^2 y dy$ را برای تمام x ها در $[-1, 2]$ پیدا می کنیم.

$$\int_0^2 x^2 y dy = x^2 \int_0^2 y dy = x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^2 = 2x^2$$

در انتگرال گیری بالا، x را ثابت فرض کردیم و نسبت به y انتگرال گرفتیم. پس

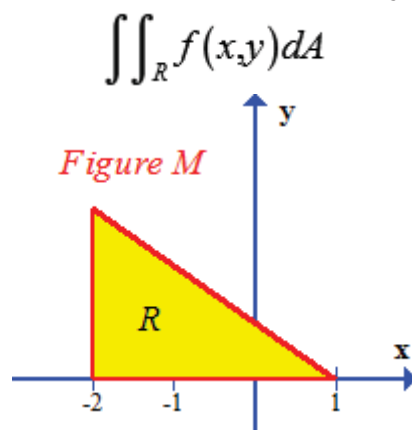
$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{-1}^2 \int_0^2 x^2 y dy dx = \int_{-1}^2 2x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = 6$$

می توان ناحیه R در مثال ۲ را ناحیه ساده افقی بین نمودار های
 $0 \leq y \leq 2$ برای $x = -1$ و $x = 2$ فرض کرد و انتگرال را محاسبه کنیم. پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y) dA &= \int_0^2 \int_{-1}^2 x^2 y \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 y \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 \right) dy = \int_0^2 y \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) dy = \int_0^2 3y \, dy \\ &= \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^2 = 6 \end{aligned}$$

مثال ۳ - فرض کنید R ناحیه مثلثی بین نمودار $y = 1 - x$ و محور x در بازه $[-2, 1]$ باشد.
 و $f(x,y) = 4 - y$ باشد. تصویر M مطلوب است



پاسخ

ناحیه R ساده است. پس می توان انتگرال از دو طریق می توان محاسبه کرد. فرض می کنیم R ساده عمودی است بین نمودار های

$$-2 \leq x \leq 1 \quad \text{برای} \quad y = 0 \quad \text{و} \quad y = 1 - x$$

پس داریم

$$\begin{aligned} \int_R \int f(x,y) dA &= \int_{-2}^1 \int_0^{1-x} (4 - y) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^1 \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_{-2}^1 \left(4(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^1 \left(\frac{7}{2} - 3x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{2}$$

اگر در مثال ۳ ناحیه R را یک ناحیه ساده افقی بین نمودار های

$$x = -2 \text{ و } x = 1 - y \text{ برای } 0 \leq y \leq 3$$

فرض کنیم ، پس خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y) dA &= \int_0^3 \int_{-2}^{1-y} (4-y) dx dy \\ &= \int_0^3 (4-y)x \Big|_{-2}^{1-y} dy = \int_0^3 (4-y)[(1-y) - (-2)] dy \\ &= \int_0^3 (12 - 4y + y^2) dy = \left(12y - \frac{4}{2}y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

مثال ۴ - فرض کنید R ناحیه بین نمودار های $y = x + 6$ و $y = x^2$ باشد. مطلوب است

$$\iint_R x dA$$

پاسخ

تصاویر مثال ۱ را ملاحظه کنید.

همان طور که دیدیم ، نمودار های دو معادله در نقاط $(-2, 4)$ و $(3, 9)$ تلاقی می کنند و داریم

$$-2 \leq x \leq 3 \text{ برای } x^2 \leq x + 6$$

است. پس

$$\begin{aligned} \iint_R x dA &= \int_{-2}^3 \int_{x^2}^{x+6} x dy dx \\ &= \int_{-2}^3 xy \Big|_{x^2}^{x+6} dx = \int_{-2}^3 (x^2 + 6x - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{125}{12} \end{aligned}$$

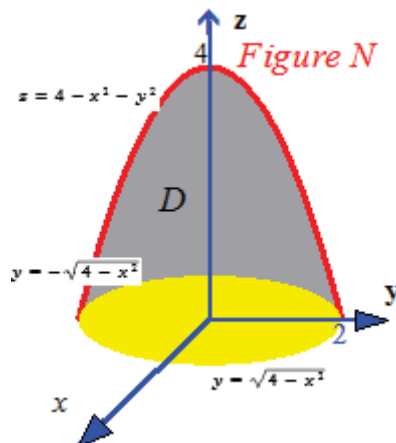
مثال ۵ - حجم ناحیه سه بعدی D محصور از بالا به $z = 4 - x^2 - y^2$ و از پایین به صفحه xy را پیدا کنید.

پاسخ

محل تلاقی D و صفحه xy ناحیه R است که محصور است بوسیله دایره $x^2 + y^2 = 4$, تصویر

N . پس بر اساس تعریف ، داریم

$$V = \iint_R (4 - x^2 - y^2) dA$$



چون R یک ناحیه ساده عمودی است محصور بین نمودار های

$$y = -\sqrt{4 - x^2} \quad \text{و} \quad y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{برای} \quad -2 \leq x \leq 2$$

پس نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left((4 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-2}^2 \left((4 - x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx \\ &= \frac{64}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx \stackrel{x=2 \sin \theta}{=} \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

بر اساس شماره (۱۳) بخش ۲.۱ کتاب انتگرال آوا توسط این قلم

$$= \frac{64}{3} \left(\frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \theta \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

تعویض ترتیب انتگرال گیری Reversing the order of Integration

اگر R یک ناحیه ساده باشد، $\iint_R f(x,y) dA$ را می توان یا به صورت

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

و یا به صورت

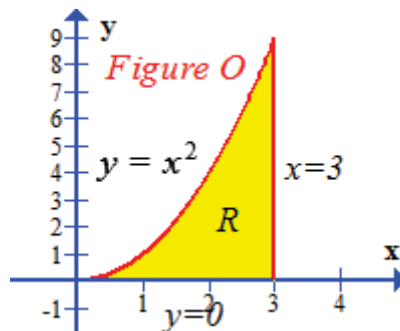
$$\int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dx dy$$

محاسبه کرد. این بستگی دارد که کدام ساده تر است.

مثال ۶ – با تعویض ترتیب انتگرال، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dx dy$$

پاسخ



برای تغییر ترتیب انتگرال گیری، باید ناحیه R را که روی آن انتگرال محاسبه می شود، مشخص کنیم. با توجه به حدود انتگرال گیری داده شده، ملاحظه می شود که R یک ناحیه ساده افقی است بین نمودار های

$$x = \sqrt{y} \text{ و } x = 3 \text{ برای } 0 \leq y \leq 9$$

تصویر ۰. چون R یک ناحیه ساده عمودی هم هست بین نمودار های

$$y = 0 \text{ و } y = x^2 \text{ برای } 0 \leq x \leq 3$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} \int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dx dy &= \iint_R \sin \pi x^3 dA = \int_0^3 \int_0^{x^2} \sin \pi x^3 dy dx \\ &= \int_0^3 y \sin \pi x^3 \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^3 x^2 \sin \pi x^3 dx \\ &= \frac{-1}{3\pi} \cos \pi x^3 \Big|_0^3 = \frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

تعویض ترتیب انتگرال گیری فقط در مورد ناحیه های ساده کار برد دارد.

انتگرال گیری دو گانه روی ناحیه های کلی تر

Double Integration over More General Regions

اگر R تشکیل شده باشد از چند ناحیه های فرعی ساده عمودی یا افقی $R_1, R_2, \dots, R_n$ ، به شرطی که نواحی فرعی فقط مرز های مشترک داشته باشند ، پس تابع f در صورتی که در R پیوسته باشد ، در R انتگرال پذیر است و

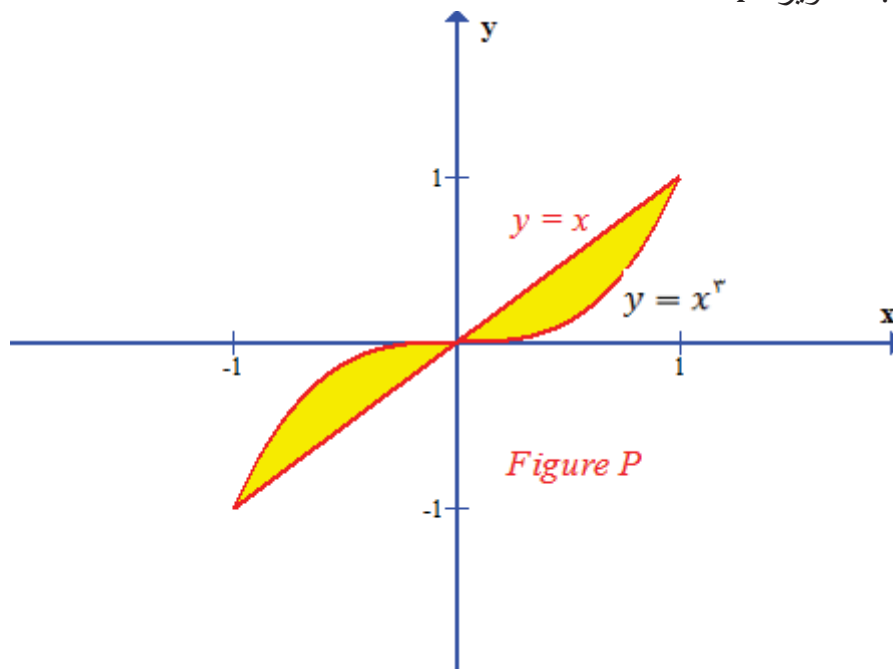
$$\int_R \int f(x,y) dA = \int_{R_1} \int f(x,y) dA + \int_{R_2} \int f(x,y) dA + \dots + \int_{R_n} \int f(x,y) dA \quad (6)$$

مثال ۷ - فرض کنید R ناحیه ای بین نمودار های $y = x^3$ و $y = x$ باشد. مطلوب است

$$\iint_R (x-1) dA$$

پاسخ

نمودار های دو معادله یکدیگر در (x,y) قطع می کنند ، اگر $x = y = x^3$ باشد. این هنگامی ممکن است اگر $x = 1$ یا $x = 0$ ، $x = -1$ باشد. پس R از دو ناحیه ساده عمودی R_1 و R_2 تشکیل شده است. تصویر P



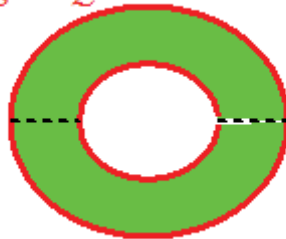
در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_R (x-1) dA &= \int_{R_1} \int (x-1) dy dx + \int_{R_2} \int (x-1) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_x^{x^3} (x-1) dy dx + \int_0^1 \int_{x^3}^x (x-1) dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 (x-1)y \Big|_x^{x^r} dx + \int_0^1 (x-1)y \Big|_{x^r}^x dx \\
 &= \int_{-1}^0 (x-1)(x^r-x) dx + \int_0^1 (x-1)(x-x^r) dx \\
 &= \int_{-1}^0 (x^r-x-x^r+x) dx - \int_0^1 (x^r-x-x^r+x) dx \\
 &= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{4}{2}}}{\frac{4}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{2}{2}}}{\frac{2}{2}} \right) \Big|_{-1}^0 - \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{4}{2}}}{\frac{4}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{2}{2}}}{\frac{2}{2}} \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

گاهی اوقات ، به ناحیه هایی بر می خوریم که نه ساده عمودی هستند و نه ساده افقی. اما می توان آنها را به نواحی فرعی تقسیم کرد که یا ساده عمودی هستند یا ساده افقی. تصویر Q در این مورد هم فرمول شماره (۶) کار برد دارد.

Figure Q



تمرینات ۶.۱

در تمرینات زیر ، انتگرال مکرر را محاسبه کنید.

$$۱) \int_0^1 \int_{-1}^1 x \, dy \, dx$$

$$۲) \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} \, dy \, dx$$

$$۳) \int_0^1 \int_x^{x^2} 1 \, dy \, dx$$

$$۴) \int_0^1 \int_0^y x \sqrt{y^2 - x^2} \, dx \, dy$$

$$۵) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \, dy$$

$$۶) \int_0^{\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta$$

$$۷) \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

$$۸) \int_0^1 \int_0^x e^{(x^2)} \, dy \, dx$$

$$۹) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos y} e^x \sin y \, dx \, dy$$

در تمرینات زیر ابتدا انتگرال دو گانه را به انتگرال مکرر تغییر دهید و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

$$۱۰) \iint_R (x+y) \, dA$$

R یک ناحیه مثلثی شکل است ، محصور بین خطوط $y = 2x$ ، $x = 0$ و $y = 4$

$$۱۱) \iint_R x \, dA$$

R یک ناحیه دوزنقه ای شکل است ، محصور بین خطوط $y = 1$ و $y = x$ ، $x = 3$ ، $x = 5$

$$۱۲) \iint_R (3x-5) \, dA$$

R یک ناحیه مثلثی شکل است ، محصور بین $x = 10$ و $y = -x + 7$ ، $y = 5 + x$

$$۱۳) \iint_R 1 \, dA$$

R یک ناحیه بین نمودار های $y = 1 + x$ و $y = \sin x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$

$$۱۴) \iint_R (1 - y) \, dA$$

R یک ناحیه محصور بین نمودار های $x = y^2$ و $x = 2 - y$

$$۱۵) \iint_R xy^2 \, dA$$

R یک ناحیه بالای خط $y = 1 - x$ و داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$

$$۱۶) \iint_R x^2 \, dA$$

R یک ناحیه بین نمودار های $y = x^2 + x + 1$ و $y = x^2 + x^2 + 1$ در بازه $[-1, 1]$

در تمرینات زیر حجم ناحیه داده شده را پیدا کنید.

۱۷ - ناحیه سه بعدی محصور بین $x + 2y + 3z = 6$ و صفحه های مختصات

۱۸ - ناحیه سه بعدی در هشتک اول First Octant محصور بین سهمی گون Paraboloid زیر

$$z = x^2 + y^2$$

و صفحه $x + y = 1$ و صفحه های مختصات .

۱۹ - ناحیه در هشتک اول محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $z = y$ و صفحه xy و صفحه yz

در تمرینات زیر انتگرال های مکرر داده شده ، نمایش حجم یک ناحیه سه بعدی D است. آنرا رسم کنید.

$$۲۰) \int_{-2}^1 \int_1^6 3 \, dy \, dx$$

$$۲۱) \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{2x - x^2 - y^2} \, dy \, dx$$

$$۲۲) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16 - 4x^2 - 4y^2) \, dx \, dy$$

در تمرینات زیر مساحت ناحیه داده شده در صفحه xy را پیدا کنید.

۲۳ - ناحیه محصور است بین سهمی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ در بازه $[1, 4]$

۲۴ - ناحیه بین سهمی $x = y^2$ و $x = 32 - y^2$

۲۵ - ناحیه در ربع اول است و محصور است بین نمودار $x = 2 - y^2$ و خطوط $x = 0$ و $x = y$

پاسخ تمرینات ۶.۱

در تمرینات زیر، انتگرال مکرر را محاسبه کنید.

$$۱) \int_0^1 \int_{-1}^1 x \, dy \, dx = \int_0^1 xy \Big|_{-1}^1 dx = \int_0^1 2x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} ۲) \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} \, dy \, dx &= \int_0^1 e^{x+y} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 (e^{x+1} - e^x) dx \\ &= (e^{x+1} - e^x) \Big|_0^1 = e^2 - 2e + 1 \end{aligned}$$

$$۳) \int_0^1 \int_x^{x^2} y \, dy \, dx = \int_0^1 y \Big|_x^{x^2} dx = \int_0^1 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} ۴) \int_0^1 \int_0^y x \sqrt{y^2 - x^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 -\frac{1}{3} (y^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^y dy = \int_0^1 -\frac{1}{3} y^3 dy \\ &= -\frac{1}{12} y^4 \Big|_0^1 = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۵) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \, dy &= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 \frac{1}{2} (4 - y^2) dy \\ &= \left(2y - \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \int_0^{\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta &= \int_0^{\pi} -\frac{1}{3} (1-r^2)^{3/2} \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi} -\frac{1}{3} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \theta \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \int_1^e \int_0^x \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy \, dx &= \int_1^e \frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x} \Big|_0^x dx = \int_1^e \frac{\pi}{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln x \Big|_1^e = \frac{\pi}{2} \ln e \end{aligned}$$

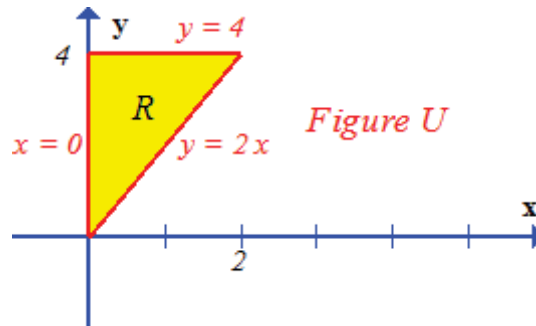
$$\begin{aligned} ۸) \quad \int_0^1 \int_0^x e^{(x^2)} dy dx &= \int_0^1 ye^{(x^2)} \Big|_0^x dx = \int_0^1 xe^{(x^2)} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{(x^2)} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۹) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos y} e^x \sin y dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin y \Big|_0^{\cos y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^{\cos y} \sin y - \sin y) dy = (-e^{\cos y} + \cos y) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= e - e^{\sqrt{2}/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر ابتدا انتگرال دو گانه را به انتگرال مکرر تغییر دهید و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

$$۱۰) \quad \iint_R (x + y) dA$$

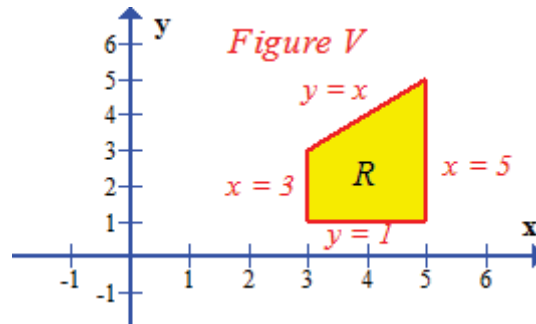
R یک ناحیه مثلثی شکل است ، محصور بین خطوط $y = 4$ و $y = 2x$ ، $x = 0$ و $y = 2x$ ، پاسخ - تصویر U



$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dA &= \int_0^2 \int_{2x}^4 (x + y) dy dx = \int_0^2 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{2x}^4 dx \\ &= \int_0^2 \left(4x + 8 - 4x^2 \right) dx = \left(2x^2 + 8x - \frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{40}{3} \end{aligned}$$

۱۱) $\iint_R x \, dA$

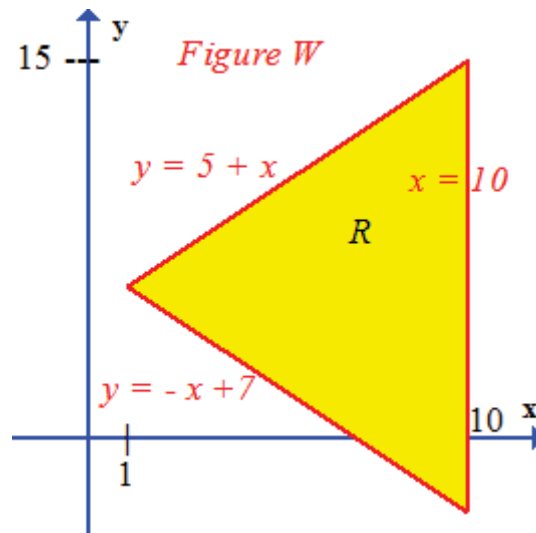
R یک ناحیه دوزنقه ای شکل است ، محصور بین خطوط $y = x$ و $y = 1$ ، $x = 3$ ، $x = 5$ ،
پاسخ - تصویر V



$$\begin{aligned} \iint_R x \, dA &= \int_3^5 \int_1^x x \, dy \, dx = \int_3^5 xy \Big|_1^x \, dx \\ &= \int_3^5 (x^2 - x) \, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_3^5 = \frac{74}{3} \end{aligned}$$

۱۲) $\iint_R (3x - 5) \, dA$

R یک ناحیه مثلثی شکل است ، محصور بین $x = 10$ و $y = -x + 7$ و $y = 5 + x$ ،
پاسخ - تصویر W



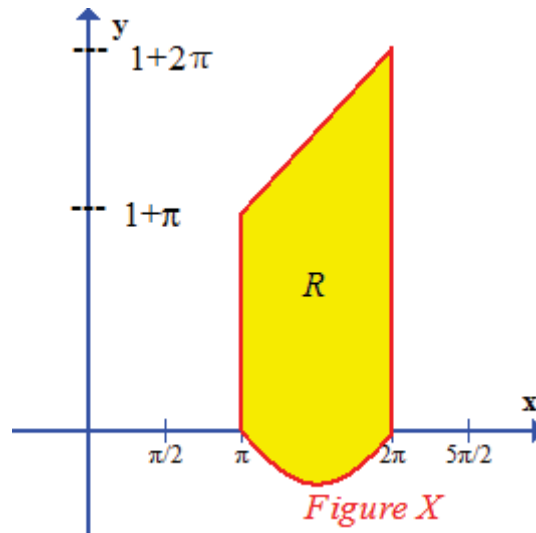
خطوط $y = -x + 7$ و $y = 5 + x$ یکدیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر
 $5 + x = y = -x + 7$

باشد. یعنی $x = 1$ حال چون $x + 5 \geq 7 - x$ است در $[1, 10]$ پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R (3x - 5) dA &= \int_1^{10} \int_{7-x}^{5+x} (3x - 5) dy dx = \int_1^{10} (3x - 5)y \Big|_{7-x}^{5+x} dx \\ &= \int_1^{10} (3x - 5)(2x - 2) dx = \int_1^{10} (6x^2 - 16x + 10) dx \\ &= \left(2x^3 - 8x^2 + 10x \right) \Big|_1^{10} = 1296 \end{aligned}$$

۱۳) $\iint_R 1 dA$

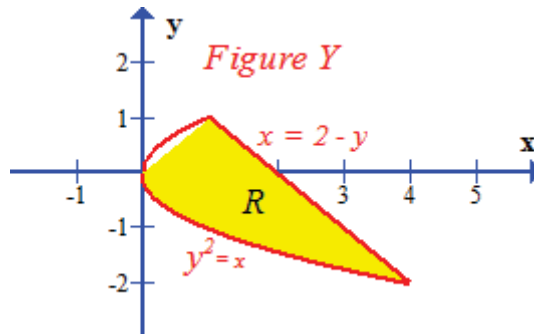
R یک ناحیه بین نمودارهای $y = \sin x$ و $y = 1 + x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$
پاسخ - تصویر X



$$\begin{aligned} \iint_R 1 dA &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\sin x}^{1+x} 1 dy dx = \int_{\pi}^{2\pi} y \Big|_{\sin x}^{1+x} dx \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (1 + x + \sin x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cos x \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi^2 + \pi + 2 \end{aligned}$$

۱۴) $\iint_R (1-y) dA$

R یک ناحیه محصور بین نمودار های $x = y^2$ و $x = 2 - y$ باشد.
پاسخ - تصویر Y

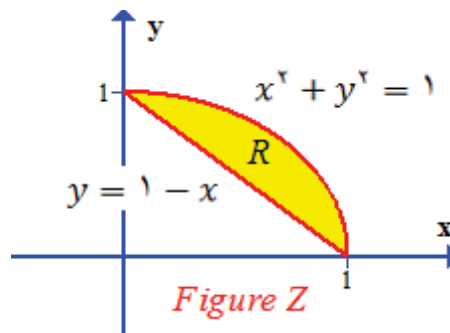


نمودار ها در (x, y) تلاقی می کنند ، اگر $y^2 = x = 2 - y$ باشد. یعنی $y = 2$ و یا $y = -1$ باشد. پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R (1-y) dA &= \int_{-2}^1 \int_{y^2}^{2-y} (1-y) dx dy \\ &= \int_{-2}^1 (1-y)x \Big|_{y^2}^{2-y} dy = \int_{-2}^1 (1-y)(2-y-y^2) dy \\ &= \int_{-2}^1 (2 - 3y + y^2) dy = \left(2y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

۱۵) $\iint_R xy^2 dA$

R یک ناحیه بالای خط $y = 1 - x$ و داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد.
پاسخ - تصویر Z



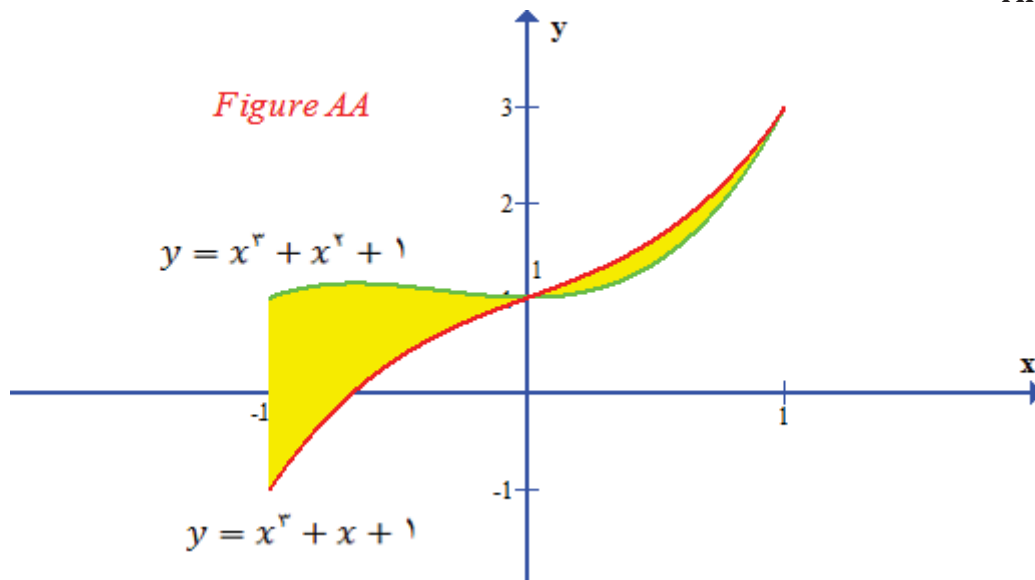
خط و دایره در (x, y) تلاقی می کنند ، اگر $(1-x)^2 = y^2 = 1 - x^2$ باشد. یعنی $x = 0$ و یا $x = 1$ باشد.

چون R بالای خط $y = 1 - x$ قرار دارد، پس R بالای محور x است. لذا آن قسمت از دایره $x^2 + y^2 = 1$ که R را محاصره می کند، نمودار $y = \sqrt{1 - x^2}$ است، برای $0 \leq x \leq 1$ پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R xy^2 dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left. \frac{1}{3} xy^3 \right|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} x (1-x)^3 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} x + x^2 - x^3 + \frac{1}{3} x^4 \right] dx \\ &= \left[-\frac{1}{15} (1-x^2)^{5/2} - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{15} x^5 \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

۱۶) $\iint_R x^2 dA$

R یک ناحیه بین نمودارهای $y = x^3 + x + 1$ و $y = x^3 + x^2 + 1$ در بازه $[-1, 1]$ پاسخ - AA



نمودارها در (x, y) تلاقی می کنند اگر $x^3 + x^2 + 1 = y = x^3 + x + 1$ باشد. یعنی $x^2 = x$ یا $x = 0$ یا $x = 1$ حال چون داریم $x^3 + x^2 + 1 \geq x^3 + x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$

و

$$x^3 + x + 1 \geq x^3 + x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1$$

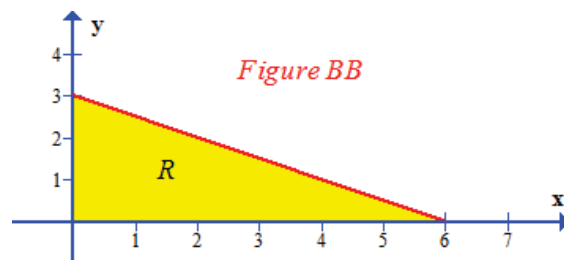
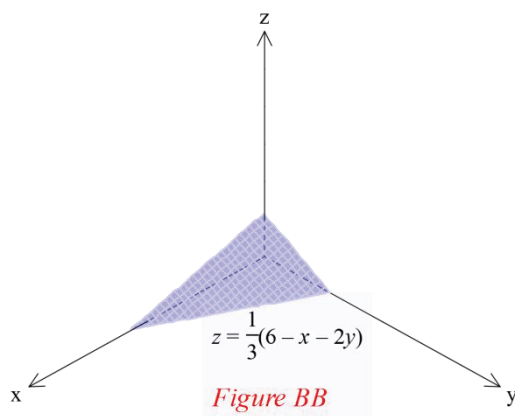
است، پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 dA &= \int_{-1}^0 \int_{x^3+x+1}^{x^3+x^2+1} x^2 dy dx + \int_0^1 \int_{x^3+x^2+1}^{x^3+x+1} x^2 dy dx \\ &= \int_{-1}^0 x^2 y \Big|_{x^3+x+1}^{x^3+x^2+1} dx + \int_0^1 x^2 y \Big|_{x^3+x^2+1}^{x^3+x+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^5 - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - x^5) dx \\ &= \left(\frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر حجم ناحیه داده شده را پیدا کنید.

۱۷ - ناحیه سه بعدی محصور بین $x + 2y + 3z = 6$ و صفحه های مختصات

پاسخ - تصویر BB



محل تلاقی جسم سه بعدی با صفحه xy ناحیه ای است محصور بین خطوط $x + 2y = 6$ و $x = 0$ و $y = 0$ پس داریم.

$$y = \frac{1}{2}(6 - x) \quad \text{و} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad y = 0$$

$$V = \int_R \int \frac{1}{3}(6 - x - 2y) dA = \int_0^6 \int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} \frac{1}{3}(6 - x - 2y) dy dx$$

$$= \int_0^6 \frac{1}{3} (6y - xy - y^2) \Big|_0^{6-x} dx = \int_0^6 \frac{1}{3} (6-x)^2 dx$$

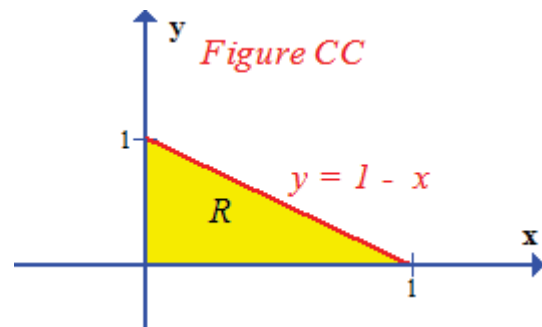
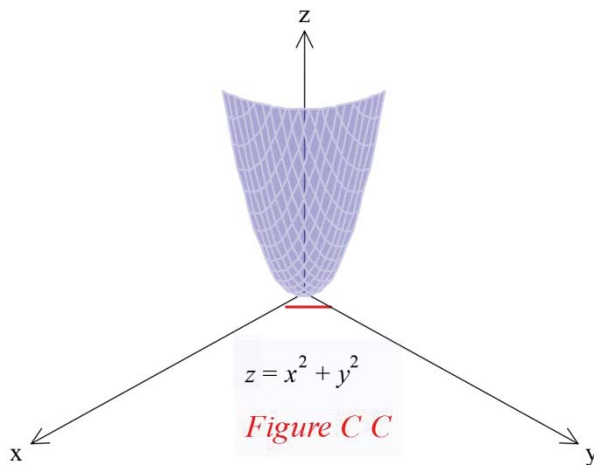
$$= -\frac{1}{36} (6-x)^3 \Big|_0^6 = 6$$

۱۸ - ناحیه سه بعدی در هشتک اول First Octant محصور بین سهمی گون Paraboloid زیر

$$z = x^2 + y^2$$

و صفحه $x + y = 1$ و صفحه های مختصات .

پاسخ - تصویر CC



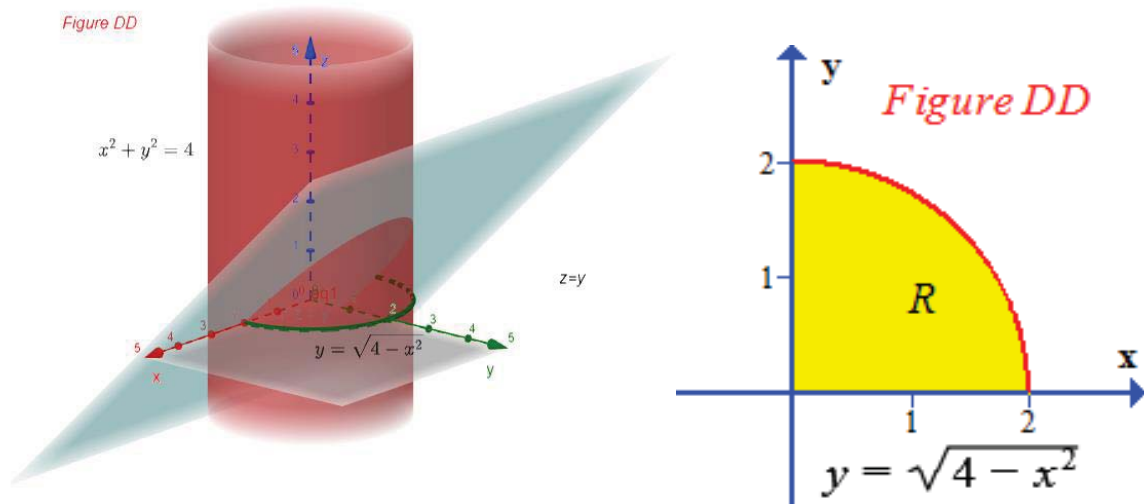
محل تلاقی جسم سه بعدی با صفحه xy ناحیه ای است محصور بین خطوط $y = 1 - x$ و $x = 0$ و $y = 0$ پس داریم.

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{3} (1-x)^3 \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{12} (1-x)^4 \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

۱۹ - ناحیه در هشتک اول محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $z = y$ و صفحه xy و صفحه yz
پاسخ - تصویر DD



محل تلاقی جسم سه بعدی با صفحه xy ناحیه ساده عمودی R است که بین نمودار های $y = 0$ و $y = \sqrt{4-x^2}$ در بازه $[0, 2]$ قرار دارد. پس داریم.

$$\begin{aligned} V &= \int_R \int y \, dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left(2x - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر انتگرال های مکرر داده شده ، نمایش حجم یک ناحیه سه بعدی D است. آنرا رسم کنید.

۲۰) $\int_{-2}^1 \int_1^4 3 \, dy \, dx$

تصاویر EE

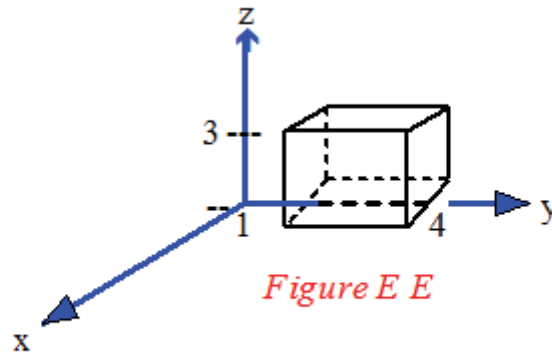
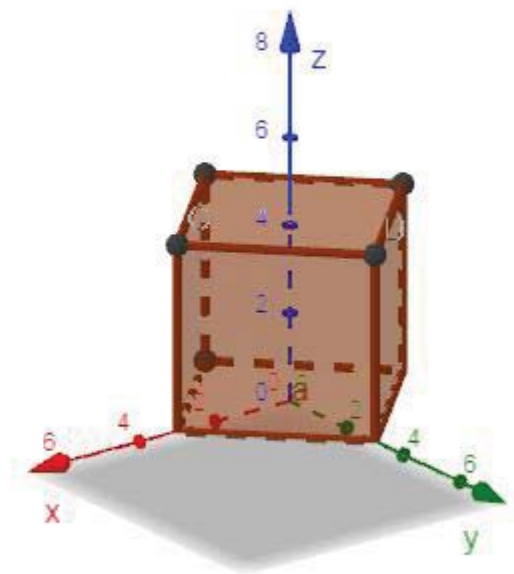


Figure EE



$$۲۱) \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{2x-x^2-y^2} dy dx$$

تصاویر FF

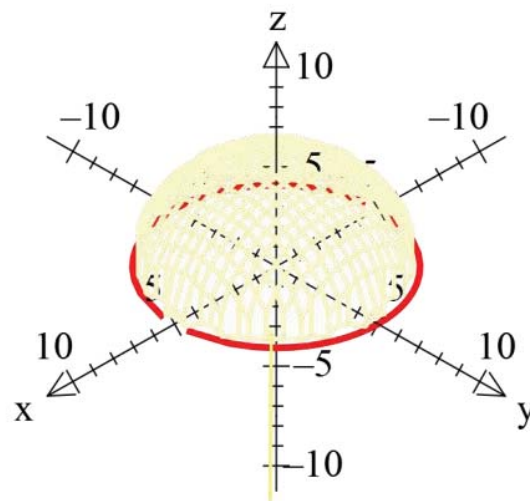


Figure FF

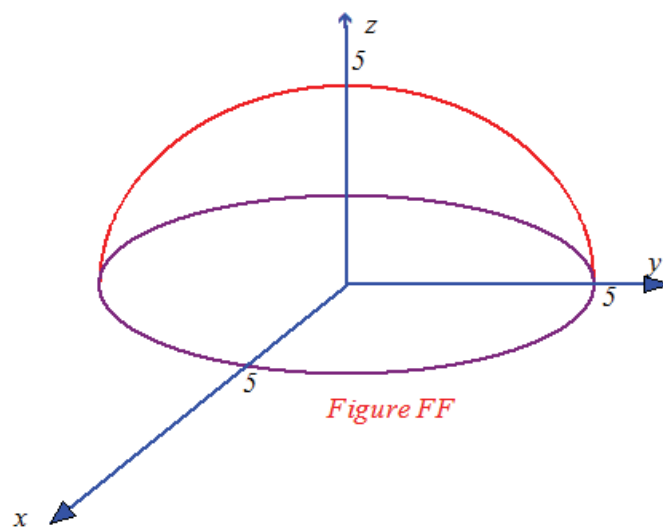


Figure FF

$$۲۲) \int_{-۲}^۲ \int_{-\sqrt{۴-y^۲}}^{\sqrt{۴-y^۲}} (۱۶ - ۴x^۲ - ۴y^۲) dx dy$$

تصاویر GG

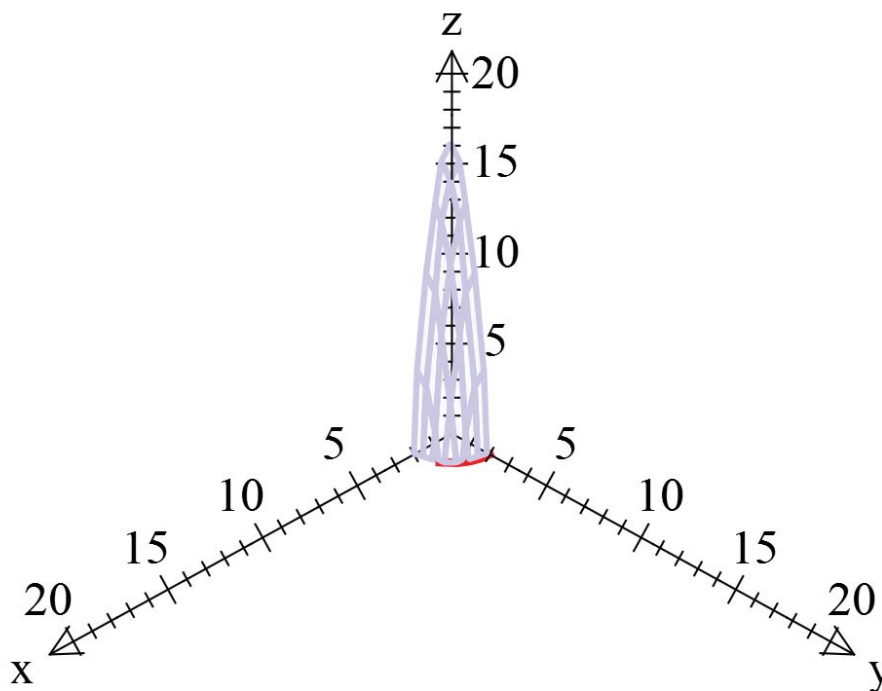
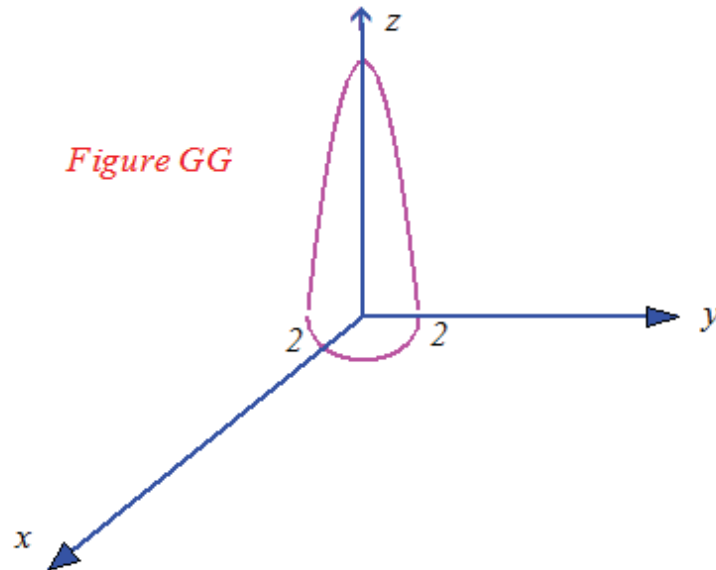


Figure GG

در تمرینات زیرمساحت ناحیه داده شده در صفحه xy را پیدا کنید.

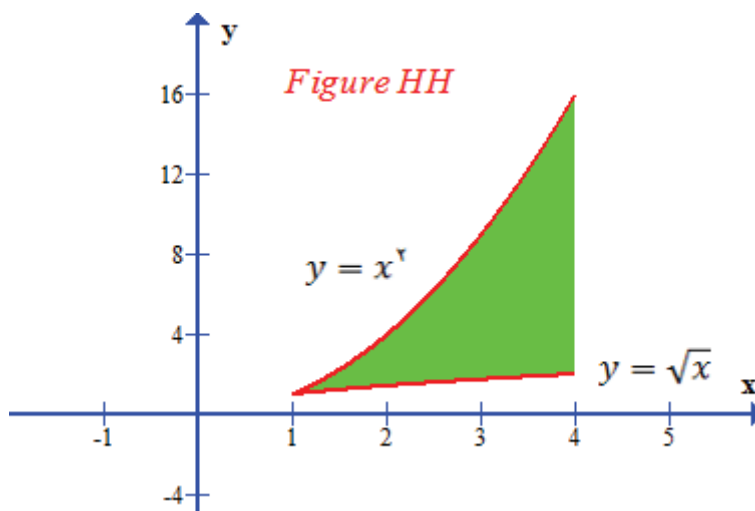
۲۳ - ناحیه محصور است بین سهمی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ در بازه $[1, 4]$

پاسخ

چون $x^2 \geq \sqrt{x}$ است برای $1 \leq x \leq 4$ پس داریم.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} 1 \, dy \, dx = \int_1^4 y \Big|_{\sqrt{x}}^{x^2} dx = \int_1^4 (x^2 - \sqrt{x}) \, dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_1^4 = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

تصویر HH



۲۴ - ناحیه بین سهمی $x = y^2$ و $x = 32 - y^2$ پاسخ

دو سهمی در (x, y) تلاقی می کنند، اگر $y^2 = x = 32 - y^2$ باشد. یعنی $y = -4$ و یا $y = 4$ باشد. چون $32 - y^2 \geq y^2$ است، برای $-4 \leq y \leq 4$ پس داریم.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^4 \int_{y^2}^{32-y^2} 1 \, dx \, dy = \int_{-4}^4 x \Big|_{y^2}^{32-y^2} dy \\ &= \int_{-4}^4 (32 - 2y^2) dy = \left(32y - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_{-4}^4 = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

تصویر II

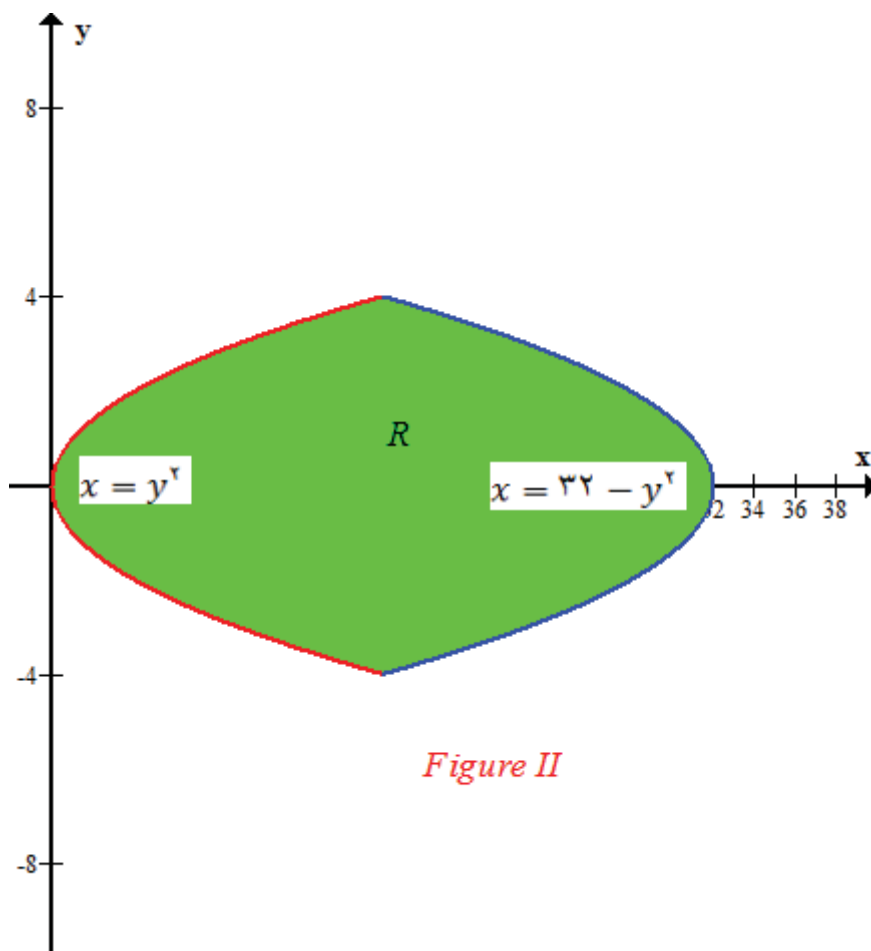


Figure II

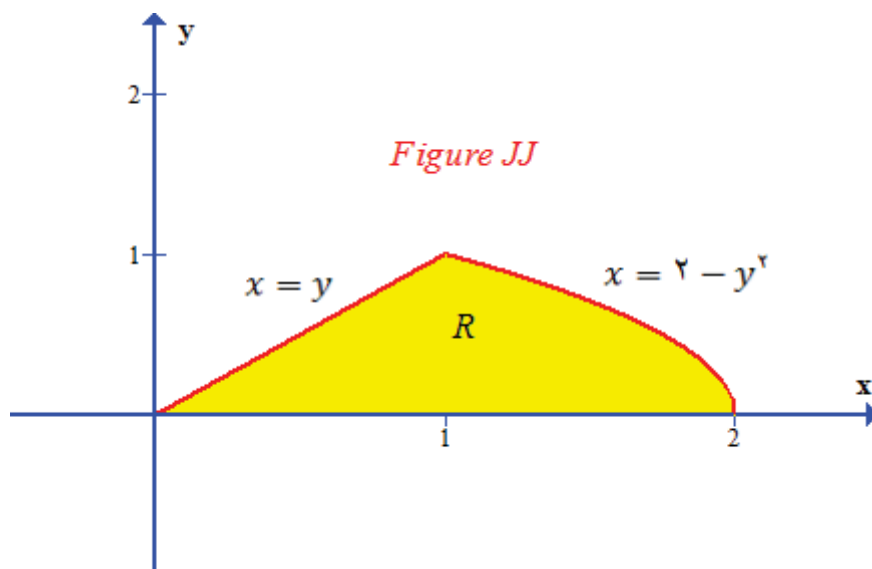
۲۵ - ناحیه در ربع اول است و محصور است بین نمودار $x = 2 - y^2$ و خطوط $x = 0$ و $x = y$ پاسخ

خط $y = x$ و سهمی $x = 2 - y^2$ در ربع اول در نقطه (x, y) تلاقی می کنند ، اگر $y \geq 0$ و $y = x = 2 - y^2$ باشد. یا $y^2 + y - 2 = 0$ باشد. یعنی $y = 1$ باشد.

حال ، چون $x = 2 - y^2$ و $y \geq 0$ است ، این یعنی $y = \sqrt{2 - x}$ و چون $\sqrt{2 - x} \geq x$ است برای $-2 \leq x \leq 1$ ، پس داریم.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x}} 1 \, dy \, dx = \int_0^1 y \Big|_x^{\sqrt{2-x}} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{2-x} - x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} (2-x)^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

تصویر JJ

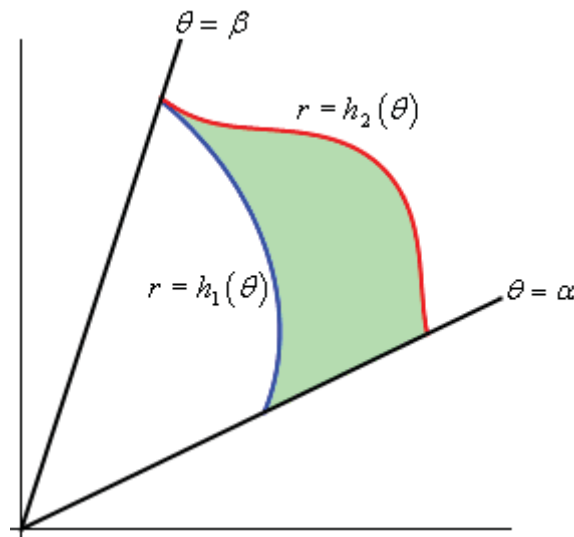


۶.۲ - انتگرال های دو گانه در مختصات قطبی Double Integrals in Polar Coordinates

بعضی از منحنی ها در صفحه xy ، مانند دایره ها و کاردیوئید ها ، در مختصات قطبی آسان تر قابل توصیف هستند تا در مختصات دکارتی. لذا منطقی است اگر بگوییم محاسبه انتگرال های دو گانه روی ناحیه های که محصور بین این منحنی ها هستند ، در مختصات قطبی آسان تر است. ناحیه ای که روی آن در مختصات قطبی ، انتگرال می گیریم ، مطابق زیر توصیف می شود. فرض می کنیم h_1 و h_2 در بازه $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشند. اینجا $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ است. و فرض می کنیم

$$0 \leq h_1(\theta) \leq h_2(\theta) \quad \text{برای} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

باشد. فرض می کنیم R ناحیه ای در صفحه xy محصور بین خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ و نمودار های قطبی $r = h_1(\theta)$ و $r = h_2(\theta)$ باشد. تصویر AA تصویر $A A$



می گوییم R ناحیه ای است بین نمودار های قطبی h_1 و h_2 در $[\alpha, \beta]$. این ناحیه R لازم نیست ساده عمودی و یا ساده افقی باشد. هر تابعی که در R پیوسته باشد ، در R انتگرال پذیر است. پس

$$\iint_R f(x,y) dA$$

وجود دارد.

همان طور که قبلا گفتیم ، گاهی اوقات اگر مختصات دکارتی و یا مختصات مستطیلی را به مختصات قطبی تبدیل کنیم ، انوقت محاسبه انتگرال دو گانه آسان تر خواهد بود. اما ، قبل از شرح چگونگی این تغییر ، لازم است مفهوم انتگرال دو گانه در ناحیه مستطیلی قطبی شرح دهیم.

ناحیه های مستطیلی قطبی برای انتگرال Polar Rectangular Regions of Integration

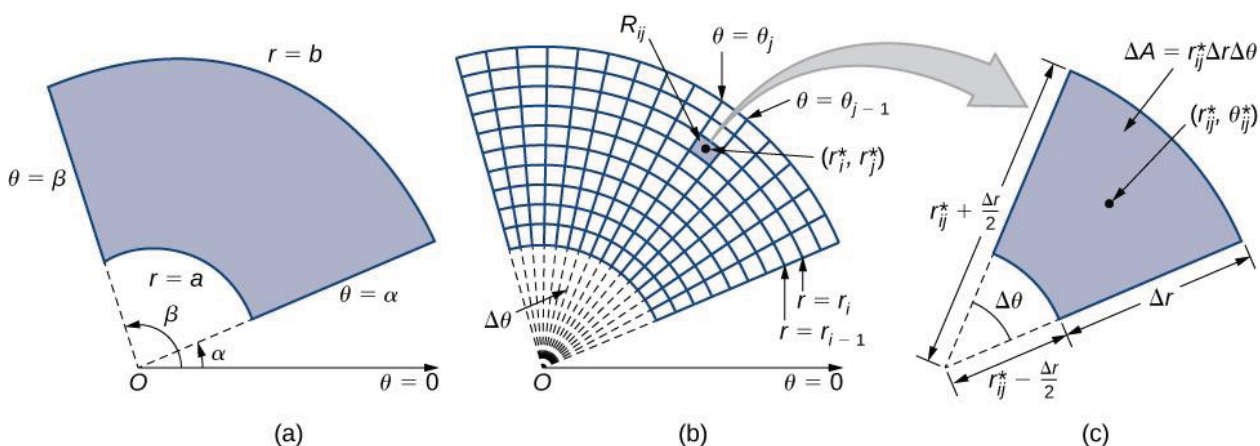
بخاطر دارید، در بخش ۶.۱، هنگامی که انتگرال دو گانه را برای یک تابع پیوسته f در مختصات دکارتی یا مختصات مستطیلی، روی ناحیه R در صفحه xy تعریف کردیم، R را به مستطیل های فرعی تقسیم کردیم بطوری که اضلاع این مستطیل های فرعی موازی محور های مختصات باشند. این اضلاع یا دارای مقدار ثابت x بودند و یا مقدار ثابت y .

در مختصات قطبی، شکلی که با آن کار می کنیم یک مستطیل قطبی است، که اضلاع آن دارای مقدار ثابت r است و یا مقدار ثابت θ .

یعنی می توانیم یک مستطیل قطبی را مطابق زیر توصیف کنیم.

$$R = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

تصویر (a)



در این بخش، می خواهیم روی مستطیل های قطبی انتگرال بگیریم. یک تابع $f(r, \theta)$ روی ناحیه مستطیل قطبی R در نظر بگیرید. بازه $[a, b]$ را به m بازه فرعی $[r_{i-1}, r_i]$ تقسیم می کنیم. طول هر کدام از این بازه های فرعی مساوی است با $\Delta r = \frac{b-a}{m}$.

بازه $[\alpha, \beta]$ را هم به n بازه فرعی $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ تقسیم می کنیم. عرض این بازه های فرعی مساوی است با $\Delta \theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$.

این یعنی ناحیه مستطیل قطبی R را به مستطیل های قطبی فرعی R_{ij} تقسیم می کنیم بطوری که اضلاع هر یک از آنها تشکیل شده از $r = r_i$ برای $1 \leq i \leq m$ و $\theta = \theta_j$ برای $1 \leq j \leq n$

تصویر (b)

تصویر (c) یکی از مستطیل های فرعی را بزرگ کرده ایم. طبق معمول، می خواهیم مساحت مستطیل فرعی قطبی R_{ij} یعنی ΔA و حجم قطبی جعبه باریک بالای R_{ij} را پیدا کنیم.

بخاطر بیاورید که در یک دایره به شعاع r ، طول کمان مقابل یک زاویه مرکزی θ مطابق زیر بدست می آید.

$$s = r\theta$$

در تساوی بالا s طول کمان و θ بر حسب رادیان است.

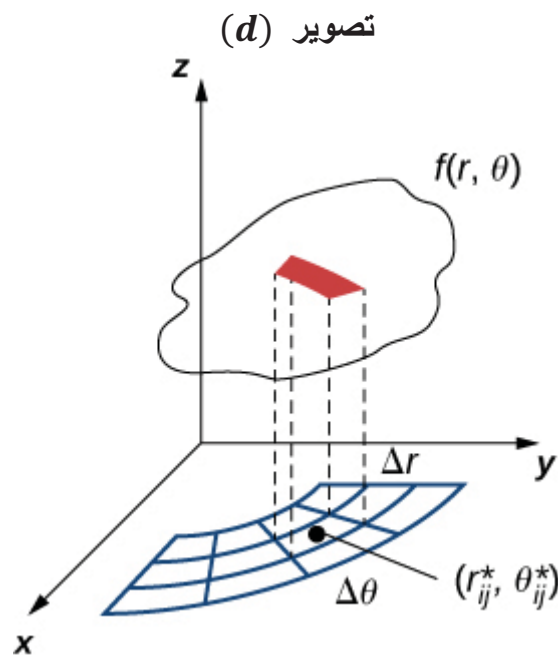
توجه دارید که مستطیل قطبی R_{ij} شبیه یک نوزنقه است با دو ضلع موازی $r_{i-1}\Delta\theta$ و $r_i\Delta\theta$ و عرض Δr ، لذا مساحت مستطیل فرعی قطبی R_{ij} مطابق زیر است.

$$\Delta A = \frac{1}{2} \Delta r (r_{i-1} \Delta\theta + r_i \Delta\theta)$$

پس از ساده کردن و فرض $r_{ij}^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$ خواهیم داشت $\Delta A = r_{ij}^* \Delta r \Delta\theta$ ، لذا حجم قطبی جعبه باریک بالای R_{ij} مطابق زیر است.

$$f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) \Delta A = f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta\theta$$

تصویر (d)



به همین طریق برای تمام مستطیل های فرعی عمل می کنیم و حجم های جعبه های مستطیلی را جمع می کنیم، پس جمع دو گانه ریمان زیر را بدست می آوریم.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta\theta$$

همان طور که قبلا هم دیدیم، اگر m و n را هر چه بزرگ تر کنیم، تقریب بهتری برای حجم ناحیه سه بعدی بالای ناحیه R بدست می آوریم. لذا حجم قطبی را، به صورت حد جمع دو گانه ریمان تعریف می کنیم. یعنی

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta\theta$$

تعریف: انتگرال دوگانه در مختصات قطبی**Definition: The Double Integral in Polar Coordinates**

انتگرال دوگانه تابع $f(r, \theta)$ روی ناحیه مستطیل قطبی R در صفحه $r\theta$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta A = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^*, \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta \theta$$

باز هم ، مانند انتگرال های دو گانه روی ناحیه های مستطیلی ، می توان انتگرال دوگانه روی یک ناحیه مستطیل قطبی ، به صورت انتگرال مکرر بیان کرد.

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=a}^{r=b} f(r, \theta) r dr d\theta$$

اگر f بر حسب x و y داده شود ، تغییرات زیر را انجام می دهیم

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta , \quad dA = r dr d\theta$$

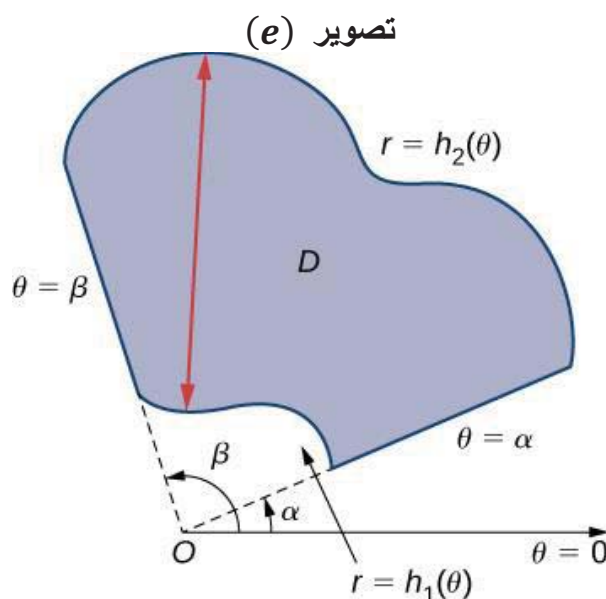
پس داریم.

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

برای محاسبه انتگرال دو گانه یک تابع پیوسته بوسیله انتگرال های مکرر روی ناحیه های قطبی کلی تر ، معمول است که معادله های قطبی را بجای $\theta = f(r)$ بنویسیم $r = f(\theta)$ ، پس ناحیه قطبی کلی به صورت زیر بدست می آید.

$$R = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

تصویر (e).



و در نهایت قضیه زیر بدست می آید.

قضیه انتگرال در مختصات قطبی Integrals in Polar Coordinates Theorem

فرض می کنیم h_1 و h_2 در $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشند و $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ باشد، و

$$0 \leq h_1(\theta) \leq h_2(\theta) \text{ برای } \alpha \leq \theta \leq \beta$$

باشد. فرض کنید R یک ناحیه بین نمودار های قطبی

$$r = h_1(\theta) \text{ و } r = h_2(\theta) \text{ برای } \alpha \leq \theta \leq \beta$$

باشد. اگر f در R پیوسته باشد. پس

$$\int_R \int f(x,y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (1)$$

در صورتی که f در R نامنفی باشد، پس حجم ناحیه سه بعدی بین نمودار f و R عبارت است از

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (2)$$

و مساحت R عبارت است از

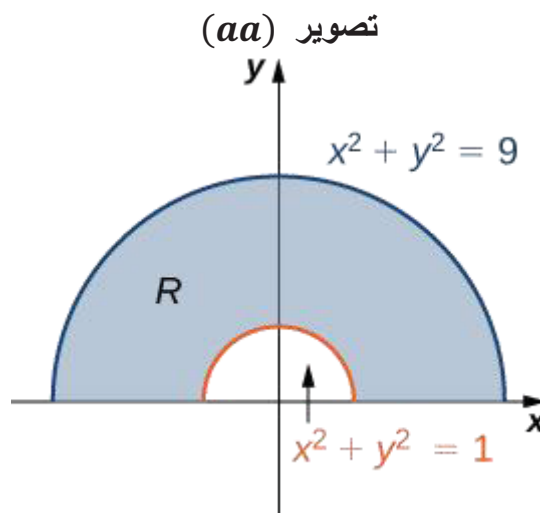
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} r dr d\theta$$

مثال ۱ - نمودار ناحیه قطبی زیر را رسم کنید.

$$R = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

پاسخ

همان طور که در تصویر (aa) ملاحظه می کنید، $r = 3$ و $r = 1$ دایره هایی هستند به شعاع ۱ و ۳ و $0 \leq \theta \leq \pi$ شامل قسمت بالای صفحه xy است. پس ناحیه مانند یک نیم حلقه به نظر می رسد.



مثال ۲ - انتگرال زیر را روی ناحیه $R = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ محاسبه کنید.

$$\iint_R 3x \, dA$$

پاسخ

ناحیه داده شده مانند مثال ۱ است، اما شعاع نیم دایره بیرونی ۲ است.

$$\iint_R 3x \, dA$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=1}^{r=2} 3r \cos \theta \, r \, dr \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos \theta \left[r^3 \right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 7 \cos \theta \, d\theta = 7 \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0 \end{aligned}$$

مثال ۳ - انتگرال زیر را محاسبه کنید. در صورتی که R یک دایره واحد در صفحه xy باشد.

$$\iint_R (1 - x^2 - y^2) \, dA$$

پاسخ

چون R یک دایره واحد است، پس می توان آنرا به صورت زیر توصیف کرد.

$$R = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

با تغییر دادن $dA = r dr d\theta$ و $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & \iint_R (1 - x^2 - y^2) dA \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

مثال ۴ - انتگرال زیر را محاسبه کنید ، در صورتی که $R = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$ باشد.

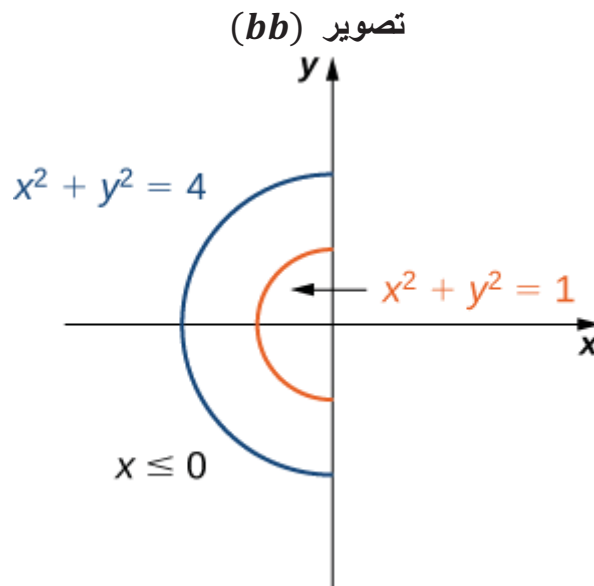
$$\iint_R (x + y) dA$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که R یک ناحیه حلقه مانند است که می توان آنرا مطابق زیر به مختصات قطبی تبدیل کرد.

$$R = \left\{ (r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

تصویر (bb) •



با تغییر دادن $dA = r dr d\theta$ و $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ خواهیم داشت.

$$\iint_R (x + y) dA$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} \int_{r=1}^{r=2} (r \cos \theta + r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= \left(\int_{r=1}^{r=2} r^2 \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \\
 &= \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_1^2 (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

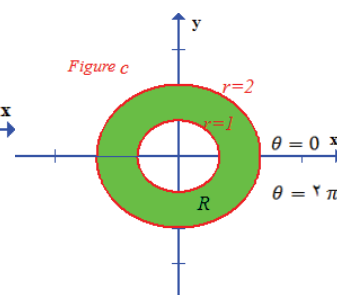
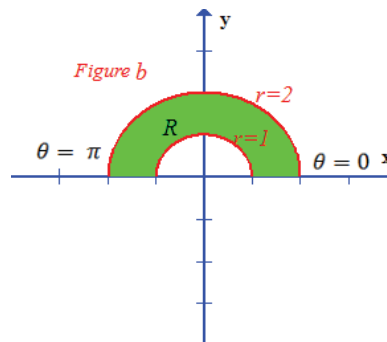
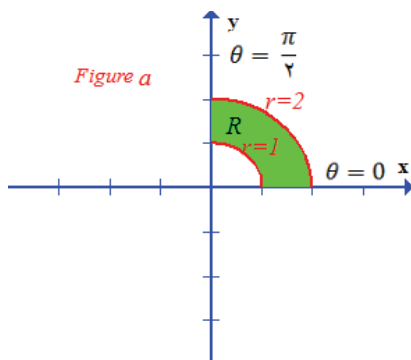
مثال ۵ فرض کنید R ناحیه ای است بین دایره های $r=1$ و $r=2$ و خط های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ باشد. اینجا $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ است. انتگرال زیر را به مختصات قطبی تبدیل کنید

$$\iint_R (3x + 8y^2) \, dA$$

و سپس برای حالت های زیر انتگرال را محاسبه کنید.

- a) $\alpha = 0$ و $\beta = \frac{\pi}{4}$ (R ربع حلقه است)
 b) $\alpha = 0$ و $\beta = \pi$ (R نیم حلقه است)
 c) $\alpha = 0$ و $\beta = 2\pi$ (R یک حلقه است)

پاسخ



بر اساس قضیه بالا داریم.

$$\iint_R (3x + 8y^2) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_1^2 (3r \cos \theta + 8r^2 \sin^2 \theta) r \, dr \, d\theta$$

اگر R ربع حلقه باشد، تصویر a ، پس داریم.

$$\begin{aligned}
\int_R \int (3x + 8y^2) dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (3r \cos \theta + 8r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 8r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^3 \cos \theta + 2r^4 \sin^2 \theta \right) \Big|_1^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \cos \theta + 32 \sin^2 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7 \cos \theta + 30 \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \left(7 \sin \theta + 15 \theta - \frac{15}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7 + \frac{15}{2} \pi
\end{aligned}$$

برای نیم حلقه، تصویر b ، فقط لازم است حد بیرونی انتگرال $\frac{\pi}{2}$ را به π تبدیل کنیم. پس داریم.

$$\begin{aligned}
\int_R \int (3x + 8y^2) dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r \cos \theta + 8r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
&= \left(7 \sin \theta + 15 \theta - \frac{15}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = 15 \pi
\end{aligned}$$

برای حلقه کامل، بجای π می گذاریم 2π

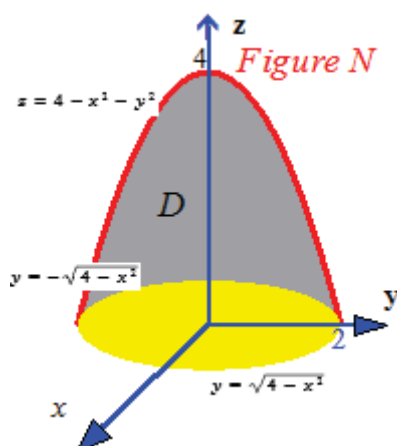
$$\begin{aligned}
\int_R \int (3x + 8y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (3r \cos \theta + 8r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
&= \left(7 \sin \theta + 15 \theta - \frac{15}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 30 \pi
\end{aligned}$$

مثال ۶ - فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی محصور از طرف بالا به پارابولونید

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{از پایین به صفحه } xy \text{ باشد. مطلوب است حجم } D$$

پاسخ

بر اساس مثال ۵ بخش ۶.۱ ناحیه R که باید روی آن انتگرال گرفته شود، محصور است بوسیله دایره $x^2 + y^2 = 4$ که معادله آن در مختصات قطبی می شود $r = 2$ ، پس می توان D را ناحیه ای بین نمودار پارابولونید و دیسک $x^2 + y^2 \leq 4$ توصیف کرد. تصویر N

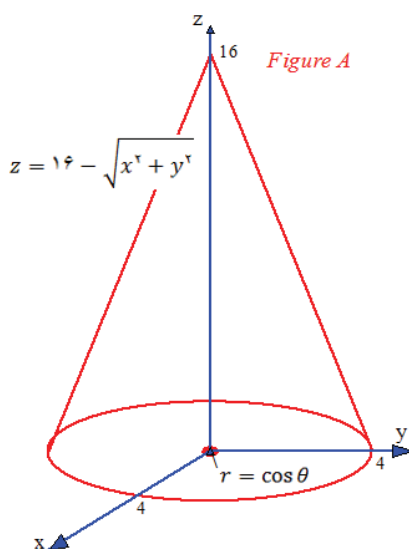


پس داریم.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_R \int (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi
 \end{aligned}$$

گر چه پاسخ بدست آمده همان پاسخ مثال ۵ بخش ۶.۱ است ، اما محاسبه انتگرال با استفاده از مختصات قطبی آسان تر بود.

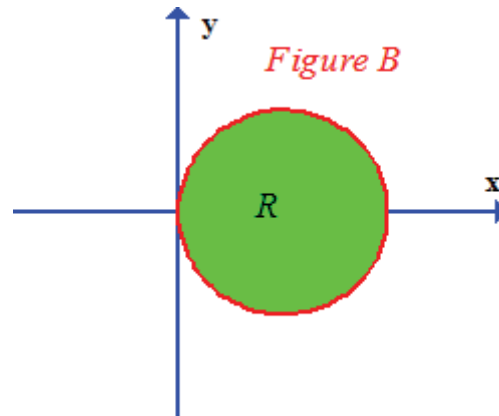
مثال ۷ - فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی است که از طرفین محدود است به استوانه $r = \cos \theta$ و از طرف بالا به مخروط $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و از پایین به صفحه xy . مطلوب است حجم ناحیه D تصویر A



پاسخ

ملاحظه می کنید که R ناحیه ای است بین نمودار های قطبی زیر
 $r = 0$ و $r = \cos(\theta)$ برای $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

تصویر B



پس داریم.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_R \int (16 - \sqrt{x^2 + y^2}) dA \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (16 - r) r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (16r - r^2) dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 + 8 \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta}{3} + \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{3} \right) d\theta \\
 &= \left(8\theta + 2 \sin^2 \theta - \frac{\sin \theta}{3} + \frac{\sin^3 \theta}{9} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi - \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

نکته مهم

هنگام محاسبه یک انتگرال دو گانه با استفاده از فرمول شماره (۱) تابع های h_1 و h_2 باید در $[\alpha, \beta]$ نامنفی باشند. همچنین در مثال ۳ دیدید که دیسک را با $r = \cos \theta$ نشان دادیم. اما $\cos \theta$ برای $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ منفی است. و می توان نشان داد که

$$\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} (16 - r) r dr d\theta \neq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (16 - r) r dr d\theta$$

همچنین توجه کنید به توصیه ما در ابتدای این بخش گفتیم باید داشته باشیم

$$0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$$

برای این که مطمئن باشیم هر نقطه در R فقط مربوط به یک نقطه در صفحه $r\theta$ باشد. اما، ناحیه ها ای مانند ناحیه بین دو ماچ پیچ هستند که می توان داشته باشیم $\beta - \alpha > 2\pi$ به مثال ۸ توجه کنید.

مثال ۸ - فرض کنید R ناحیه ای است بین نمودار های قطبی $r = \theta$ و $r = 2\theta$ برای

$$0 \leq \theta \leq 3\pi$$

تصویر C .

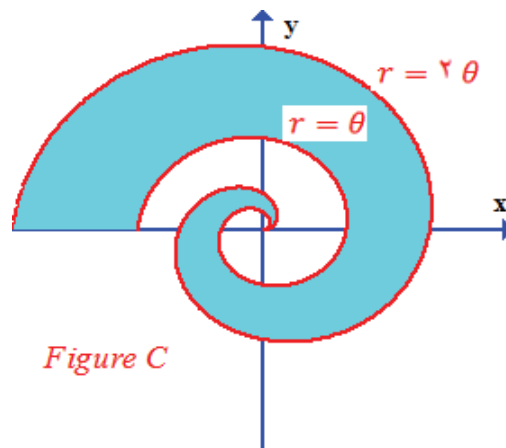


Figure C

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA$$

پاسخ

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dA &= \int_0^{3\pi} \int_0^{2\theta} (r^2) r dr d\theta = \int_0^{3\pi} \int_0^{2\theta} r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2\theta} d\theta = \frac{16}{4} \int_0^{3\pi} \theta^4 d\theta \\ &= \frac{16}{4} \left. \frac{\theta^5}{5} \right|_0^{3\pi} = \frac{729}{4} \pi^5 \end{aligned}$$

محاسبه انتگرال مثال شماره ۸ به روش بخش ۶.۱ خیلی مشکل است.

حجم ها و مساحت های قطبی Polar Areas and Volumes

مانند مختصات مستطیلی، اگر یک ناحیه S محصور شده باشد بوسیله رویه $z = f(r, \theta)$ و همچنین بوسیله رویه های $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ، $r = a$ ، $r = b$ پس می توانیم حجم S را از طریق انتگرال دو گانه پیدا کنیم. مطابق زیر

$$V = \iint_R f(r, \theta) r \, dr \, d\theta = \int_{\theta=a}^{\theta=b} \int_{r=a}^{r=b} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

اگر قاعده ناحیه را بتوان به صورت زیر توصیف کرد.

$$D = (r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)$$

پس انتگرال دو گانه برای حجم به صورت زیر است.

$$V = \iint_D f(r, \theta) r \, dr \, d\theta = \int_{\theta=a}^{\theta=b} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

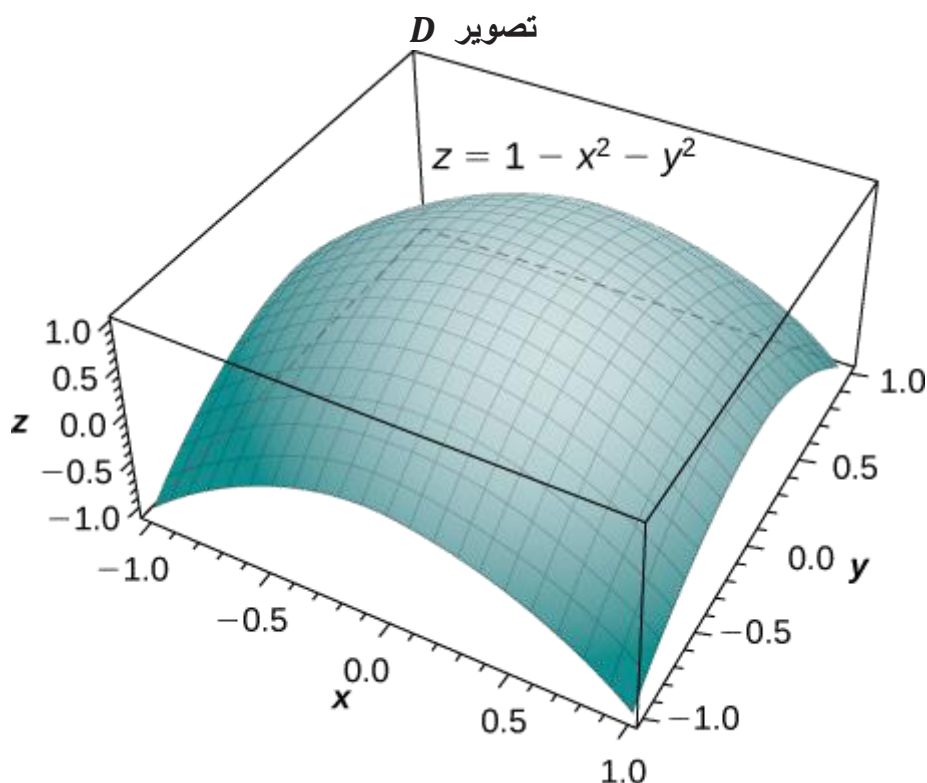
مثال ۹ - حجم ناحیه ای را پیدا کنید که، زیر پارابولوئید $z = 1 - x^2 - y^2$ و بالای دایره واحد در صفحه xy قرار دارد. تصویر D

پاسخ

با روش انتگرال دو گانه، ملاحظه می کنید که حجم، انتگرال مکرر به شکل زیر است

$$V = \iint_R (1 - x^2 - y^2) \, dA, \quad R = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

این انتگرال را در مثال ۳ حل کردیم.



تمرینات ۶.۲

در تمرینات زیر ، انتگرال ها را به انتگرال های مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید و سپس آنها را محاسبه کنید.

$$1) \iint_R xy \, dA$$

در صورتی که R ناحیه ای باشد محصور توسط دایره $r = 5$

$$2) \iint_R (x + y) \, dA$$

در صورتی که R ناحیه ای باشد در ربع اول محصور بین خطوط $y = 0$ و $y = \sqrt{3}x$ و دایره $r = 2$

$$3) \iint_R (x^2 + y^2) \, dA$$

در صورتی که R ناحیه ای باشد محصور توسط کاردیوئید $r = 2(1 + \sin \theta)$

در تمرینات زیر حجم ناحیه سه بعدی با استفاده از انتگرال مکرر در مختصات قطبی پیدا کنید.

۴ - ناحیه سه بعدی محصور توسط یک نیم کره به شعاع ۳.

۵ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به صفحه $z = 4 + x + 2y$ و از طرفین توسط استوانه

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ و از پایین به صفحه } xy$$

۶ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ، خارج از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و بالای صفحه xy

۷ - ناحیه سه بعدی بالای صفحه xy ، از طرفین محصور توسط استوانه $x^2 + y^2 - 4x = 0$ و از بالا به مخروط $z^2 = x^2 + y^2$

در تمرینات زیر مساحت ناحیه در صفحه xy از طریق انتگرال مکرر در مختصات قطبی پیدا کنید.

۸ - ناحیه محصور است توسط لیماسون $r = 2 + \sin \theta$

۹ - ناحیه محصور است بوسیله $r^2 = 4 \cos 2\theta$

راهنمایی - ابتدا مساحت قسمت $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ پیدا کنید.

۱۰ - ناحیه داخل حلقه بزرگ و خارج حلقه کوچک $r = 1 + 2 \sin \theta$

در تمرینات زیر انتگرال را به انتگرال مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید و سپس آنرا محاسبه کنید.

$$11) \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1 \, dx \, dy$$

$$۱۲) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$۱۳) \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

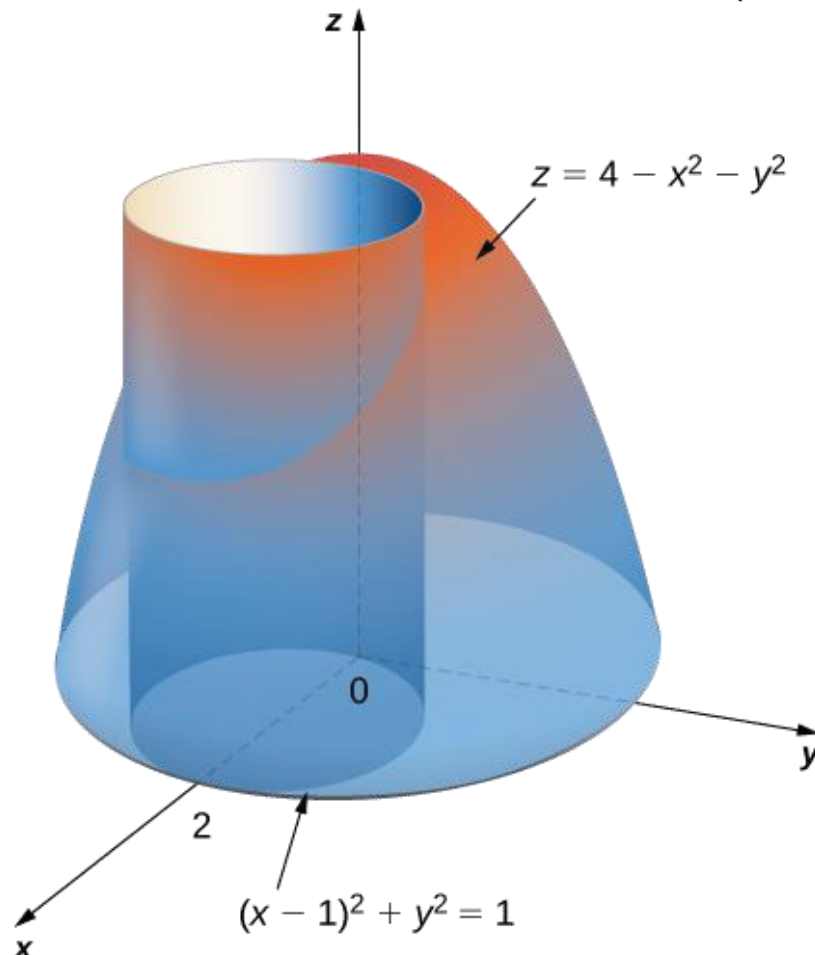
۱۴ - انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D r^2 \sin \theta r dr d\theta$$

ناحیه D محصور است بوسیله محور قطبی و نیمه بالای کاردیوئید زیر

$$r = 1 + \cos \theta$$

۱۵ - حجم ناحیه ، زیر پارابولوئید $z = 4 - x^2 - y^2$ و بالای دیسک $(x-1)^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy ، قرار دارد پیدا کنید.



۱۶ - مطلوب است مساحت ناحیه محصور توسط منحنی $r = \cos^4 \theta$

پاسخ تمرینات ۶.۲

در تمرینات زیر ، انتگرال ها را به انتگرال های مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید و سپس آنها را محاسبه کنید.

1) $\iint_R xy \, dA$

در صورتی که R ناحیه ای باشد محصور توسط دایره $r = 5$
پاسخ

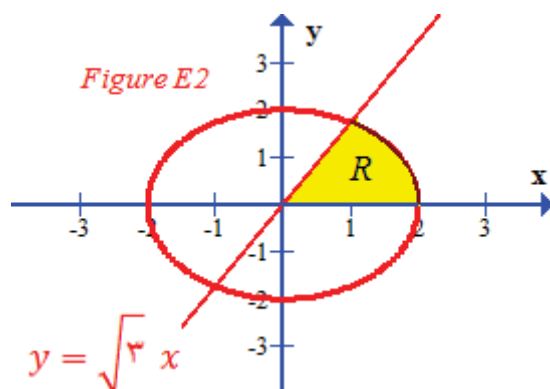
$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_0^5 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{625}{4} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{625}{8} \sin^2 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

2) $\iint_R (x + y) \, dA$

در صورتی که R ناحیه ای باشد در ربع اول محصور بین خطوط $y = 0$ و $y = \sqrt{3}x$ و دایره $r = 2$
پاسخ

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) \, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 (r \cos \theta + r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^3}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \right] \Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta = \frac{8}{3} (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

برای روشن شدن که چرا $\int_0^{\frac{\pi}{3}}$ بکار بردیم ، تصویر E^2 را ملاحظه کنید. آیا می توانید بگویید چرا حد انتگرال را $\int_0^{\frac{\pi}{3}}$ در نظر گرفتیم؟ در صورت لزوم به پاسخ کامل در صفحه آخر مراجعه کنید.

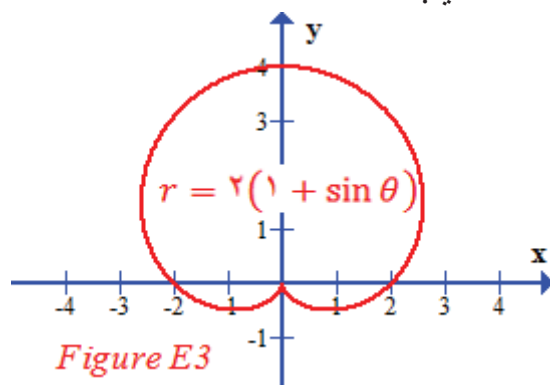


$$3) \iint_R (x^2 + y^2) dA$$

در صورتی که R ناحیه ای باشد محصور توسط کاردیوئید $r = 2(1 + \sin \theta)$

پاسخ

ناحیه R در تصویر $E3$ ملاحظه کنید.



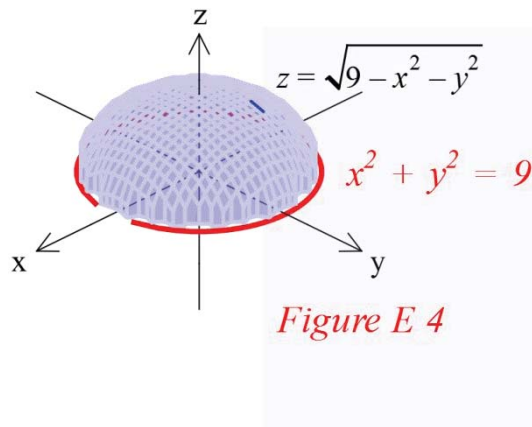
$$\begin{aligned} & \iint_R (x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2(1+\sin \theta)} r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2(1+\sin \theta)} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta)^3 d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (1 + 3\sin \theta + 3\sin^2 \theta + \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} [1 + 3\sin \theta + \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta) + \sin \theta(1 - \cos^2 \theta)] d\theta + \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \left(\theta - \cos \theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta - \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &\quad + \frac{8}{3} \left(\frac{-1}{4} \sin^4 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{32}{3} \pi + 32\pi = 64\pi \end{aligned}$$

در تمرینات زیر حجم ناحیه سه بعدی با استفاده از انتگرال مکرر در مختصات قطبی پیدا کنید.

۴ - ناحیه سه بعدی محصور توسط یک نیم کره به شعاع ۰.۳

پاسخ

تصویر E۴



نیم کره از بالا محصور است توسط $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ و ناحیه ای که باید روی آن انتگرال گرفته شود محصور است توسط دایره $x^2 + y^2 = 9$ پس داریم.

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{9 - r^2} \, r \, dr \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (9 - r^2)^{3/2} \Big|_0^3 \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -27 \, d\theta = 18\pi \end{aligned}$$

۵ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به صفحه $z = 4 + x + 2y$ و از طرفین توسط استوانه

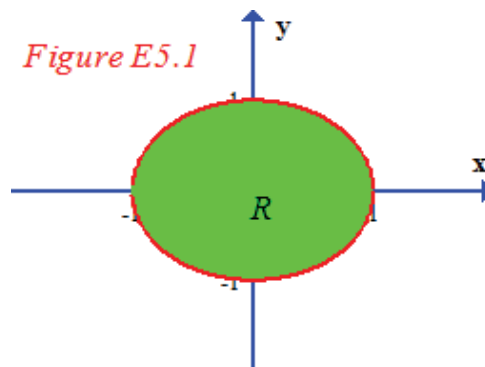
$x^2 + y^2 = 1$ و از پایین به صفحه xy تصویر E۵

پاسخ

ناحیه R که روی آن باید انتگرال گرفته شود، محدود است بوسیله دایره $x^2 + y^2 = 1$ تصویر

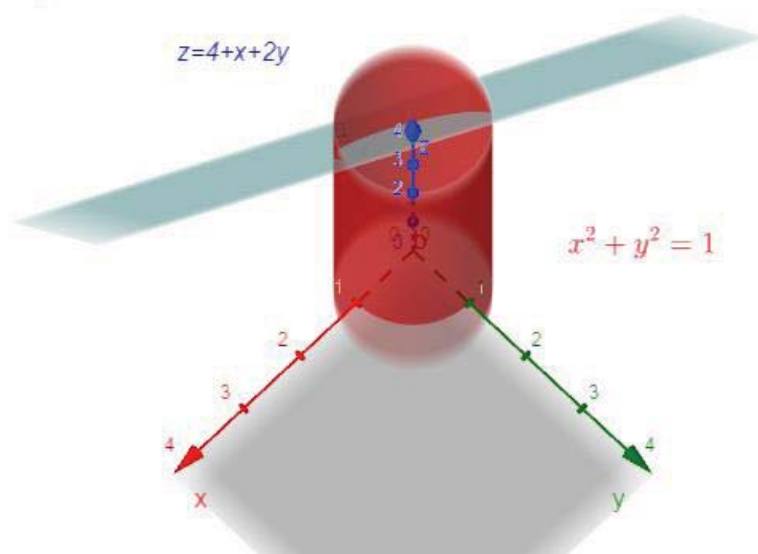
E۵.۱

پس داریم.

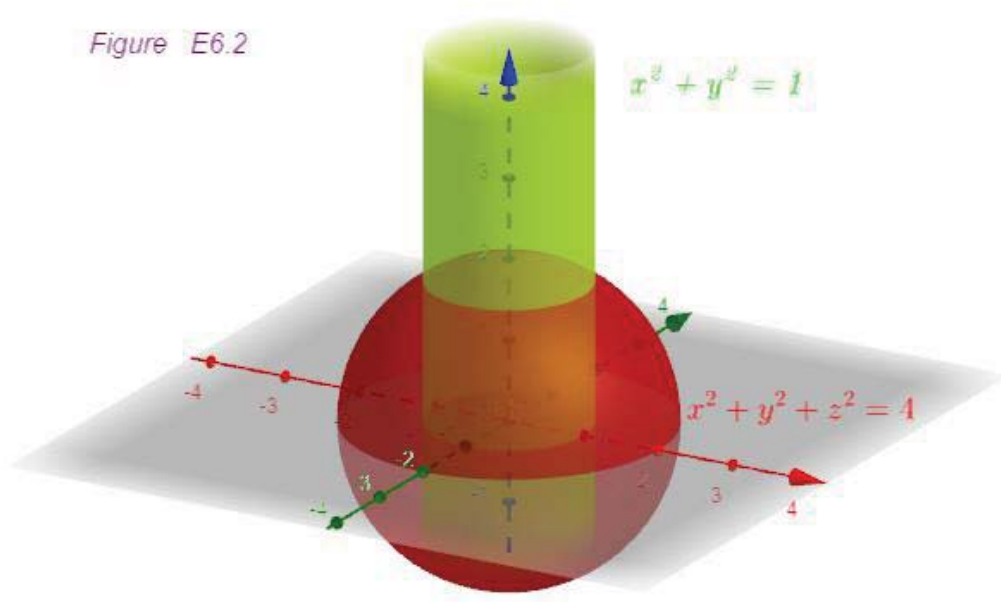


$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (4 + x + 2y) \, dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^\pi (4 + r \cos \theta + 2r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^1 \int_0^\pi (4r + r^2 \cos \theta + 2r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(2r^2 + \frac{r^3}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_0^1 \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left(2 + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta \right) \, d\theta = \left(2\theta + \frac{1}{3} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^\pi \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

Figure E5

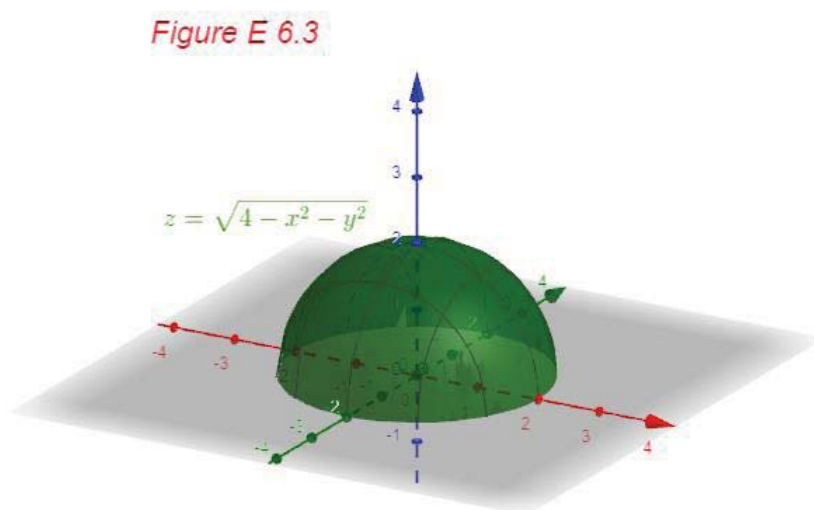


۶ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, خارج از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و بالای صفحه xy • تصویر ۶.۲ E

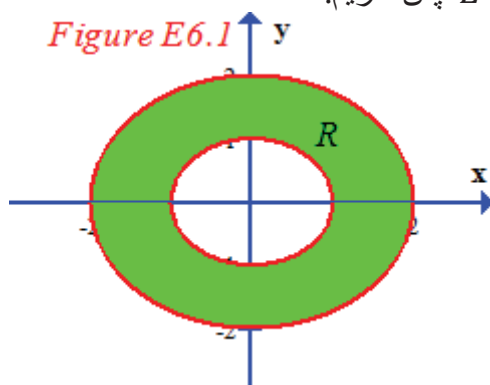


پاسخ

ناحیه سه بعدی از بالا محدود است به $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ تصویر ۶.۳ E

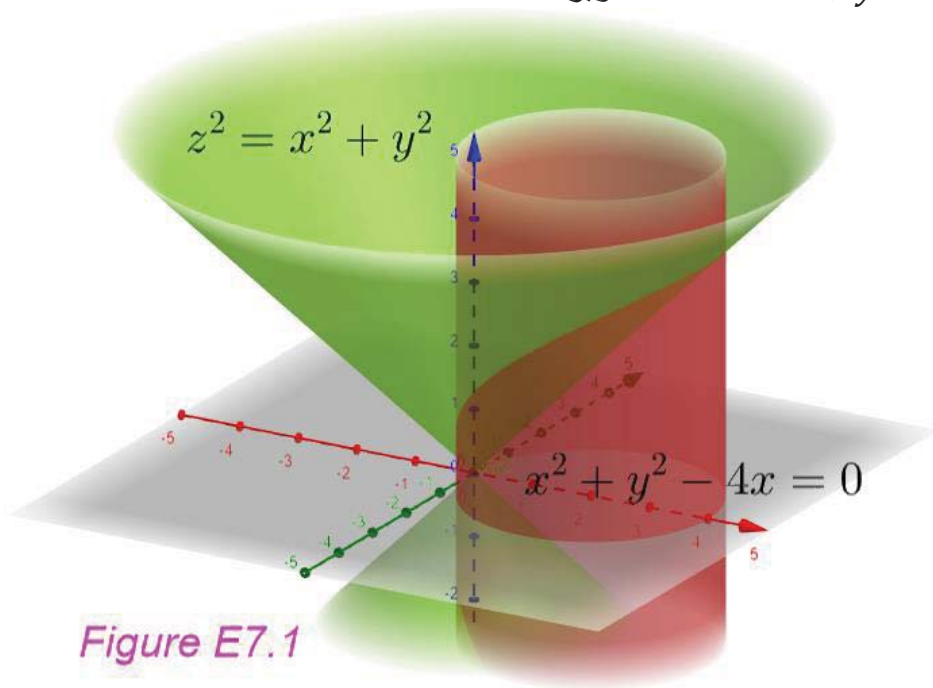


و ناحیه R که روی آن باید انتگرال گرفته شود، محدود است به دایره های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ تصویر ۶.۱ E پس داریم.



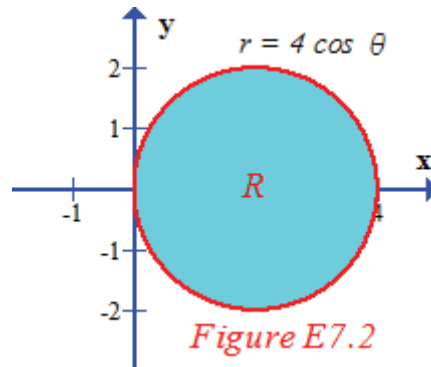
$$\begin{aligned}
 V &= \int_R \int \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4 - r^2} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (4 - r^2)^{3/2} \right]_1^2 \, d\theta \\
 &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\sqrt{3} \pi
 \end{aligned}$$

۷ - ناحیه سه بعدی بالای صفحه xy ، از طرفین محصور توسط استوانه $x^2 + y^2 - 4x = 0$ و از بالا به مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ تصویر ۷.۱ E



پاسخ

مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ به صورت معادله قطبی می شود $z = r$ ناحیه ای که روی آن باید انتگرال گرفته شود، محدود است به $x^2 + y^2 - 4x = 0$ که معادل قطبی آن $r = 4 \cos \theta$ است. پس داریم.



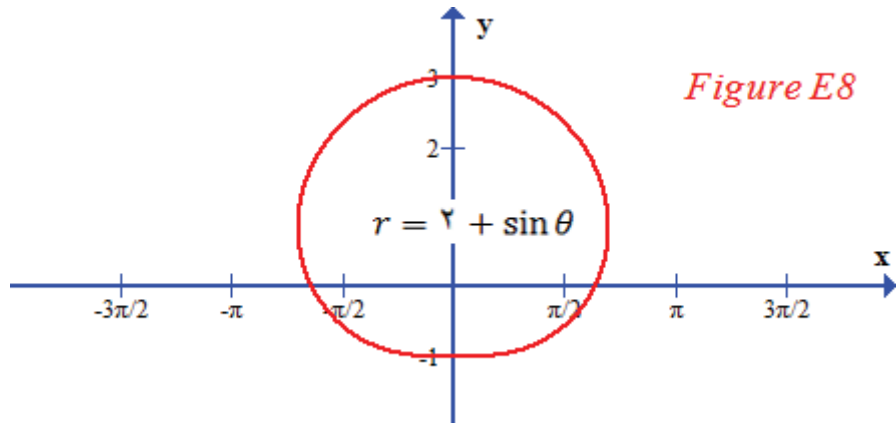
$$\begin{aligned}
 V &= \int_R \int \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \bigg|_0^{4 \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{64}{3} \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{9}
 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر مساحت ناحیه در صفحه xy از طریق انتگرال مکرر در مختصات قطبی پیدا کنید.

۸ - ناحیه محصور است توسط لیماسون $r = 2 + \sin \theta$

پاسخ

تصویر E۸

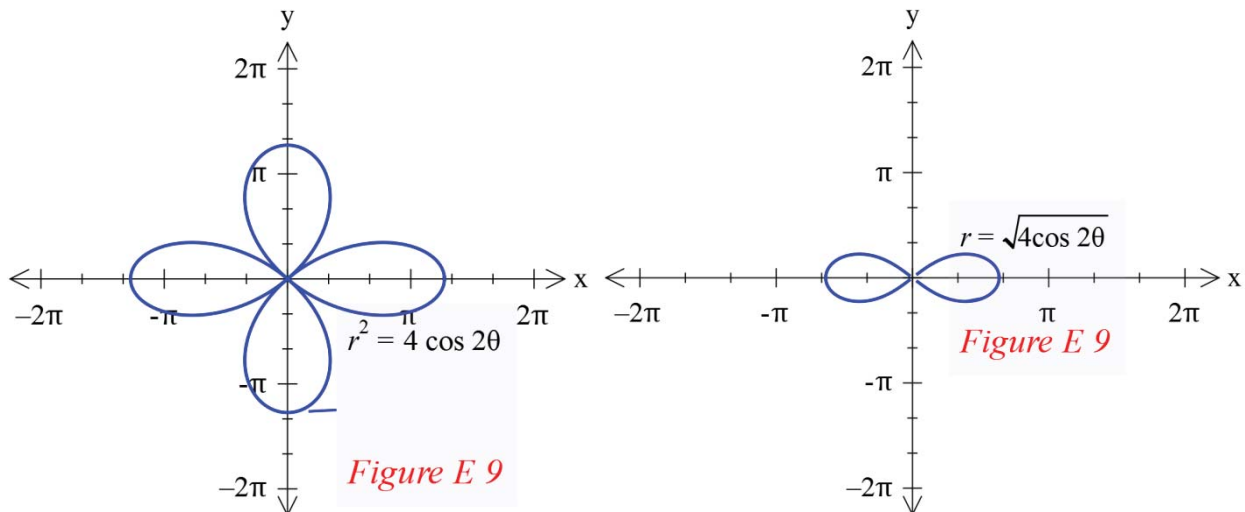


$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin \theta} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2+\sin \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(2 + 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[2 + 2 \sin \theta + \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) \right] d\theta \\
 &= \left(\frac{\theta^2}{2} - 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{2}
 \end{aligned}$$

۹ - ناحیه محصور است بوسیله $r^2 = 4 \cos 2\theta$ راهنمایی - ابتدا مساحت قسمت $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ پیدا کنید.

پاسخ

تصویر E^9



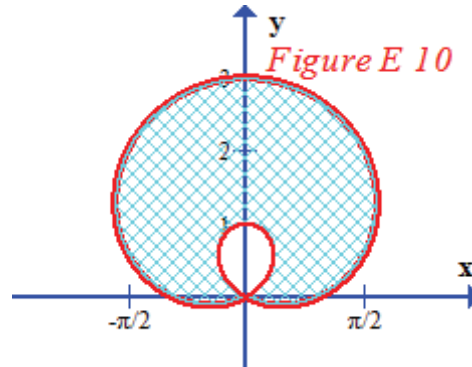
مساحت A دو برابر مساحت A_1 برای $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است. پس داریم.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{4 \cos 2\theta}} r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{4 \cos 2\theta}} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta \, d\theta = \sin 2\theta \bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \end{aligned}$$

پس $A = 2A_1 = 4$ است.

۱۰ - ناحیه داخل حلقه بزرگ و خارج حلقه کوچک $r = 1 + 2 \sin \theta$ پاسخ

تصویر E10



لیماسون $r = 1 + 2 \sin \theta$ با مرکز مختصات در (r, θ) تلاقی می کند اگر $1 + 2 \sin \theta = 0$ باشد. یعنی اگر $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ باشد. پس $\frac{11\pi}{6}$ یا $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ است. لذا مساحت A_1 حلقه بزرگ مطابق زیر است.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_0^{1+2\sin\theta} r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{1+2\sin\theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{1}{2} + 2\sin\theta + (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

برای $\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$ داریم $1 + 2 \sin \theta \leq 0$ پس مساحت A_2 حلقه کوچک داریم.

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \int_0^{-1-2\sin\theta} r \, dr \, d\theta = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{-1-2\sin\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \theta - 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2 \theta \right) \bigg|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} = \pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

پس داریم

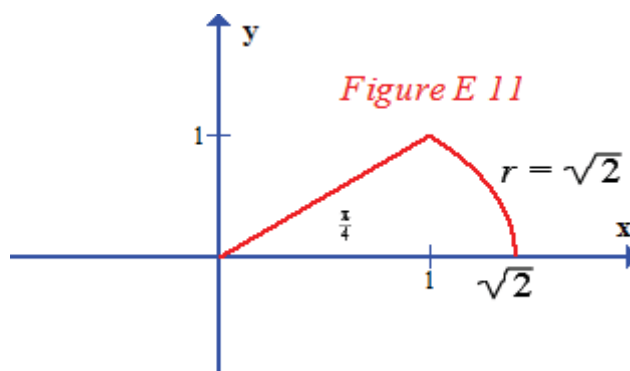
$$A = A_1 - A_2 = \pi + 3\sqrt{3}$$

در تمرینات زیر انتگرال را به انتگرال مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید و سپس آنرا محاسبه کنید.

$$۱۱) \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1 \, dx \, dy$$

پاسخ

تصویر E۱۱

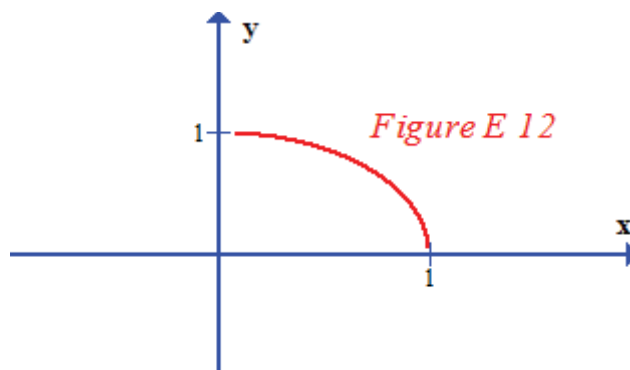


$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1 \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$۱۲) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

پاسخ

تصویر E۱۲

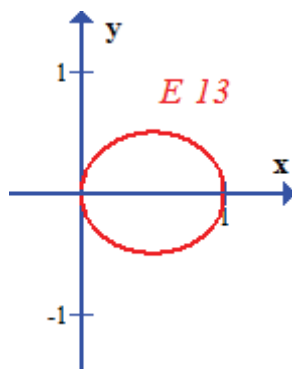


$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\sin r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. -\frac{1}{2} \cos r^2 \right|_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 1 \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} (1 - \cos 1) \end{aligned}$$

$$۱۳) \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

پاسخ

اگر $y = \sqrt{x - x^2}$ باشد، پس $y^2 = x - x^2$ است و یا $x^2 + y^2 = x$ است که در مختصات قطبی می شود $r = \cos \theta$ • تصویر E۱۳



پس داریم.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^2 dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \bigg|_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \theta \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{32} \pi
 \end{aligned}$$

فرمول بالا بر اساس شماره (۱۳) بخش ۲.۱ کتاب انتگرال آوا به همین قلم.

۱۴ - انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iint_D r^2 \sin \theta r dr d\theta$$

ناحیه D محصور است بوسیله محور قطبی و نیمه بالای کاردیوئید زیر

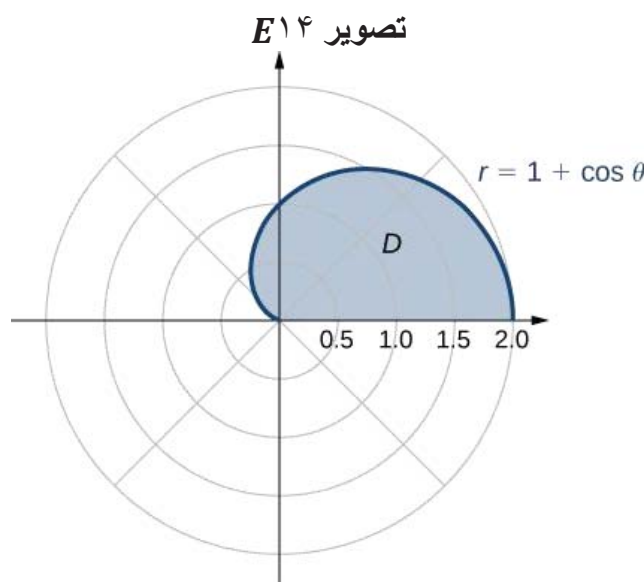
$$r = 1 + \cos \theta$$

پاسخ

می توان ناحیه D را مطابق زیر توصیف کرد.

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta\}$$

تصویر $E^{۱۴}$

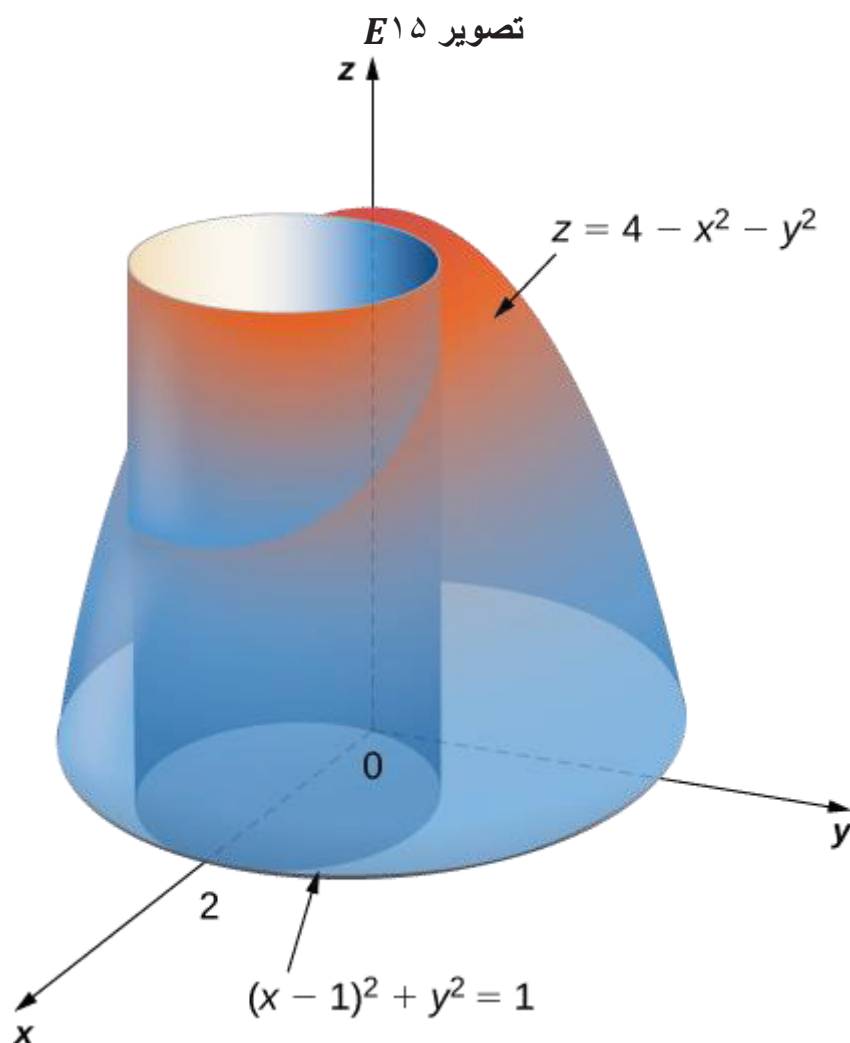


پس داریم.

$$\iint_D r^2 \sin \theta r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=1+\cos\theta} (r^2 \sin\theta) r dr d\theta &= \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^4 \bigg|_{r=0}^{r=1+\cos\theta} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1+\cos\theta)^4 \sin\theta d\theta = -\frac{1}{4} \left(\frac{(1+\cos\theta)^5}{5} \right) \bigg|_0^\pi = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

۱۵ - حجم ناحیه ، زیر پارابولونید $z = 4 - x^2 - y^2$ و بالای دیسک $(x-1)^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy ، قرار دارد پیدا کنید.
تصویر E۱۵



پاسخ

ابتدا دیسک $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را به مختصات قطبی تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2x\end{aligned}$$

معادله آخر در مختصات قطبی می شود $r^2 = 2r \cos \theta$

پس یا $r = 0$ است و یا $r = 2 \cos \theta$

به همین طریق معادله پارابولئید به $z = 4 - r^2$ تبدیل می شود. پس می توان دیسک بالا را در صفحه xy مطابق ناحیه زیر توصیف کرد.

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

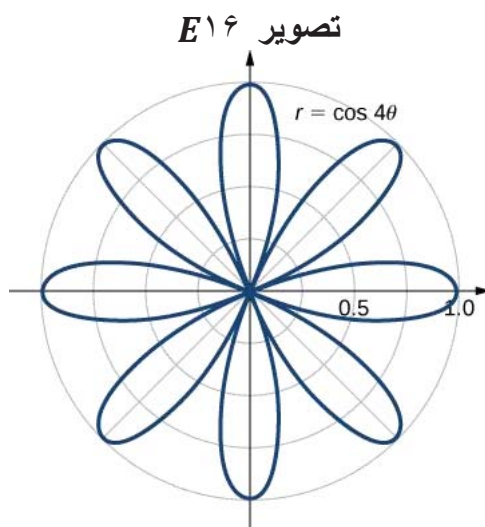
پس حجم ناحیه سه بعدی محدود از بالا به $z = 4 - x^2 - y^2$ و از پایین به $r = 2 \cos \theta$ مطابق زیر پیدا می شود.

$$\begin{aligned}V &= \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta \\ \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} (4 - r^2) r dr d\theta &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi [8 \cos^2 \theta - \frac{8}{3} \cos^3 \theta] d\theta \\ &= \left[\frac{8}{2} \theta + \frac{8}{3} \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{8}{2} \pi\end{aligned}$$

۱۶ - مطلوب است مساحت ناحیه محصور توسط منحنی $r = \cos 4\theta$

پاسخ

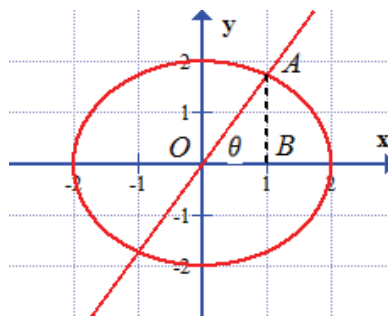
اگر نمودار تابع $r = \cos 4\theta$ را رسم کنیم، ملاحظه می کنید که تصویر یک گل رز با هشت گلبرگ است. تصویر $E16$



با استفاده از قرینه ، می توانیم مساحت یک گلبرگ را پیدا کنیم و حاصل را در ۸ ضرب کنیم. ملاحظه می کنید که مقادیر θ هنگامی که نمودار از مرکز می گذرد صفر های تابع $\cos^4 \theta$ است. و این ها ضریب های فرد $\frac{\pi}{8}$ هستند. پس ، یکی از گلبرگ ها مربوط است به مقادیر θ در بازه $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ پس ، مساحت قسمت محدود توسط منحنی $r = \cos^4 \theta$ مطابق زیر است.

$$\begin{aligned} A &= 8 \int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\theta=\frac{\pi}{8}} \int_{r=0}^{r=\cos^4 \theta} r \, dr \, d\theta = 8 \int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\theta=\frac{\pi}{8}} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos^4 \theta} d\theta \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \cos^8 \theta \, d\theta = 8 \left[\frac{1}{8} \theta + \frac{1}{16} \sin^4 \theta \cos^4 \theta \right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \\ &= 8 \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

پاسخ چرا در تمرین شماره ۲ حدود انتگرال بیرونی را صفر و $\frac{\pi}{3}$ در نظر گرفتیم.



می خواهیم ثابت کنیم $\theta = \frac{\pi}{3}$ است. دایره $r = 2$ در مختصات دکارتی می شود $x^2 + y^2 = 4$

دایره را رسم می کنیم. خط $y = \sqrt{3}x$ را هم رسم می کنیم. این خط دایره را در دو نقطه قطع می کند. این دو نقطه را پیدا می کنیم. برای این کار $y = \sqrt{3}x$ در معادله $x^2 + y^2 = 4$ قرار می دهیم ، پس داریم $x = \pm 1$ اما چون بر اساس فرض مساله ناحیه در ربع اول است پس $x = 1$ را قبول می کنیم. این مقدار را در معادله دایره قرار می دهیم و $y = \pm \sqrt{3}$ بدست می آید و باز مقدار مثبت را قبول می کنیم. پس داریم $A = (1, \sqrt{3})$ از نقطه A یک خط عمود بر محور x رسم می کنیم ، ملاحظه می کنید مثلث OAB یک مثلث قائم الزویه است و باز ملاحظه می کنید چون $OB = 1$ و $OA = 2$ است ، پس

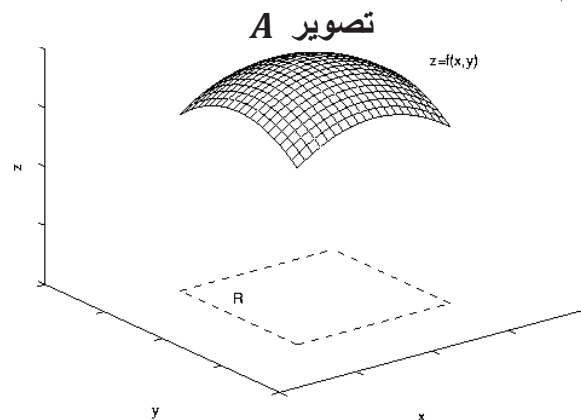
$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

۶.۳ - سطح جانبی Surface Area

در بخش ۳.۵ کتاب انتگرال آوا توسط این قلم فرمول هایی معرفی کردیم برای محاسبه سطح جانبی یک رویه که از دوران یک منحنی حول محور x در صفحه xy ایجاد می شود. در این بخش در مورد استفاده از انتگرال دوگانه جهت محاسبه سطح جانبی بحث می کنیم. اینجا از سطح جانبی در فضای سه بعدی صحبت می کنیم.

فرض می کنیم $f(x, y)$ یک تابع مشتق پذیر باشد. همان طور که قبلا دیده ایم $z = f(x, y)$ یک رویه در فضای xyz تعریف می کند. در بعضی موارد، لازم است سطح جانبی رویه بالای یک ناحیه R را در صفحه xy پیدا کنیم. تصویر A



فرمول سطح جانبی مطابق زیر است.

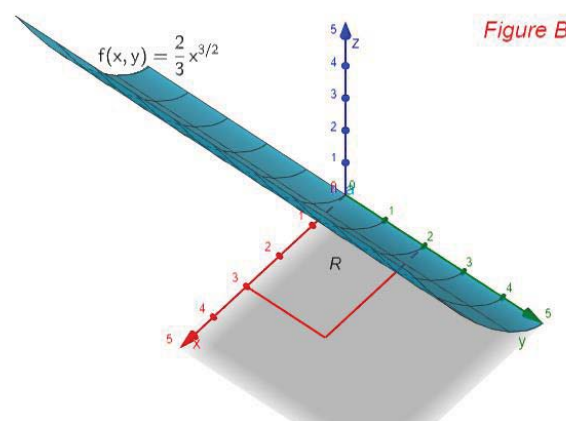
$$S = \int_R \int \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1} dA \quad (1)$$

مثال ۱ - فرض کنید R یک ناحیه مستطیلی محدود به خطوط زیر باشد.

$$x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 2$$

و فرض کنید $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ باشد. مطلوب است سطح جانبی آن قسمت از نمودار f که بالای

R قرار دارد. تصویر B

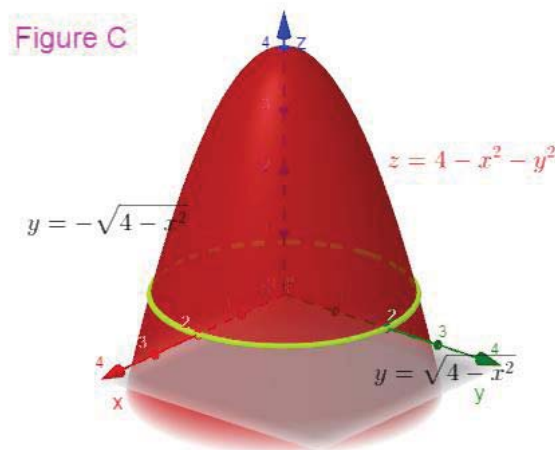


پاسخ

ملاحظه می کنید که $f_x(x, y) = x^{1/2}$ و $f_y(x, y) = 0$ است برای $f(x, y)$ در R پس داریم.

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{(x^{1/2})^2 + 0 + 1} dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{x+1} dy dx = 2 \int_0^3 \sqrt{x+1} dx \\ &= \frac{4}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

مثال ۲ - مساحت جانبی آن قسمت از پارابولوئید $z = 4 - x^2 - y^2$ که بالای صفحه xy است، پیدا کنید. تصویر C



پاسخ

رویه داده شده روی ناحیه R در صفحه xy قرار دارد که محصور است توسط دایره زیر

$$x^2 + y^2 = 4$$

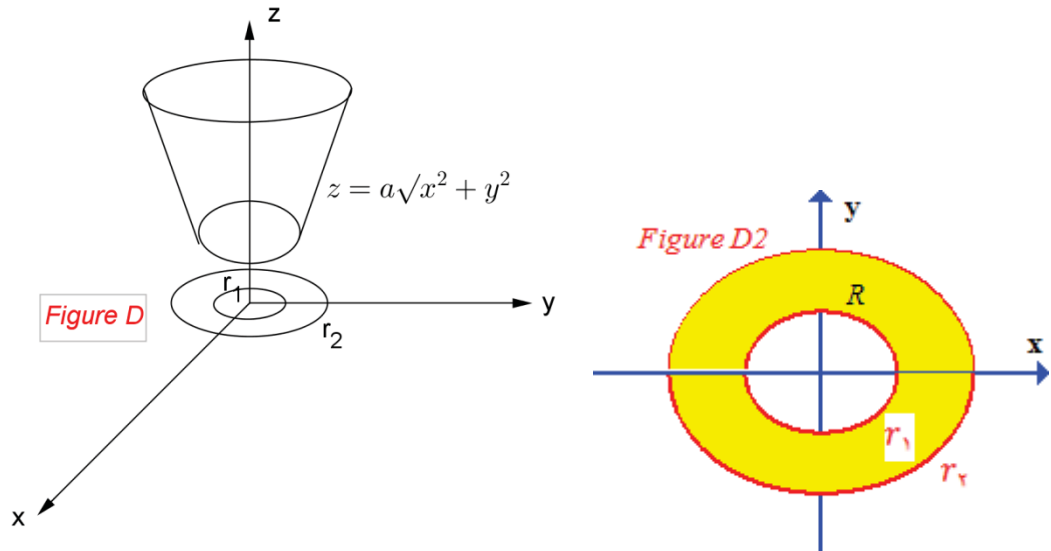
حال اگر $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ باشد، پس

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -2y$$

محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی مطابق زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{1}{6} \pi (17^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

مثال ۳ - فرض کنید $a > 0$ باشد. مطلوب است سطح جانبی مخروط ناقص $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ به شعاع های مینیمم r_1 و ماکسیمم r_2 • تصویر D .



پاسخ

رویه داده شده، بالای ناحیه R قرار دارد. این ناحیه در صفحه xy محصور است توسط حلقه های زیر

$$r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$$

تصویر D^2

حال اگر $f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، پس

$$f_x(x, y) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

است. پس داریم.

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{a^2 x^2}{x^2 + y^2} + \frac{a^2 y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA = \iint_R \sqrt{a^2 + 1} \, dA \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \iint_R 1 \, dA = \sqrt{a^2 + 1} (\text{مساحت } R) \end{aligned}$$

چون مساحت R مساوی است با $\pi(r_2^2 - r_1^2)$ پس داریم.

$$S = \pi\sqrt{a^2 + 1} (r_2^2 - r_1^2)$$

تمرینات ۶.۳

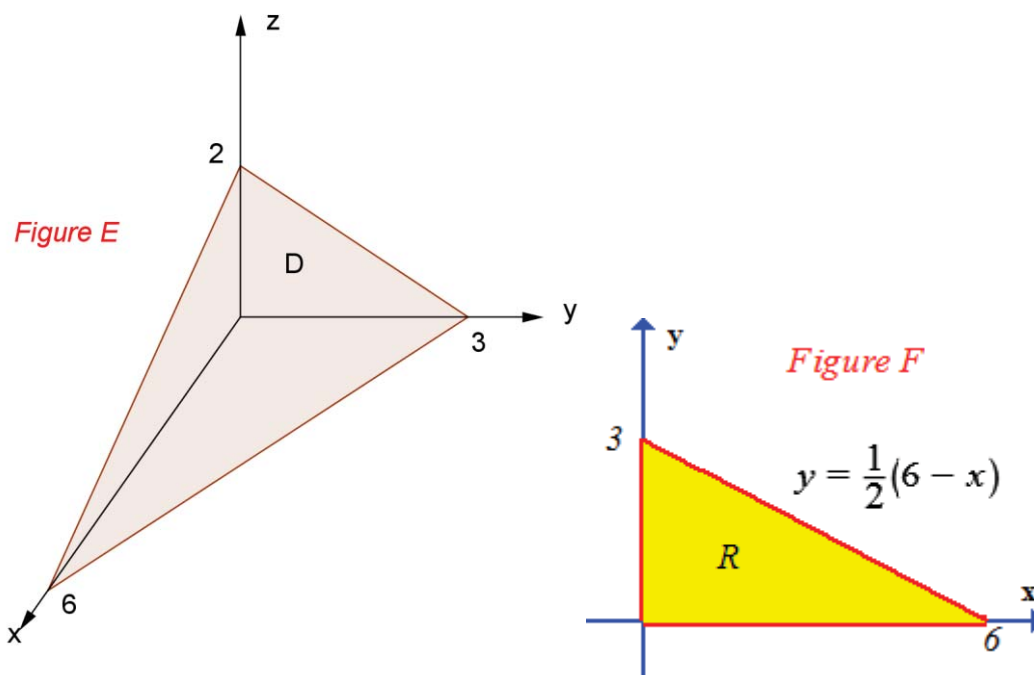
در تمرینات زیر سطح جانبی رویه داده شده را پیدا کنید.

- ۱ - آن قسمت از صفحه $x + 2y + 3z = 6$ که در هشتک اول قرار دارد.
- ۲ - آن قسمت از پارابولوئید $z = 9 - x^2 - y^2$ که بالای صفحه $Z = 5$ قرار دارد.
- ۳ - آن قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ که داخل استوانه $x^2 - 4x + y^2 = 0$ قرار دارد.
- ۴ - آن قسمت از ورقه سهمی شکل $z = x^2$ که مستقیماً بالای مثلث با رئوس $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ قرار دارد.

پاسخ تمرینات ۶.۳

در تمرینات زیر سطح جانبی رویه داده شده را پیدا کنید.

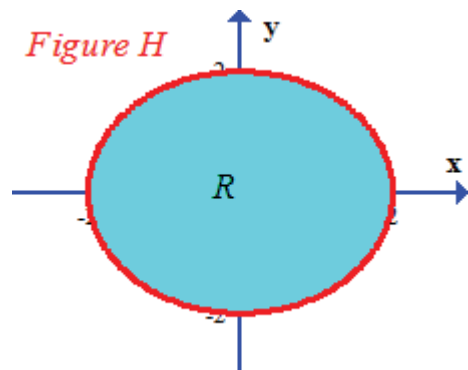
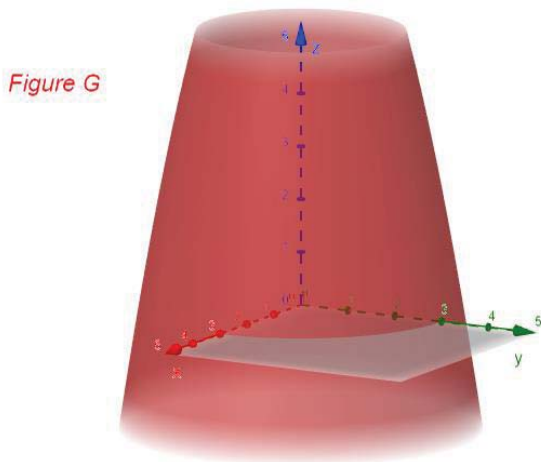
- ۱ - آن قسمت از صفحه $x + 2y + 3z = 6$ که در هشتک اول قرار دارد.
- پاسخ - تصاویر E و F



فرض می کنیم $f(x, y) = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$ باشد. پس $f_x(x, y) = -\frac{1}{3}$ و $f_y(x, y) = -\frac{2}{3}$ است. آن قسمت از $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$ در هشتک اول، بالای ناحیه R در ربع اول صفحه xy محدود به خطوط $x = 0$ و $y = 0$ و $x + 2y = 6$ قرار دارد. پس داریم.

$$\begin{aligned}
 & \int_R \int \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1} \, dA \\
 &= \int_0^6 \int_0^{\frac{1}{3}(6-x)} \frac{\sqrt{14}}{3} \, dy \, dx = \int_0^6 \frac{\sqrt{14}}{3} y \bigg|_0^{\frac{1}{3}(6-x)} \, dx \\
 &= \int_0^6 \frac{\sqrt{14}}{6} (6-x) \, dx = \frac{\sqrt{14}}{6} \left(6x - \frac{1}{2}x^2 \right) \bigg|_0^6 = 3\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

۲ - آن قسمت از پارابولوئید $z = 9 - x^2 - y^2$ که بالای صفحه $z = 5$ قرار دارد. پاسخ

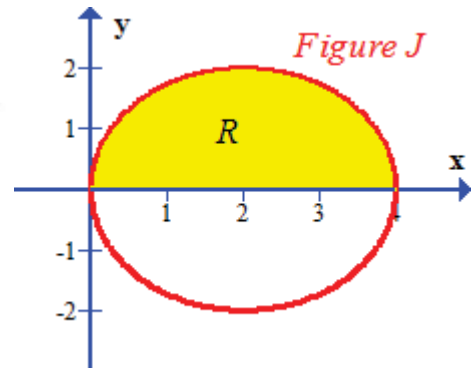
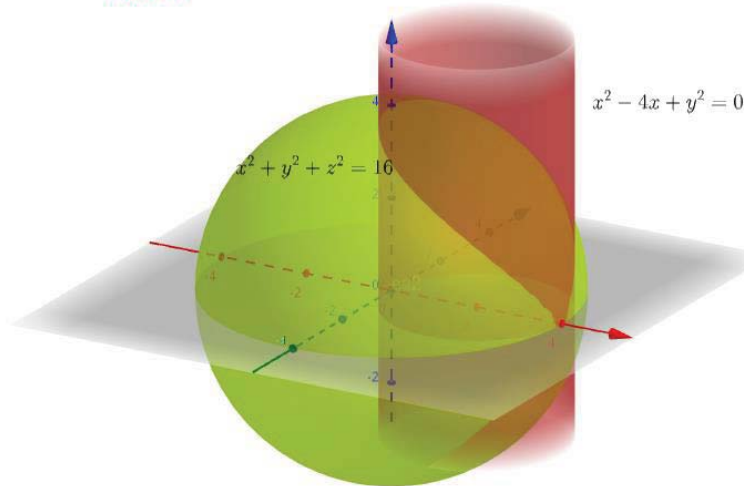


فرض می‌کنیم $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ باشد. تصویر G پس $f_x(x, y) = -2x$ و $f_y = -2y$ است. پارابولوئید $z = 9 - x^2 - y^2$ صفحه $z = 5$ را بالای دایره $5 = 9 - x^2 - y^2$ یا $x^2 + y^2 = 4$ قطع می‌کند. پس آن قسمت از پارابولوئید بالای صفحه $z = 5$ ، بالای ناحیه‌ای در صفحه xy محدود به دایره $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد. لذا داریم.

$$\begin{aligned}
 & \int_R \int \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \bigg|_0^2 \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) \, d\theta = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 1)
 \end{aligned}$$

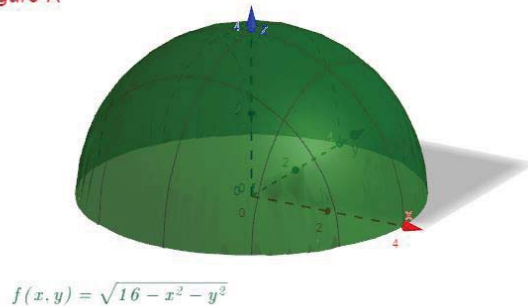
۳- ان قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ که داخل استوانه $x^2 - 4x + y^2 = 0$ قرار دارد. پاسخ

Figure I



سطح جانبی آن قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ که داخل استوانه است چهار برابر سطح جانبی آن قسمت است که در هشتک اول قرار دارد. تصویر I.

Figure K



اگر $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ باشد، تصویر K، پس آن قسمت از کره نمودار f است روی ناحیه R در ربع اول صفحه xy محدود بین محور x و دایره $x^2 - 4x + y^2 = 0$. تصویر J. معادله قطبی این دایره می شود $r = 4 \cos \theta$. پس سطح جانبی نمودار f روی R مطابق زیر بدست می آید.

$$S = \int_R \int \sqrt{\frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2} + 1} dA$$

$$= \int_R \int \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 16 - x^2 - y^2}{16 - x^2 - y^2}} dA = \int_R \int \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA$$

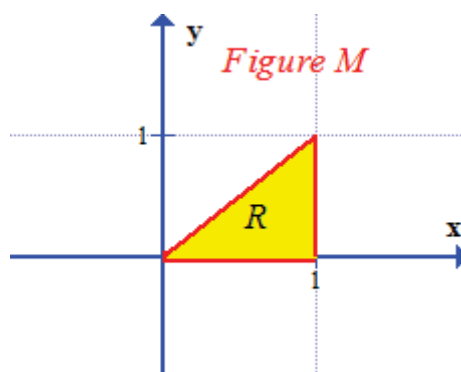
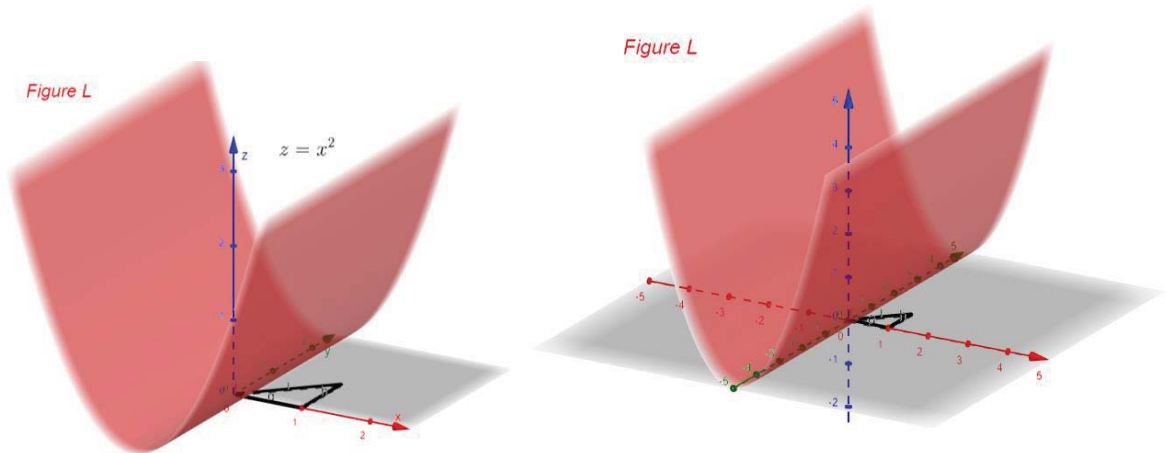
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{16 \cos \theta}} \frac{4r}{\sqrt{16 - r^2}} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\sqrt{16 - r^2} \Big|_0^{\sqrt{16 \cos \theta}} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16(1 - \sin \theta) d\theta = 16(\theta + \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi - 16
 \end{aligned}$$

و در نهایت سطح جانبی تمام قسمت کره که داخل استوانه است، عبارت است از
 $4(8\pi - 16) = 32(\pi - 2)$

۴ - آن قسمت از ورقه سهمی شکل $z = x^2$ که مستقیماً بالای مثلث با رئوس $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ قرار دارد.

پاسخ

تصاویر L



فرض می کنیم $f(x,y) = x^2$ باشد. پس $f_x(x,y) = 2x$ و $f_y(x,y) = 0$ است. ناحیه R که محدود شده بوسیله مثلث داده شده در صورت مساله، در صفحه xy محصور است بین خطوط $y = 0$, $x = 1$ و $y = x$ تصویر M پس داریم.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{4x^2 + 0^2 + 1} \, dA \\
 \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 1} \, dy \, dx &= \int_0^1 y \sqrt{4x^2 + 1} \Big|_0^x \, dx \\
 &= \int_0^1 x \sqrt{4x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{12} (4x^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)
 \end{aligned}$$

۶.۴ - انتگرال های سه گانه Triple Integrals

همان طور که انتگرال های ساده برای تابع های یک متغیره و انتگرال های دو گانه برای تابع های دو متغیره بکار می بردیم ، انتگرال های سه گانه برای تابع های سه متغیره بکار می بریم.

در بخش های قبل ، انتگرال دوگانه یک تابع دو متغیره روی یک ناحیه مستطیلی در صفحه xy بحث کردیم. در این بخش انتگرال سه گانه یک تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ روی یک مکعب مستطیل در فضا ، یعنی $\mathbb{R}^3$ تعریف می کنیم. سپس ، در همین بخش ، انتگرال سه گانه را روی ناحیه های کلی در $\mathbb{R}^3$ تعریف می کنیم.

تابع های سه متغیره انتگرال پذیر Integrable Functions of Three Variables

می توانیم یک مکعب مستطیلی B در $\mathbb{R}^3$ مطابق زیر تعریف کنیم.

$$B = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

بازه $[a, b]$ را به l بازه فرعی $[x_{i-1}, x_i]$ هر یک با طول مساوی Δx تقسیم می کنیم.

$$\Delta x = \frac{x_i - x_{i-1}}{l}$$

بازه $[c, d]$ را به m بازه فرعی مساوی $[y_{j-1}, y_j]$ هر یک بطول Δy تقسیم می کنیم.

$$\Delta y = \frac{y_j - y_{j-1}}{m}$$

بازه $[e, f]$ را به n بازه فرعی مساوی $[z_{k-1}, z_k]$ هر یک بطول Δz تقسیم می کنیم.

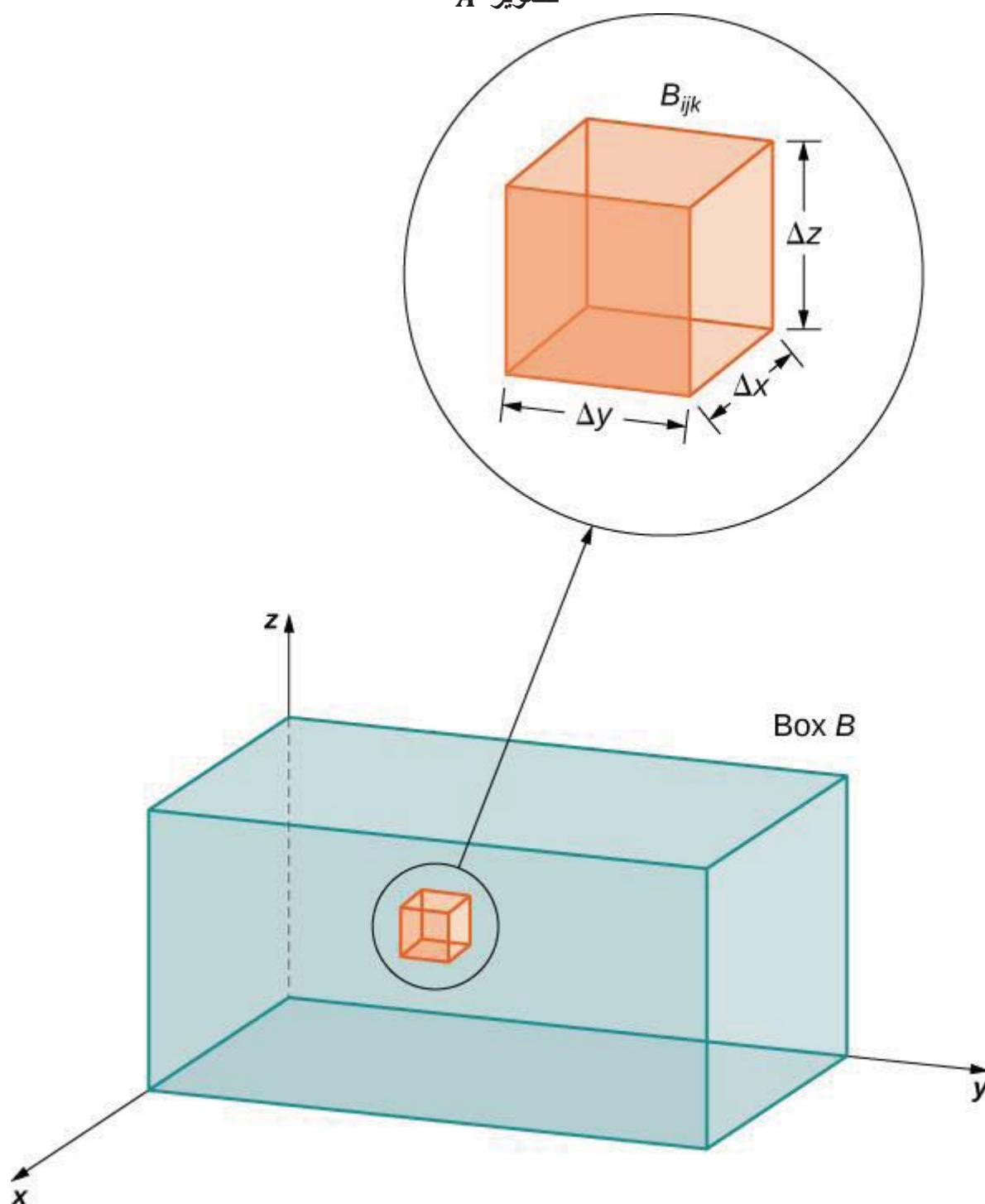
$$\Delta z = \frac{z_k - z_{k-1}}{n}$$

پس مکعب مستطیلی B به lmn مکعب فرعی تقسیم شده است.

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

تصویر A

تصویر A



در این تصویر یک مکعب مستطیل در $\mathbb{R}^3$ به جعبه های فرعی، موازی صفحات مختصات تقسیم کرده ایم

برای هر i, j, k یک نقطه نمونه $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ در هر مکعب فرعی B_{ijk} در نظر بگیرید. می بینیم که حجم آن $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ است. از جمع سه گانه ریمان زیر

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z$$

همان طور که در انتگرال دو گانه عمل کردیم، انتگرال سه گانه را بر حسب حد جمع سه گانه ریمان تعریف می کنیم.

تعریف: انتگرال سه گانه Definition: The Triple Integral

انتگرال سه گانه یک تابع $f(x, y, z)$ روی یک مکعب مستطیلی B مطابق زیر تعریف می شود.

$$\lim_{l,m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_B f(x, y, z) dV$$

اگر حد بالا وجود داشته باشد.

حرف B حرف اول کلمه Box است. چون روی یک جعبه مستطیلی کار می کنیم. در کتب مختلف ممکن است برای این ناحیه سه بعدی، حروف دیگری هم بکار برده شود.

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_D f(x, y, z) dV$$

اگر انتگرال سه گانه روی B وجود داشته باشد، می گوییم $f(x, y, z)$ روی B انتگرال پذیر است. همچنین، انتگرال سه گانه وجود دارد، اگر $f(x, y, z)$ در B پیوسته باشد. لذا، از تابع های پیوسته استفاده می کنیم. باید دانست پیوسته بودن کافی است اما لازم نیست.

قضیه فوبینی برای انتگرال های سه گانه Fubini's Theorem for Triple Integrals

اگر $f(x, y, z)$ روی یک مکعب مستطیلی $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ پیوسته باشد، پس

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

اگر a, b, c, d, e, f اعداد حقیقی باشند، انتگرال مکرر سه گانه را می توان به شش صورت مختلف بیان کرد.

$$\begin{aligned} \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \end{aligned}$$

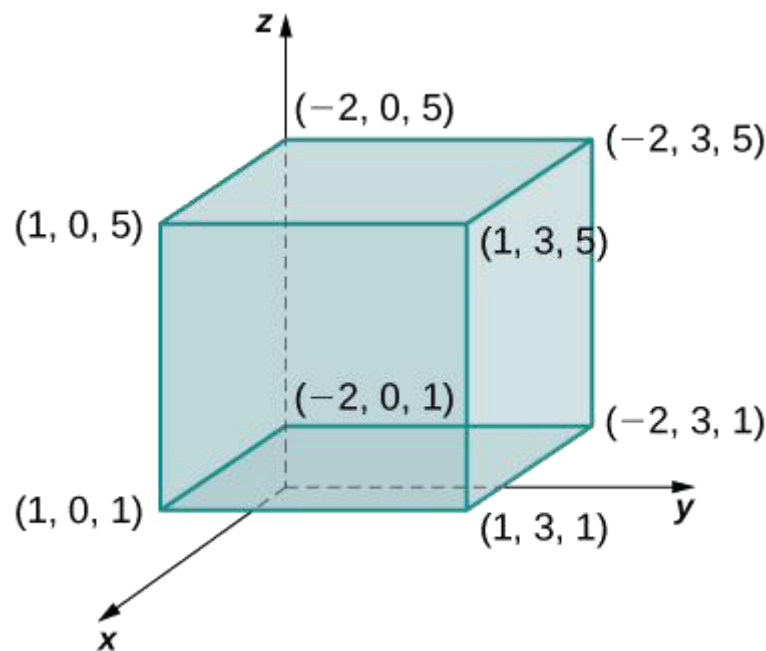
$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx$$

به همین ترتیب ، می توان انتگرال ها را جابجا کرد و سه سه نوع دیگر انتگرال مکرر بدست آورد.

مثال ۱ - انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_B x^2 yz \, dV$$

اگر $B = \{(x,y,z) | -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 5\}$ باشد ، مطابق تصویر B تصویر B



$$\iiint_B x^2 yz \, dV$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 \int_1^5 \int_{-2}^1 (x^2 yz) \, dx \, dz \, dy = \int_0^3 \int_1^5 \left[\frac{x^3}{3} yz \right]_{-2}^1 dz \, dy \\ &= \int_0^3 \int_1^5 3yz \, dz \, dy = \int_0^3 \left[3y \frac{z^2}{2} \right]_1^5 dy \\ &= \int_0^3 36y \, dy = 36 \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 = 18(9 - 0) = 162 \end{aligned}$$

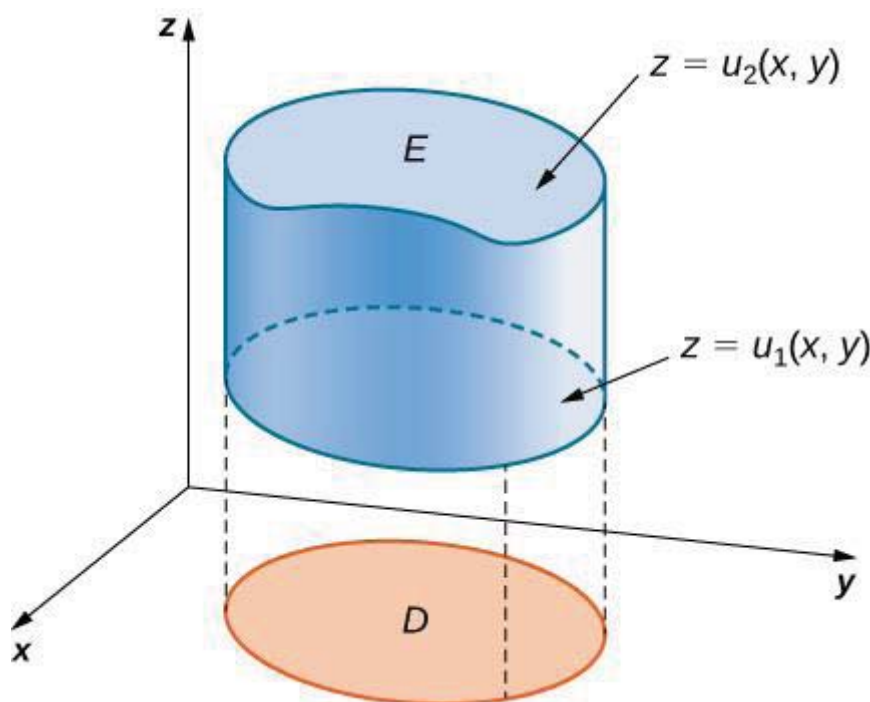
انتگرال های سه گانه روی یک ناحیه کران دار کلی

Triple Integrals over a General Bounded Region

حالا تعریف انتگرال سه گانه را روی یک ناحیه کران دار کلی تر E در $\mathbb{R}^3$ بسط می دهیم. این ناحیه های کراندار کلی ، سه نوع هستند. ابتدا ، فرض می کنیم ناحیه کراندار D ، تصویر E روی صفحه xy است. و فرض می کنیم E در $\mathbb{R}^3$ شکل زیر را دارا است.

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

بطوری که $u_1(x, y) \leq u_2(x, y)$ باشد برای تمام (x, y) ها در D ، تصویر C

تصویر C 

انتگرال سه گانه روی یک ناحیه کلی Triple Integral over a General region

انتگرال سه گانه یک تابع پیوسته $f(x, y, z)$ روی یک ناحیه سه بعدی کلی

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

در $\mathbb{R}^3$ بطوری که D تصویر E در صفحه xy باشد ، مطابق زیر است.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

به همین طریق ، برای یک ناحیه کراندار کلی D در صفحه xy و دو تابع $y = u_1(x, z)$ و $y = u_2(x, z)$ بطوری که $u_1(x, z) \leq u_2(x, z)$ باشد برای تمام (x, z) ها در D ،

پس می توان یک ناحیه سه بعدی E در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر توصیف کرد

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

بطوری که D تصویر E در صفحه xy باشد. انتگرال سه گانه به صورت زیر است.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

و در نهایت، برای یک ناحیه کراندار عمومی D در صفحه xy و دو تابع $x = u_1(y, z)$ و $x = u_2(y, z)$ بطوری که $u_1(y, z) \leq u_2(y, z)$ باشد برای تمام (y, z) ها در D ،

پس می توان یک ناحیه سه بعدی E در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر توصیف کرد

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

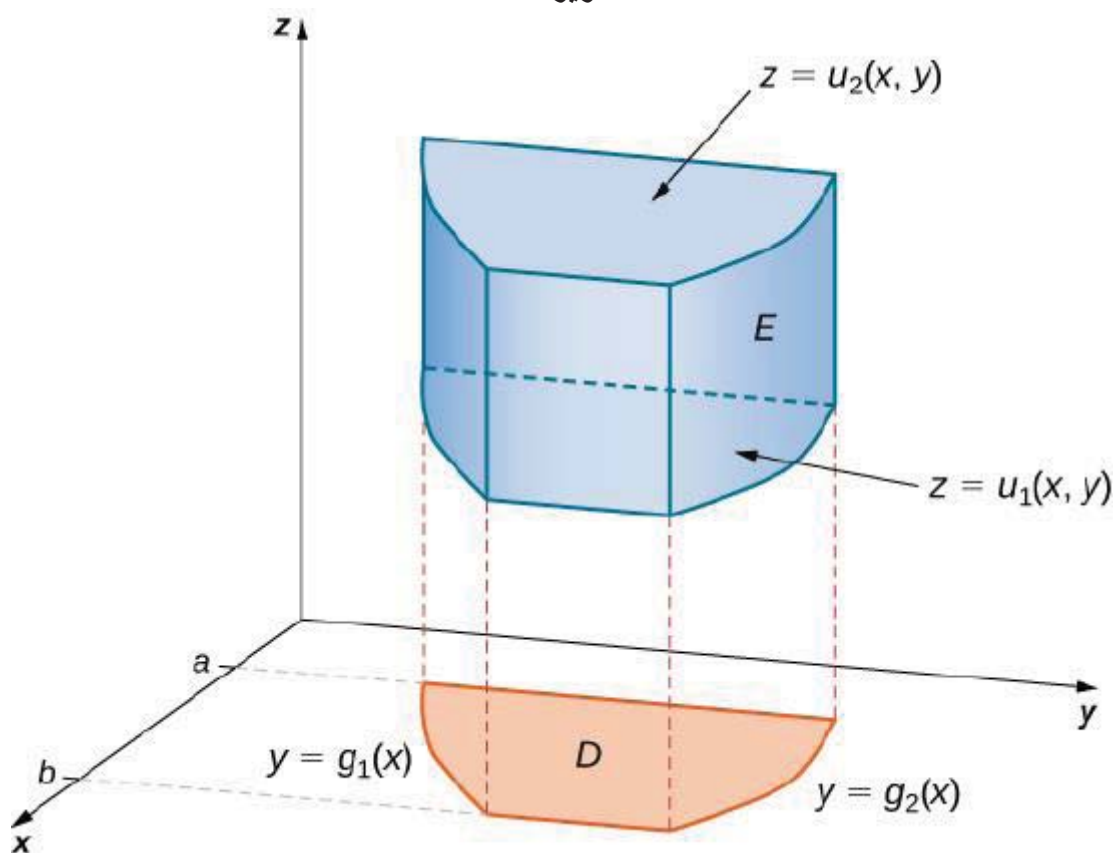
بطوری که D تصویر E در صفحه xy باشد. انتگرال سه گانه به صورت زیر است.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

توجه داشته باشید که ناحیه D در هر صفحه ای می تواند از نوع اول و یا دوم باشد. اگر D در صفحه xy از نوع اول باشد، تصویر D ، پس

$$E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

تصویر D



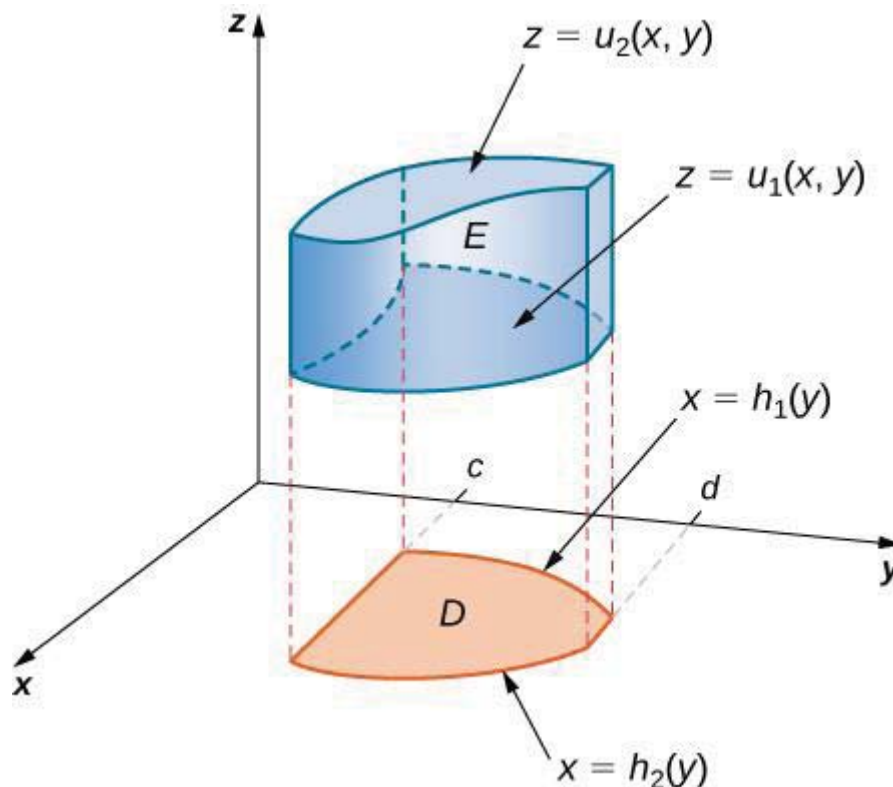
پس انتگرال به صورت فرمول شماره (۱) زیر است.

$$\iiint_E f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

اگر D در xy از نوع دوم باشد، تصویر E ، پس

$$E = \{(x,y,z) | c \leq x \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

تصویر E



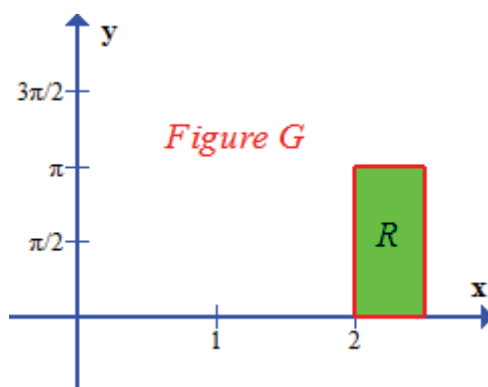
پس انتگرال به صورت فرمول شماره (۲) زیر است.

$$\iiint_E f(x,y,z) dV = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} \int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy$$

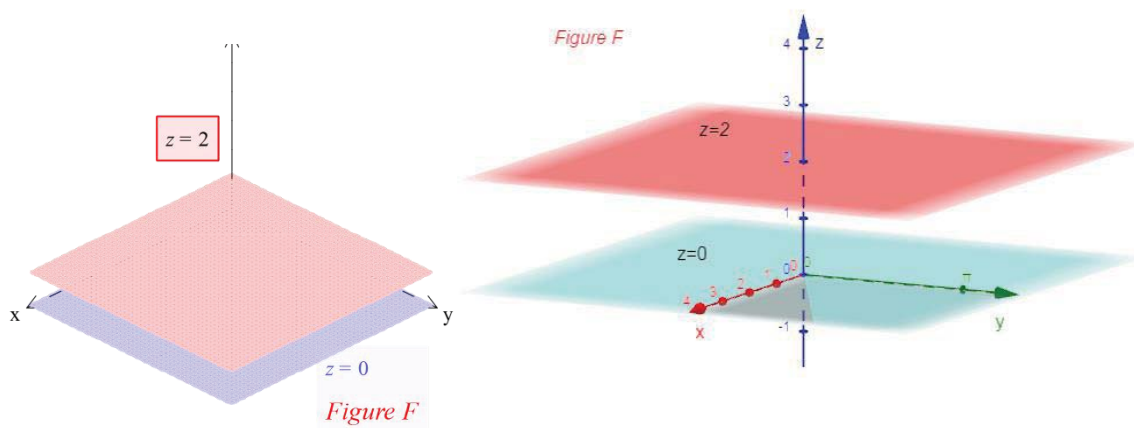
مثال ۲ - فرض کنید R یک ناحیه مستطیلی در صفحه xy محدود به خطوط زیر باشد.

$$x = 2, x = \frac{5}{2}, y = 0 \text{ و } y = \pi$$

تصویر G



و فرض کنید D متوازی السطوح بین نمودار های $z = 0$ و $z = 2$ در R باشد. تصویر F نمایش نمودار های $z = 0$ و $z = 2$ است.



انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_D zx \sin xy \, dV$$

پاسخ

نمودار متوازی السطوح D را در تصویر H ملاحظه می کنید. توجه کنید می خواهیم انتگرال را روی این ناحیه سه بعدی D محاسبه کنیم. در مطالب گفته شده در ابتدای این بخش، ناحیه سه بعدی را B نامیدیم و در مطلب بعدی ناحیه سه بعدی را E نامیدیم. این کار را برای این انجام دادیم تا اگر خوانندگان محترم در کتب مختلف به حروف دیگری برخورد کردند، متحیر نشوند. فقط لازم است بعد ناحیه ها را توجه کنیم. در این مثال R ناحیه دو بعدی است و D ناحیه سه بعدی است.

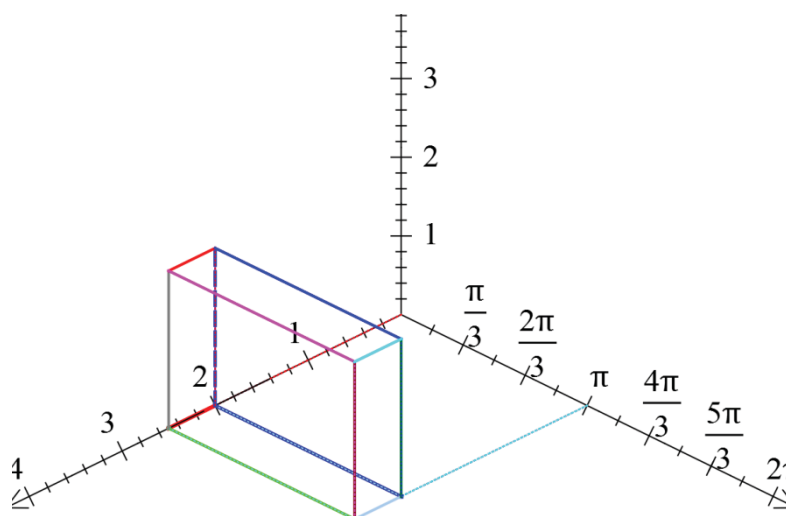


Figure H

پس بر اساس فرمول شماره (۱) داریم.

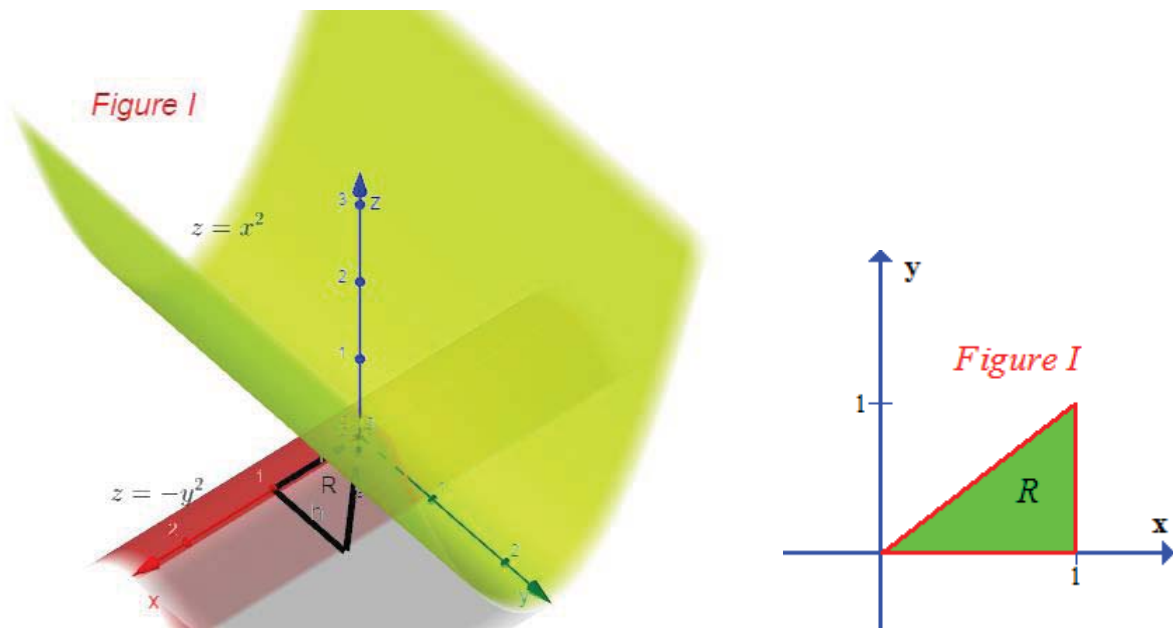
$$\begin{aligned}
 & \iiint_D zx \sin xy \, dV \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \int_0^{\pi} \int_0^1 zx \sin xy \, dz \, dy \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \int_0^{\pi} \left(\frac{z^2}{2} x \sin xy \right) \Big|_0^1 dy \, dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x \sin xy \, dy \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} -\frac{1}{2} \cos xy \Big|_0^{\pi} dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi x \right) dx = \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \\
 &= \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{5\pi}{3} \right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

مثال ۳- فرض کنید R یک ناحیه مثلثی در صفحه xy بین نمودارهای $y = x$ و $y = 0$ برای $0 \leq x \leq 1$ باشد، و فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی بین نمودارهای رویه های زیر باشد.

$z = -y^2$ و $z = x^2$ برای $(x, y) \in R$

تصویرهای I و 0 انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_D (x + I) \, dV$$



پاسخ

$$\begin{aligned}
 & \iiint_D (x+1) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \int_{-y}^{x^2} (x+1) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x+1) z \Big|_{-y}^{x^2} dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x (x+1) (x^2 + y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x (x^3 + x^2 + xy + y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^3 y + x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{40}
 \end{aligned}$$

حجم از طریق انتگرال سه گانه Volume by Triple Integration

فرض می کنیم D یک ناحیه سه بعدی بین نمودار های دو تابع پیوسته F_1 و F_2 روی یک ناحیه R در صفحه xy باشد. پس حجم مطابق زیر تعریف می شود.

$$V = \iiint_D 1 \, dV \quad (1)$$

می توان انتگرال سه گانه بالا را به صورت انتگرال دوگانه روی R باز نویسی کرد.

$$V = \iiint_D 1 \, dV = \iint_R \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} 1 \, dz \right] dA = \iint_R (F_2(x,y) - F_1(x,y)) \, dA$$

حجم یک ناحیه سه بعدی D در صفحه xyz

The Volume of a Solid D in xyz Plane

$$V = \iiint_D dx \, dy \, dz$$

مثال ۴ – فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی در هشتک اول بین نمودار های زیر باشد.

$$z = x^2 + 2y + 1 \quad \text{و} \quad z = y + 2$$

حجم D را پیدا کنید.

تصویر K

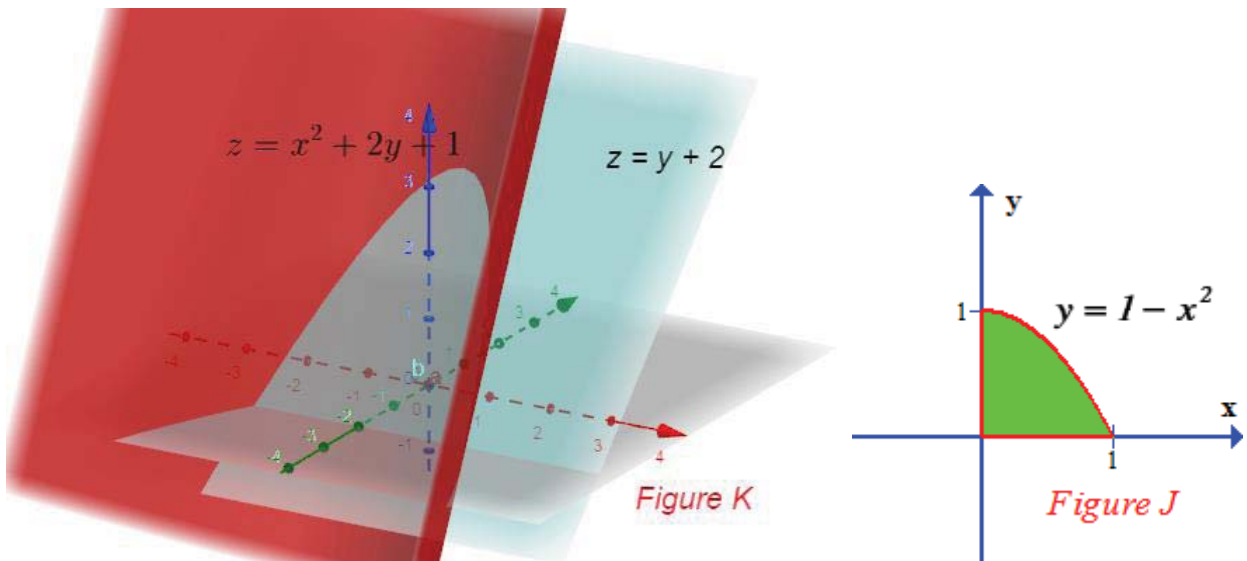
پاسخ

ابتدا باید ناحیه R را مشخص کنیم. رویه های $z = x^2 + 2y + 1$ و $z = y + 2$ در منحنی زیر تلاقی می کنند.

$$x^2 + 2y + 1 = y + 2$$

و یا

$$y = 1 - x^2$$

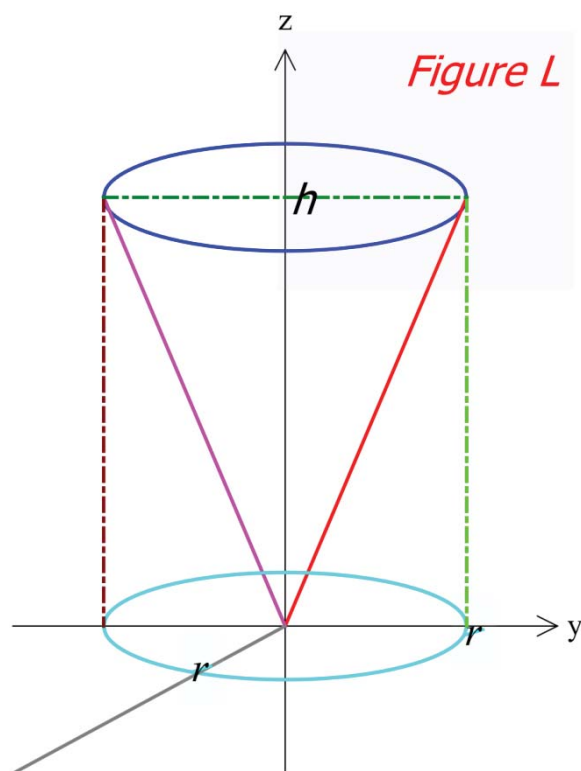


چون D در هشتک اول است، پس R باید در ربع اول باشد. پس R یک ناحیه ساده عمودی است بین نمودارهای $y = 1 - x^2$ و $y = 0$ در بازه $[0, 1]$ تصویر J چون $x^2 + 2y + 1 \leq y + 2$ است برای (x, y) در R ، پس داریم.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D 1 \, dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2+2y+1}^{y+2} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} z \Big|_{x^2+2y+1}^{y+2} dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x^2 - y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[(1 - x^2)y - \frac{1}{2}y^2 \right] \Big|_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 \left[(1 - x^2)^2 - \frac{1}{2}(1 - x^2)^2 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2)^2 \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}
 \end{aligned}$$

مثال ۵ - مطلوب است حجم مخروط به ارتفاع h و شعاع r . تصویر L پاسخ

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dx \, dy \, dz \\
 &= \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_{\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}}^h dz = \frac{\pi r^2 h}{3}
 \end{aligned}$$



جرم و بار الکتریکی Mass and Charge

بر اساس تئوری ملکولی ماده Molecular Theory of Matter هر پاره ای از ماده ، فقط مجموعه ای از ملکول ها است ، و لذا جرم آن مساوی است با مجموع جرم های ملکول های آن. اما ، تعداد ملکول ها بقدری زیاد هستند که حتی با کامپیوتر های مدرن هم نمی توان حاصل این جمع را پیدا کرد. برای محاسبه جرم یک شئی مثلا یک قالب مکعبی یخ و یا یک مفتول فولادی ، فرض می شود که جرم شئی ، فقط در ملکول ها قرار ندارد ، بلکه سر تا سر شئی پراکنده است. اگر فرض کنیم که جرم شئی بطور یکنواخت و مساوی سر تا سر شئی پراکنده است و حجم شئی صفر نیست ، پس جرم مخصوص یا چگالی Mass Density مطابق زیر تعریف می شود.

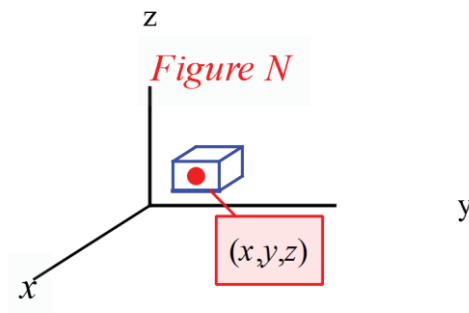
$$\delta = \frac{m}{V}$$

در فرمول بالا δ چگالی ، m جرم ، و V حجم شئی است. فرمول بالا برای هر شئی مانند یک قوطی روغن ، یک قالب مکعبی یخ و یا یک مفتول فولادی بکار می رود.

اما ، یک قالب مکعبی یخ زده آب پرتقال را در نظر بگیرید ، چون بخاطر ته نشین شدن ، قسمت پائینی قالب سنگین تر از قسمت بالا است ، پس در این صورت ، جرم بطور یکسان در شئی پراکنده نیست. پس برای توصیف جرم در قسمت های مختلف قالب مکعبی ، جرم مخصوص یا چگالی در نقطه (x, y, z) مطابق زیر تعریف می شود.

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V\| \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد. Δm جرم و ΔV حجم یک متوازی السطوح در نقطه (x, y, z) و $\|\Delta V\|$ بزرگ ترین بعد Dimension متوازی السطوح است. تصویر N



در فرمول بالا، فرض بر این است که جرم سر تا سر شئی پراکنده است و این که δ در D تعریف شده و پیوسته است. در این صورت جرم کل شئی مطابق زیر است.

$$m = \iiint_D \delta(x, y, z) dV$$

مثال ۶ - یک شئی مکعبی شکل، یک ناحیه سه بعدی D را مطابق تصویر M اشغال کرده است، و دارای چگالی زیر است.

$$\delta(x, y, z) = 1 + xyz, (x, y, z) \in D$$

مطلوب است جرم شئی
پاسخ

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \delta(x, y, z) dV \\ &= \iiint_D (1 + xyz) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 + xyz) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \left(z + \frac{1}{4}xyz^2 \right) \Big|_0^1 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{4}xy \right) dy dx = \int_0^1 \left(y + \frac{1}{8}xy^2 \right) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{8}x \right) dx = \left(x + \frac{1}{16}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

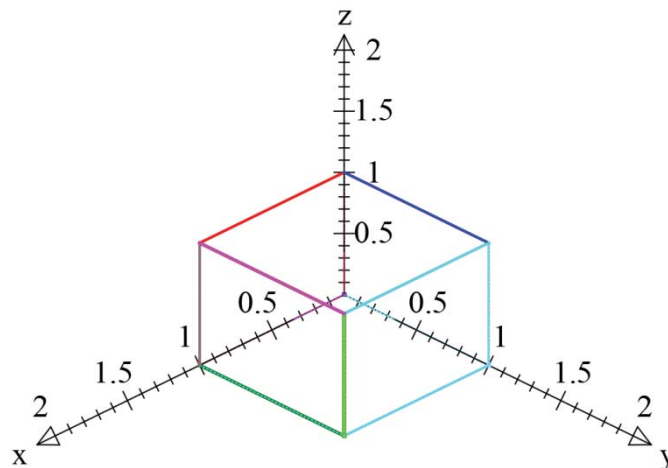


Figure M

اگر یک شئی مانند یک گلوله مسی ، سر تا سر آن ، دارای بار الکتریکی یکسان باشد ، پس چگالی بار الکتریکی **Charge Density** مطابق زیر تعریف می شود.

$$\rho = \frac{q}{V}$$

در فرمول بالا ρ چگالی بار الکتریکی ، q بار الکتریکی شئی و V حجم شئی است. اگر شئی دارای بار الکتریکی یکسان نباشد ، چگالی بار الکتریکی $\rho(x, y, z)$ در هر نقطه (x, y, z) شئی ، مطابق زیر تعریف می شود.

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V\| \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

در صورتی که حد بالا وجود داشته باشد. Δq بار الکتریکی یک متوازی السطوح در نقطه (x, y, z) و ΔV حجم متوازی السطوح و $\|\Delta V\|$ بزرگ ترین بعد متوازی السطوح است. مجموع بار الکتریکی در یک شئی شارژ شده مطابق زیر است.

$$q = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

در فرمول بالا D ناحیه ای است که شئی اشغال می کند.

مثال ۷ - فرض کنید چگالی بار الکتریکی در هر نقطه (x, y, z) توپ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ مساوی است با فاصله (x, y, z) تا صفحه xy . مطلوب است مجموع بار الکتریکی در توپ. پاسخ

فرض می کنیم D توپ باشد. می دانیم که $\rho(x, y, z) = |z|$, پس داریم.

$$q = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} |z| \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} z |z| \left| \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{-\sqrt{1-x^2-y^2}} \right| dy \, dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^1 \left((1-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{-\sqrt{1-x^2}} \right| dx \\
&= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \, d\theta \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \cos \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \theta \right) \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

تمرینات ۶.۴

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

- ۱) $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_1^2 (y - xz) \, dz \, dy \, dx$
- ۲) $\int_{-1}^1 \int_0^x \int_{x-y}^{x+y} (z - 2x - y) \, dz \, dy \, dx$
- ۳) $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 \int_0^y (z^2 + 1) e^{(y^2)} \, dx \, dz \, dy$
- ۴) $\int_{-1/2}^{1/2} \int_1^e \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} z (\ln x)^2 \, dz \, dx \, dy$
- ۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin z} x^2 \sin y \, dx \, dy \, dz$

$$۶) \int_2^3 \int_{-1}^4 \int_1^0 (x^2 y - z^2) dz dy dx$$

در تمرینات زیر انتگرال ها را محاسبه کنید.

$$۷) \iiint_D e^y dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی محصور توسط صفحات $y = 1$ و $z = 0$ و $y = x$ و $y = -x$ باشد.

$$۸) \iiint_D y e^{xy} dV$$

در صورتی که D مکعبی است محصور توسط صفحات $x = 1$ و $x = 3$ و $y = 0$ و $y = 2$ و $z = 0$ و $z = -2$

$$۹) \iiint_D zy dV$$

در صورتی که D یک ناحیه سه بعدی باشد در هشتک اول محصور از بالا به صفحه $z = 1$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$۱۰) \iiint_D z dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی است محصور از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و از پایین توسط صفحه $z = 0$ و از طرفین توسط صفحات $x = -1$ و $x = 1$ و $y = -1$ و $y = 1$

$$۱۱) \iiint_D 3xy dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی باشد محصور از پایین توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا توسط استوانه $x^2 + y^2 = 1$

$$۱۲) \iiint_E 6z^2 dV$$

در صورتی که E یک ناحیه سه بعدی زیر $4x + y + 2z = 10$ در هشتک اول باشد.

در تمرینات زیر، حجم ناحیه سه بعدی را پیدا کنید.

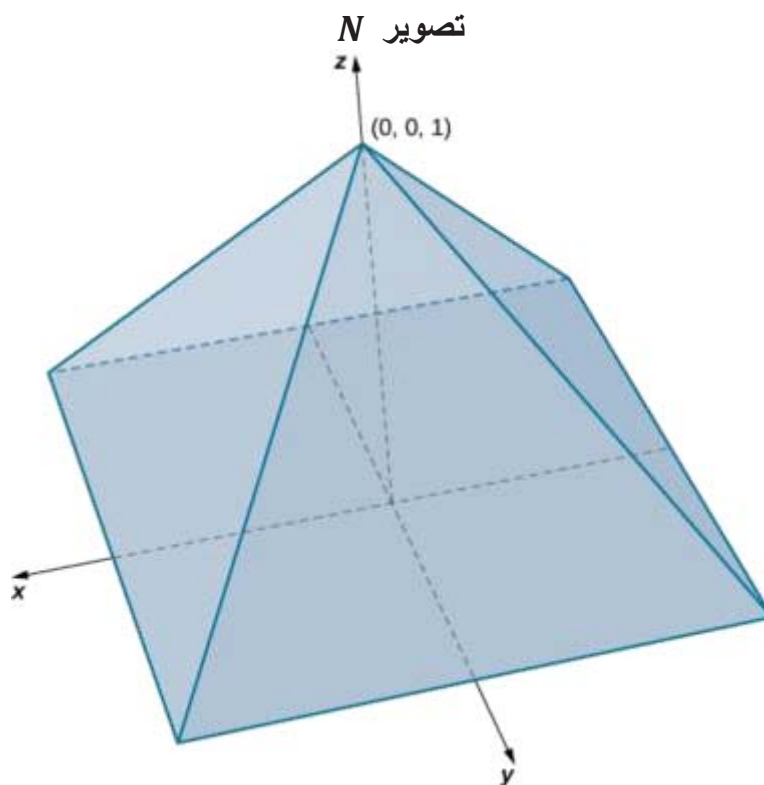
۱۳ - ناحیه سه بعدی در هشتک اول و محصور است توسط صفحات

$$z = 10 + x + y, y = 2 - x, y = x, z = 0 \text{ و } x = 0$$

۱۴ - ناحیه سه بعدی از بالا محدود است به پارابولوئید مدور $z = 4(x^2 + y^2)$ و از پایین به صفحه

$$z = -2 \text{ و از اطراف به ورقه سهمی وار } y = x^2 \text{ و صفحه } y = x$$

۱۵ - حجم یک هرم قائم که قاعده مربعی آن در صفحه xy با اضلاع $[-1, 1] \times [-1, 1]$ و راس آن در نقطه $(0, 0, 1)$ قرار دارد پیدا کنید. تصویر N



۱۶ - مطلوب است حجم کره $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

همان طور که در تمرینات ۱۰ - ۶ ملاحظه کردید، ناحیه سه بعدی را D نامیدیم، اما در تمرین ۱۵ ناحیه سه بعدی را E می نامیم. در همین بخش هم گفتیم در کتب مختلف ناحیه های سه بعدی و دو بعدی به نام های مختلف نامیده می شوند. ما هم این ناحیه ها را با نام های مختلف آورده ایم تا خوانندگان محترم به این موضوع واقف شوند.

۱۷ - اگر E یک ناحیه سه بعدی محصور توسط $y = 2x^2 + 2z^2$ و صفحه $y = 8$ باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV$$

پاسخ تمرینات ۶.۴

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_2^4 (y - xz) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^3 \int_{-1}^1 \left(yz - \frac{xz^2}{2} \right) \Big|_2^4 \, dy \, dx \\
 &= \int_0^3 \int_{-1}^1 (2y - \frac{1}{2}x) \, dy \, dx = \int_0^3 (y^2 - \frac{1}{2}xy) \Big|_{-1}^1 \, dx \\
 &= \int_0^3 (-\frac{1}{2}x) \, dx = -\frac{1}{4}x^2 \Big|_0^3 = -\frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad \int_{-1}^1 \int_0^x \int_{x-y}^{x+y} (z - 2x - y) \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^x \left(\frac{z^2}{2} - 2xz - yz \right) \Big|_{x-y}^{x+y} \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^x \left[\frac{(x+y)^2}{2} - 2x(x+y) - y(x+y) - \frac{(x-y)^2}{2} + 2x(x-y) + y(x-y) \right] \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^x (-2xy - 2y^2) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left(-xy^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_0^x \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 -\frac{2}{3}x^3 \, dx = -\frac{2}{12}x^4 \Big|_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \quad \int_0^{\ln 3} \int_0^1 \int_0^y (z^2 + 1) e^{(y^2)} \, dx \, dz \, dy &= \int_0^{\ln 3} \int_0^1 (z^2 + 1) e^{(y^2)} x \Big|_0^y \, dz \, dy \\
 &= \int_0^{\ln 3} \int_0^1 (z^2 + 1) y e^{(y^2)} \, dz \, dy = \int_0^{\ln 3} \left[\left(\frac{z^3}{3} + z \right) y e^{(y^2)} \right] \Big|_0^1 \, dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\ln 3} y e^{(y^2)} \, dy = \frac{2}{3} e^{(y^2)} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{2}{3} e^{(\ln 3)^2} - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$۴) \quad \int_{-1/2}^{1/2} \int_1^e \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} z (\ln x)^2 \, dz \, dx \, dy = \int_{-1/2}^{1/2} \int_1^e \frac{z^2}{2} (\ln x)^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 \int_1^e \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 dx dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{6} (\ln x)^2 \Big|_1^e dy \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{6} dy = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۵) \quad &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin z} x^2 \sin y dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3}{3} \sin y \Big|_0^{\sin z} dy dz \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin^3 z \sin y dy dz = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 z \cos y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z dz = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin z (1 - \cos^2 z) dz \\
 &= \frac{1}{3} \left(-\cos z + \frac{1}{3} \cos^3 z \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۶) \quad &\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \int_1^0 x^2 y - z^2 dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left(x^2 yz - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_1^0 dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} - x^2 y \right) dy dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{6} y - x^2 y^2 \right) \Big|_{-1}^1 dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{6} - x^2 \right) dx = \left(\frac{5}{6} x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^2 = -\frac{7}{6}
 \end{aligned}$$

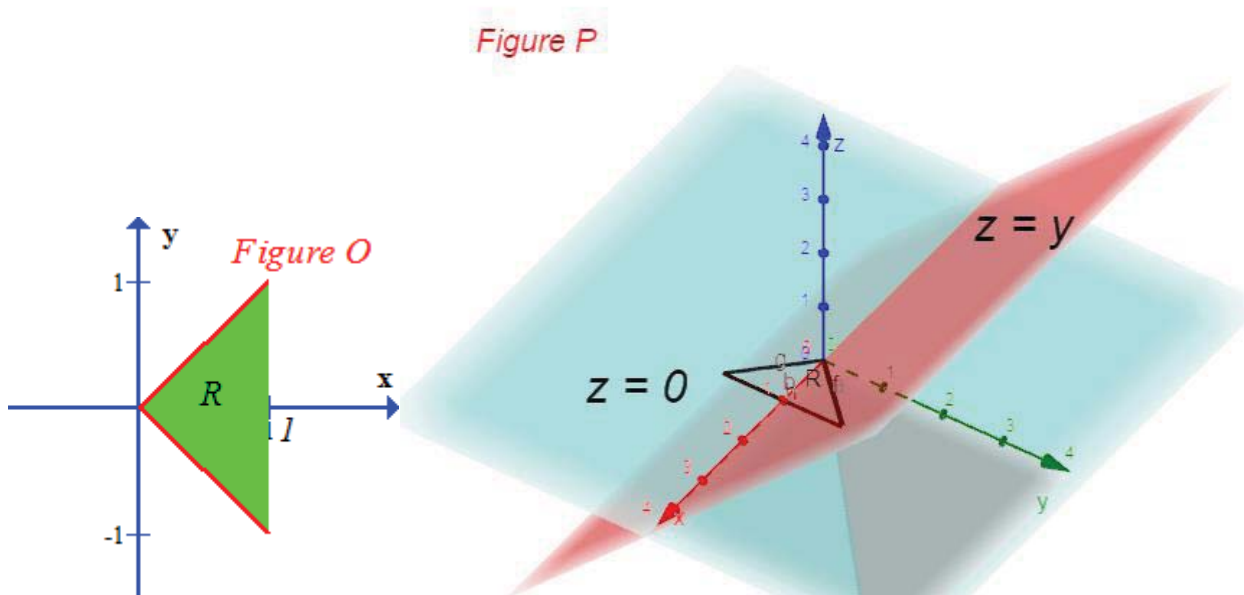
در تمرینات زیر انتگرال ها را محاسبه کنید.

$$۷) \quad \iiint_D e^y dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی محصور توسط صفحات $y = 1$ و $z = 0$ و $y = x$ و $y = -x$ باشد.

پاسخ

ناحیه R در صفحه xy ساده افقی است بین نمودارهای $x = y$ و $x = -y$ در $[0, 1]$ تصویر O و D ناحیه سه بعدی است بین نمودارهای $z = y$ و $z = 0$ روی R . تصویر P



پس داریم.

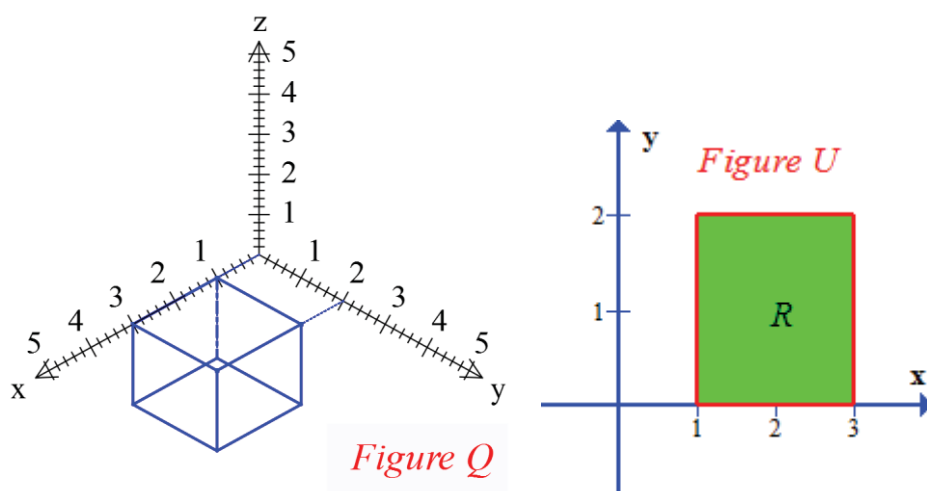
$$\begin{aligned}
 & \iiint_D e^y \, dV \\
 &= \int_0^1 \int_{-y}^y \int_0^y e^y \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-y}^y z e^y \Big|_0^y \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \int_{-y}^y y e^y \, dx \, dy = \int_0^1 x y e^y \Big|_{-y}^y \, dy \\
 &= \int_0^1 2 y^2 e^y \, dy \stackrel{\text{جزء به جزء}}{=} 2 y^2 e^y \Big|_0^1 - \int_0^1 4 y e^y \, dy \\
 &= 2e - \left(4 y e^y \Big|_0^1 \right) + 4 \int_0^1 e^y \, dy = 2e - 4e + \left(4 e^y \Big|_0^1 \right) = 2e - 4
 \end{aligned}$$

$$۸) \iiint_D y e^{xy} \, dV$$

در صورتی که D مکعبی است محصور توسط صفحات $x = 1$ و $x = 3$ و $y = 0$ و $y = 2$ و $z = 0$ و $z = -2$

پاسخ

مکعب D را در تصویر Q و ناحیه R را در تصویر U ملاحظه می کنید.
 ناحیه R در صفحه xy ساده افقی است بین نمودارهای $y = 0$ و $y = 2$ در $[1, 3]$ و ناحیه سه بعدی بین نمودارهای $z = 0$ و $z = -2$ روی R است. پس داریم.



$$\begin{aligned}
 & \iiint_D y e^{xy} dV \\
 &= \int_0^2 \int_1^3 \int_{-2}^0 y e^{xy} dz dx dy = \int_0^2 \int_1^3 zy e^{xy} \Big|_{-2}^0 dx dy \\
 &= 2 \int_0^2 \int_1^3 y e^{xy} dx dy = 2 \int_0^2 e^{xy} \Big|_1^3 dy = 2 \int_0^2 (e^{3y} - e^y) dy \\
 &= \left(\frac{2}{3} e^{3y} - 2e^y \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} e^6 - 2e^2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

۹) $\iiint_D zy dV$

در صورتی که D یک ناحیه سه بعدی باشد در هشتک اول محصور از بالا به صفحه $z = 1$ و از

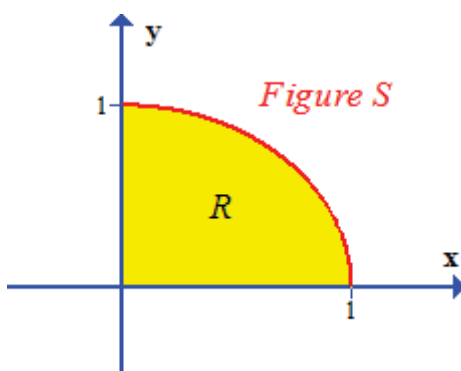
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ پایین به مخروط}$$

پاسخ

ناحیه R در صفحه xy آن قسمت از ناحیه $x^2 + y^2 \leq 1$ که در ربع اول قرار دارد، پس یک ناحیه

ساده عمودی است بین نمودار $y = \sqrt{1 - x^2}$ و محور x در بازه $[0, 1]$; تصویر S

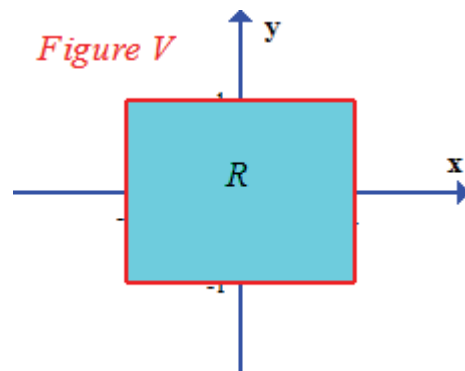
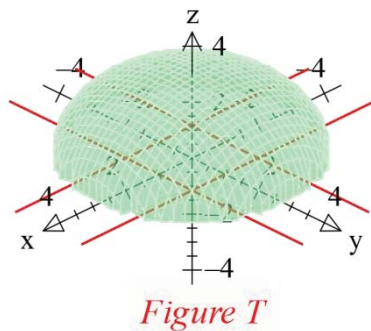
و D ناحیه سه بعدی است بین نمودار های $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = 1$ روی R ، پس داریم



$$\begin{aligned}
 & \iiint_D zy \, dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} zy \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{z^2}{2} y \bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{z^2}{2} y \bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [y - y(x^2 + y^2)] dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - x^2 y - y^3) dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{x^2(1-x^2)}{2} - \frac{(1-x^2)^2}{4} \right) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{80}
 \end{aligned}$$

$$۱۰) \iiint_D z \, dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی است محصور از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و از پایین توسط صفحه $z = 0$ و از طرفین توسط صفحات $x = -1$ و $x = 1$ و $y = -1$ و $y = 1$



پاسخ

ناحیه R در صفحه xy یک مربع است و ساده افقی است بین نمودارهای $y = 1$ و $y = -1$ در بازه $[-1, 1]$; تصویر V

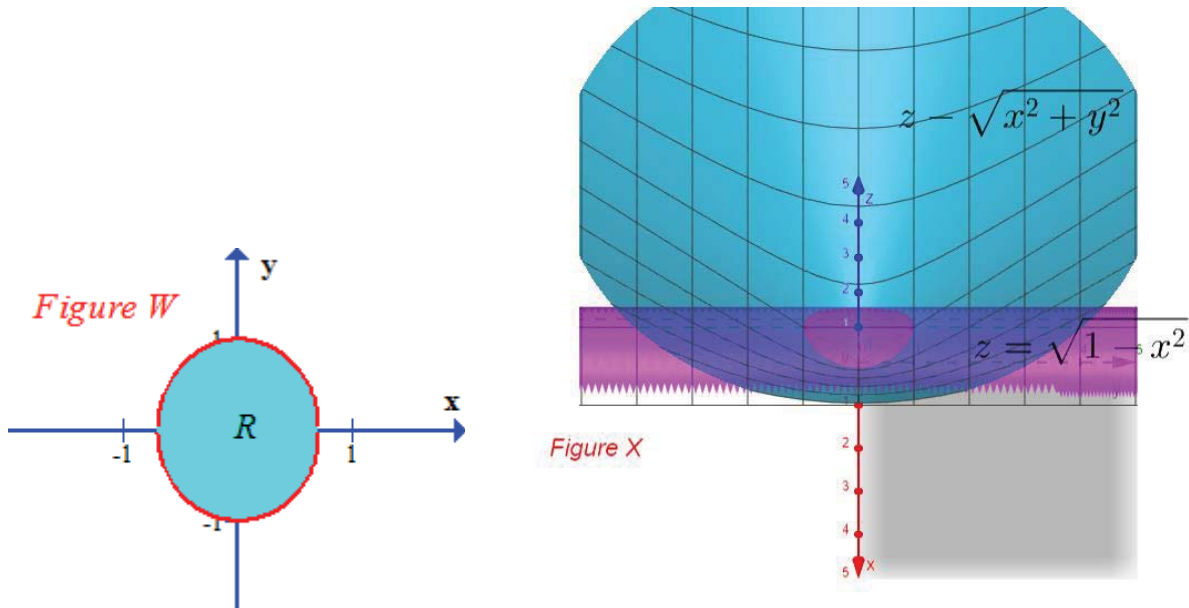
و D یک ناحیه سه بعدی است بین نمودارهای $z = 0$ و $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ روی R ، تصویر T ، پس داریم.

$$\begin{aligned} & \iiint_D z \, dV \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (9 - x^2 - y^2) dy \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(9y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{26}{3} - x^2 \right) dx = \left(\frac{26}{3}x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

$$۱۱) \iiint_D 3xy \, dV$$

در صورتی که D ناحیه سه بعدی باشد محصور از پایین توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا توسط استوانه $x^2 + y^2 = 1$

پاسخ



در هر نقطه (x, y, z) محل تلاقی مخروط و استوانه، رابطه زیر باید برقرار باشد.

$$x^2 + y^2 = z^2 = 1 - x^2$$

$$y^2 = 1 - 2x^2$$

$$\text{پس } y = \sqrt{1 - 2x^2} \text{ و یا } y = -\sqrt{1 - 2x^2} \text{ است برای } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لذا ناحیه R در صفحه xy ناحیه ساده عمودی است بین نمودار های $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ و $y = -\sqrt{1 - 2x^2}$

است. تصویر W و D ناحیه سه بعدی بین نمودار های $y = -\sqrt{1 - 2x^2}$ در $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = \sqrt{1 - x^2}$ روی R است. تصویر X پس داریم.

$$\iiint_D 3xy \, dV$$

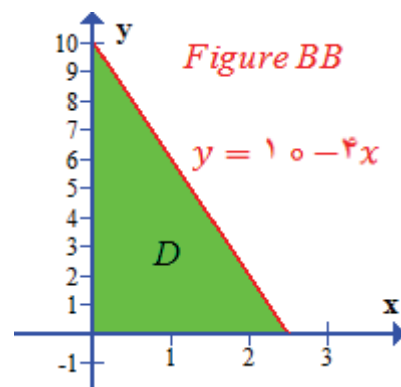
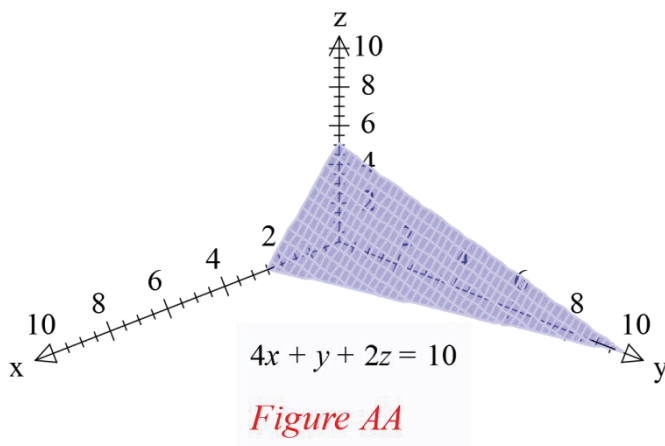
$$\begin{aligned}
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2xy \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} 2xyz \left| \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right| dy \, dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} 2xy \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dy \, dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[\frac{2}{3} xy^2 \sqrt{1-x^2} - x(x^2+y^2)^{3/2} \right] \bigg|_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} 0 \, dx = 0
\end{aligned}$$

$$12 \quad \iiint_E 6z^2 \, dV$$

در صورتی که E یک ناحیه سه بعدی زیر $4x + y + 2z = 10$ در هشتک اول باشد.

پاسخ

در تصویر AA ناحیه E درست زیر صفحه ای است که ملاحظه می کنید. و در هشتک اول قرار دارد. به عبارت دیگر، تصویر AA دقیقاً بالای E قرار دارد. انتهای ناحیه در صفحه xy قرار دارد و دو ضلع دیگر صفحات xz و yz هستند. برای پیدا کردن حد های انتگرال برای z از تصویر ملاحظه می شود که حد پایینی z صفر است. برای پیدا کردن حد بالای z معادله را برای z حل می کنیم. پس خواهیم داشت



$$z = 5 - 2x - \frac{1}{4}y$$

حالا باید ناحیه D را پیدا کنیم. از تصویر AA ملاحظه می کنید که ناحیه D در صفحه xy است. تصویر BB از تصویر AA ملاحظه می کنید که حد پائینی x و y هر دو صفر است. برای پیدا کردن حد بالایی x در معادله داده شده y و z را مساوی صفر قرار می دهیم. پس داریم $x = \frac{5}{2}$ برای پیدا کردن وتر مثلث در تصویر BB در معادله داده شده z را مساوی صفر قرار می دهیم، پس خواهیم داشت $y = 10 - 4x$. حالا می توانیم عملیات انتگرال گیری را انجام دهیم.

$$\begin{aligned} & \iiint_E 6z^2 \, dV \\ &= \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} \int_0^{5-2x-\frac{1}{4}y} 6z^2 \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} \left(2x^3 \right) \Big|_0^{5-2x-\frac{1}{4}y} dy \, dx \\ &= \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} 2 \left(5 - 2x - \frac{1}{4}y \right)^3 dy \, dx \end{aligned}$$

حالا انتگرال را از طریق جانشینی عمل می کنیم.

$$u = 5 - 2x - \frac{1}{4}y$$

پس داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} 2 \left(5 - 2x - \frac{1}{4}y \right)^3 dy \, dx &= \int_0^{\frac{5}{2}} - \left(5 - 2x - \frac{1}{4}y \right) \Big|_0^{10-4x} dx \\ &= \int_0^{\frac{5}{2}} (5 - 2x)^4 dx = -\frac{1}{5} (5 - 2x)^5 \Big|_0^{\frac{5}{2}} = \frac{625}{2} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر حجم ناحیه سه بعدی را پیدا کنید.

۱۳ - ناحیه سه بعدی در هشتک اول و محصور است توسط صفحات

$$z = 10 + x + y, y = 2 - x, y = x, z = 0 \text{ و } x = 0$$

پاسخ

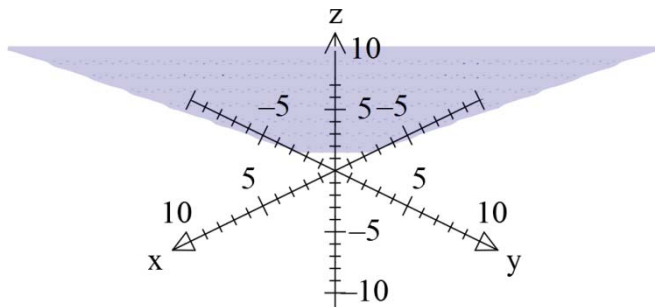
چون نمودارهای $y = x$ و $y = 2 - x$ در (x, y) تلاقی می کنند اگر

$$x = y = 2 - x$$

باشد، پس $x = 1$ است. لذا ناحیه R در صفحه xy یک ناحیه ساده عمودی است بین نمودارهای

$$y = x \text{ و } y = 2 - x \text{ در بازه } [0, 1] \text{ تصویر } y$$

ناحیه D ناحیه سه بعدی بین نمودار های $z = 0$ و $z = 10 + x + y$ است روی R • تصویر z لذا داریم.



$$z = 10 + x + y$$

Figure z

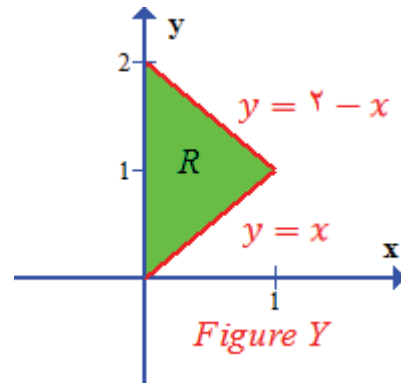


Figure Y

$$V = \iiint_D 1 \, dV$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_x^{2-x} \int_0^{10+x+y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_x^{2-x} z \Big|_0^{10+x+y} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_x^{2-x} (10 + x + y) dy \, dx = \int_0^1 \left(10y + xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[10(2-x) + x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} - 10x - x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx \\ &= \int_0^1 (22 - 20x - 2x^2) dx = \left(22x - 10x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{34}{3} \end{aligned}$$

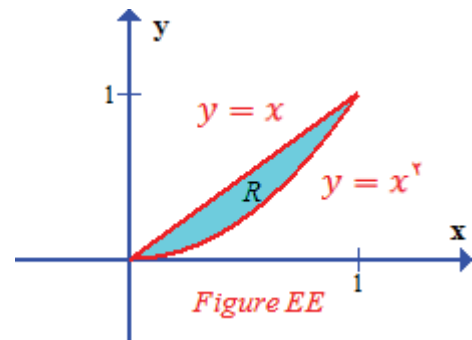
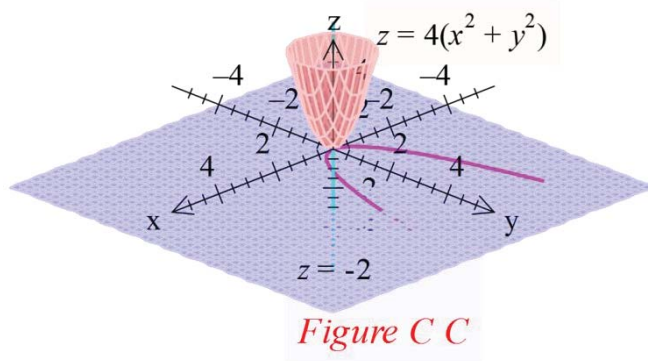
۱۴ - ناحیه سه بعدی از بالا محدود است به پارابولئید مدور $z = 4(x^2 + y^2)$ و از پایین به صفحه $z = -2$ و از اطراف به ورقه سهمی وار $y = x^2$ و صفحه $y = x$ •

پاسخ

نمودار های $y = x^2$ و $y = x$ تلاقی می کنند اگر $x^2 = y = x$ باشد. پس $x = 0$ و یا $x = 1$ است. لذا ناحیه R در صفحه xy یک ناحیه ساده عمودی است بین نمودار های $y = x$ و $y = x^2$ است در بازه $[0, 1]$ تصویر EE •

پس D ناحیه سه بعدی بین نمودار های $z = -2$ و $z = 4(x^2 + y^2)$ است. تصویر CC •

پس داریم.



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D 1 \, dV \\
 &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{-2}^{4(x^2+y^2)} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x \left[z \right]_{-2}^{4(x^2+y^2)} dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (4x^2 + 4y^2 + 2) \, dy \, dx = \int_0^1 \left(4x^2 y + \frac{4}{3} y^3 + 2y \right) \Big|_{x^2}^x dx \\
 &= \int_0^1 \left[4x^2 (x - x^2) + \frac{4}{3} (x^3 - x^6) + 2(x - x^2) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - 4x^4 + \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx \\
 &= \left(\frac{4}{12} x^4 - \frac{4}{5} x^5 + \frac{4}{12} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{10}
 \end{aligned}$$

۱۵ - حجم یک هرم قائم که قاعده مربعی آن در صفحه xy با اضلاع $[-1, 1] \times [-1, 1]$ و راس آن در نقطه $(0, 0, 1)$ قرار دارد پیدا کنید. تصویر N

پاسخ

در این هرم، مقدار z از صفر تا یک تغییر می کند، و در هر ارتفاع z ، برش عرضی هرم برای هر مقدار z ، مربع زیر است.

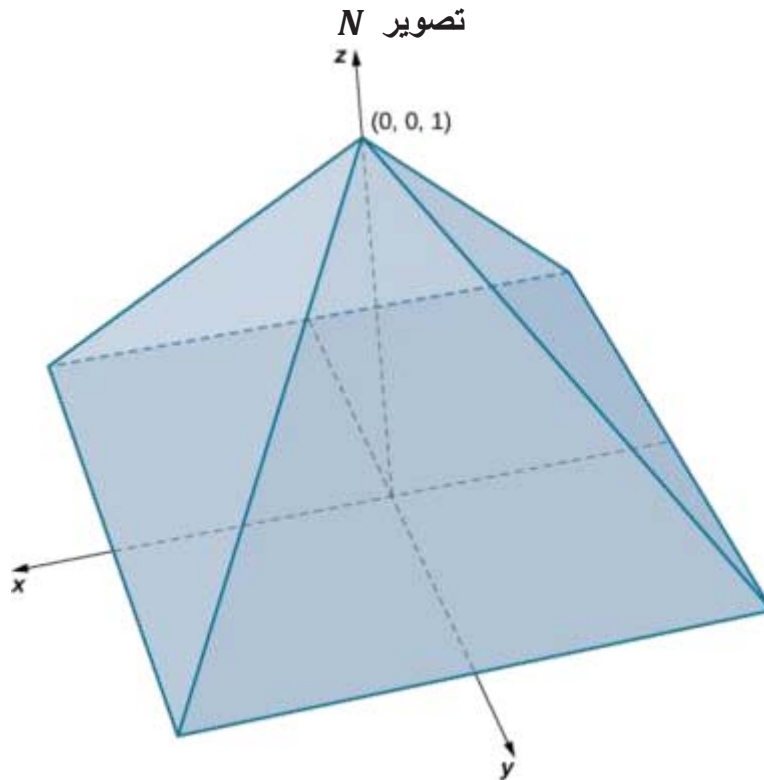
$$[-1 + z, 1 - z] \times [-1 + z, 1 - z]$$

لذا حجم هرم مطابق زیر است.

$$V = \iiint_E 1 \, dV$$

در فرمول بالا

$$E = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1, -1 + z \leq y \leq 1 - z, -1 + z \leq x \leq 1 - z\}$$



پس داریم.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E 1 \, dV \\ &= \int_{z=0}^{z=1} \int_{y=-1+z}^{y=1-z} \int_{x=-1+z}^{x=1-z} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{z=0}^{z=1} \int_{y=-1+z}^{y=1-z} (2 - 2z) \, dy \, dz \\ &= \int_{z=0}^{z=1} (2 - 2z)^2 \, dz = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

۱۶ - مطلوب است حجم کره $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

پاسخ

اگر معادله کره را برای z حل کنیم، داریم.

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

پس تصویر کره روی صفحه xy دایره $x^2 + y^2 = r^2$ است. پس داریم.

$$-r \leq x \leq r$$

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{r^2 - x^2} &\leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \\
 -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} &\leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\
 V &= \iiint_E 1 \, dV \\
 &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \int_{-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dz \, dy \, dx = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dy \, dx \\
 &= \int_{-r}^r \frac{1}{2} \pi (r^2 - x^2) \, dx = \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3
 \end{aligned}$$

همان طور که در تمرینات ۱۰ - ۶ ملاحظه کردید، ناحیه سه بعدی را D نامیدیم، اما در تمرین ۱۵ ناحیه سه بعدی را E می‌نامیم. در همین بخش هم گفتیم در کتب مختلف ناحیه های سه بعدی و دو بعدی به نام های مختلف نامیده می‌شوند. ما هم این ناحیه ها را با نام های مختلف آورده ایم تا خوانندگان محترم به این موضوع واقف شوند.

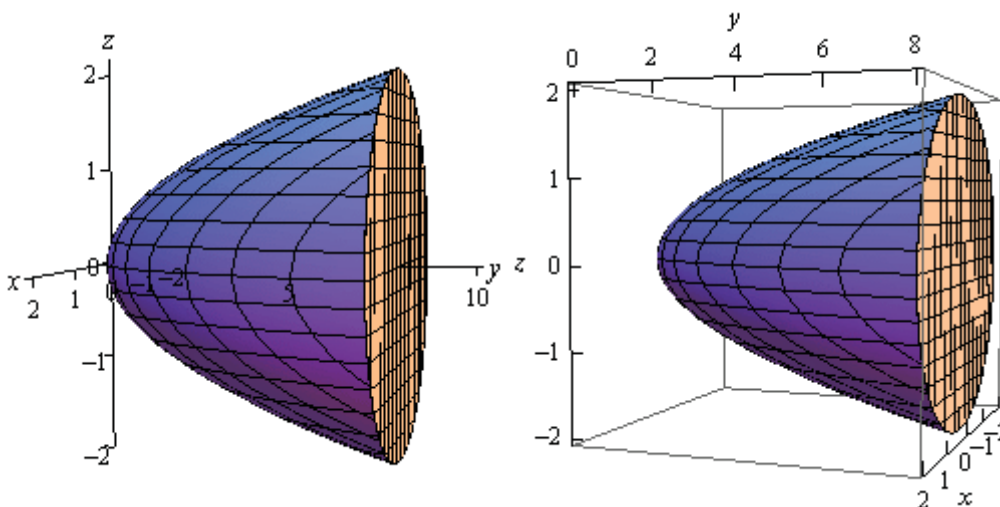
۱۷ - اگر E یک ناحیه سه بعدی محصور توسط $y = 2x^2 + 2z^2$ و صفحه $y = 8$ باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV$$

پاسخ

نمودار ناحیه سه بعدی E را در تصویر FF ملاحظه می‌کنید.

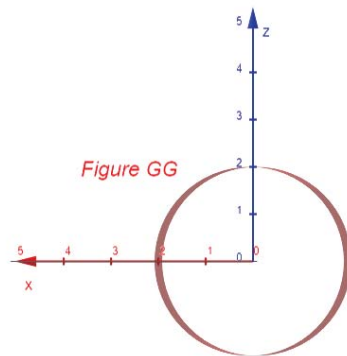
تصویر FF



ناحیه D در صفحه xz را می توان با ایستادن جلو ناحیه سه بعدی پیدا کرد. می بینیم که ناحیه D یک دیسک در صفحه xz است. این دیسک از جلو ناحیه سه بعدی بوجود می آید. برای پیدا کردن معادله این دیسک، معادله پارابولوئید بیضوی را مساوی صفحه قاطع قرار می دهیم، یعنی

$$x^2 + z^2 = 4$$

تصویر GG •



به نظر می رسد که ناحیه D در صفحه xz و همچنین انتگرال بهتر است در مختصات قطبی مورد ارزیابی قرار گیرند. یعنی

$$x = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta$$

چون ناحیه y ندارد، پس z را بجای y بکار می بریم. یعنی

$$x^2 + z^2 = r^2$$

پس داریم .

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 8$$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} dV = \iint_D \left[\int_{2x^2+2z^2}^8 \sqrt{3x^2 + 3z^2} dy \right] dA \\ &= \iint_D \left(y \sqrt{3x^2 + 3z^2} \right) \Big|_{2x^2+2z^2}^8 dA = \iint_D \sqrt{3(x^2 + z^2)} (8 - (2x^2 + 2z^2)) dA \end{aligned}$$

حالا، چون می خواهیم انتگرال دو گانه را در مختصات قطبی انجام دهیم، پس همه را به مختصات قطبی تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{3(x^2 + z^2)} (8 - (2x^2 + 2z^2)) &= \sqrt{3}r (8 - 2r^2) \\ &= \sqrt{3}r (8 - 2r^2) = \sqrt{3} (8r - 2r^3) \end{aligned}$$

پس در نهایت داریم.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV = \iint_D \sqrt{3} (8r - 2r^3) \, dA \\
 &= \sqrt{3} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (8r - 2r^3) \, r \, dr \, d\theta = \sqrt{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{2} r^2 - \frac{2}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta \\
 &= \sqrt{3} \int_0^{\pi} \frac{12 - 3}{2} d\theta = \frac{9\sqrt{3}}{2} \pi
 \end{aligned}$$

۶.۵ - انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای

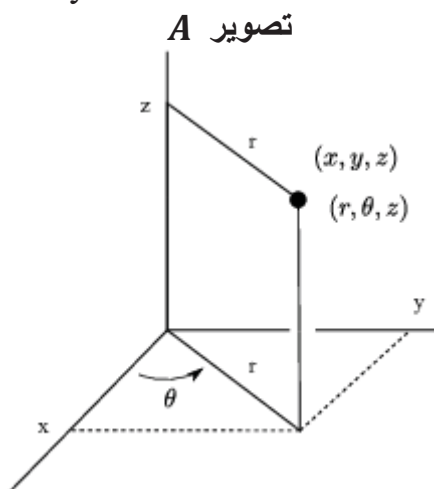
Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

همانطور که محاسبه بعضی از انتگرال های دو گانه در مختصات قطبی آسان تر است ، محاسبه بعضی از انتگرال های سه گانه هم در مختصاتی غیر از مختصات مستطیلی آسان تر است. در این بخش در مورد مختصات استوانه ای بحث می کنیم.

مختصات استوانه ای Cylindrical Coordinates

فرض می کنیم (x, y, z) مختصات مستطیلی یک نقطه P در فضا باشد. اگر (r, θ) یک مجموعه مختصات قطبی نقطه (x, y) باشد ، پس

(r, θ, z) را مختصات استوانه ای Cylindrical Coordinates نقطه P می نامیم. تصویر A



اگر مختصات مستطیلی نقطه $P = (x, y, z)$ داده شده باشد ، با کمک فرمول های زیر ، می توانیم مختصات استوانه ای P را مشخص کنیم.

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ و } \tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

و بر عکس ، اگر مختصات استوانه ای (r, θ, z) یک نقطه P داشته باشیم ، با فرمول های زیر مختصات دکارتی P را می توانیم پیدا کنیم.

$$x = r \cos \theta \text{ و } y = r \sin \theta$$

حالا معادله های استوانه ای و دکارتی چند رویه را در جدول زیر با هم مقایسه می کنیم.

رویه	دکارتی یا مستطیلی	استوانه ای
استوانه	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
کره	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$r^2 + z^2 = a^2$
مخروط مدور مضاعف	$x^2 + y^2 = a^2 z^2$	$r = az$ یا $z = r \cot \theta$
پارابولویید مدور	$x^2 + y^2 = az$	$r^2 = az$

تصویر های B, c, D, E

figure B , Circular Cylinder

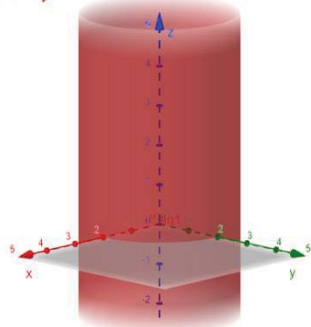


Figure C , Sphere

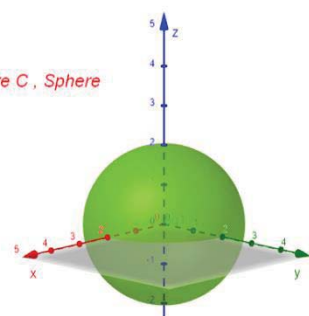


Figure D , Double Cone

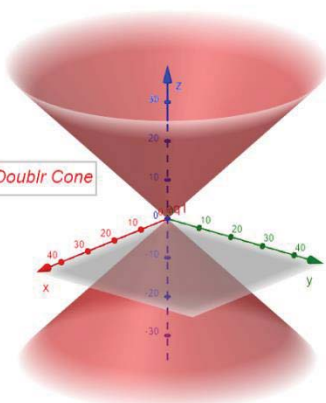
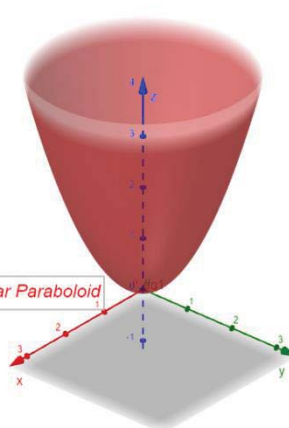


Figure E , Circular Paraboloid



قضیه : انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای

Theorem : Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی بین نمودار های F_1 و F_2 روی R باشد. و R یک ناحیه مسطح

بین نمودار های قطبی h_1 و h_2 در $[\alpha, \beta]$ باشد و $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ و $0 \leq h_1(\theta) \leq h_2(\theta)$

باشد برای $\alpha \leq \theta \leq \beta$ اگر f در D پیوسته باشد ، پس

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x,y,z) dV \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{F_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{F_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta \end{aligned}$$

انتگرال گیری بوسیله مختصات استوانه ای مخصوصا سریع و موثر است ،

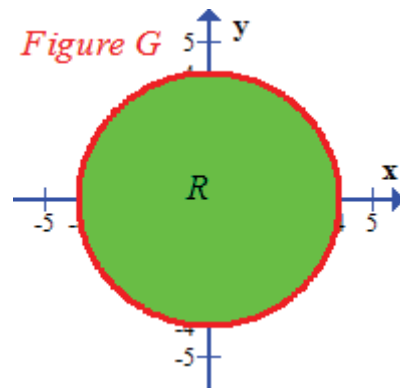
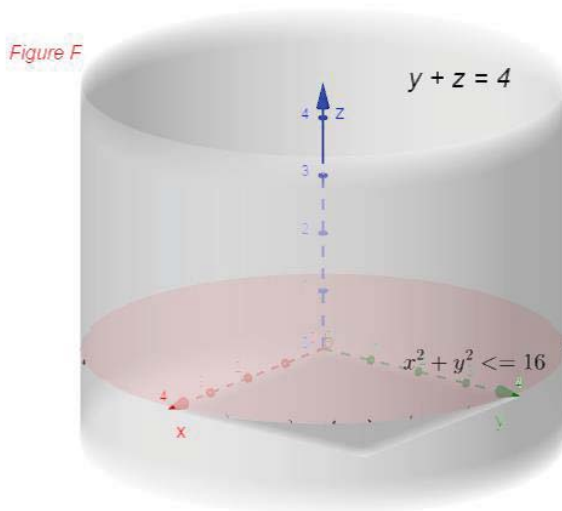
الف - هنگامی که عبارت هایی که شامل $x^2 + y^2$ است ، در انتگرال ظاهر شود

ب - در حد های انتگرال عبارت هایی شامل $x^2 + y^2$ است ، وجود داشته باشد.

ج - ناحیه هایی که روی آنها انتگرال گیری از طریق مختصات قطبی آسان تر است.

مثال ۱ - فرض کنید D یک ناحیه سه بعدی محدود از بالا به صفحه $y + z = 4$ و از پایین به صفحه xy و از اطراف به استوانه $x^2 + y^2 = 16$ باشد. تصویر F • انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dV$$



پاسخ

ملاحظه می کنید که D ناحیه سه بعدی بین نمودارهای $z = 4 - y$ و $z = 0$ روی R است. و R دیسک $x^2 + y^2 \leq 16$ است. تصویر G • در مختصات قطبی R ناحیه ای است بین نمودارهای قطبی

$$r = 0 \text{ و } r = 4 \text{ برای } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

در نتیجه در مختصات استوانه ای، D ناحیه سه بعدی بین نمودارهای

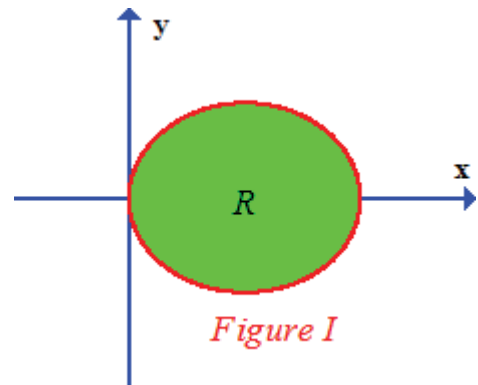
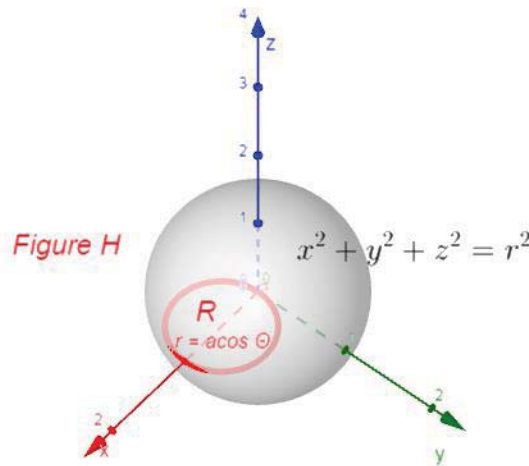
$$z = 0 \text{ و } z = 4 - r \sin \theta, (r, \theta) \in R$$

است. پس داریم.

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dV$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{4-r\sin\theta} r * r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^2 z \Big|_0^{4-r\sin\theta} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left(4r^2 - r^3 \sin\theta \right) dt d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{r^4}{4} \sin\theta \right) \Big|_0^4 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{256}{3} - 64 \sin\theta \right) = \left(\frac{256}{3} \theta + 64 \cos\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{512}{3} \pi \end{aligned}$$

مثال ۲ - مطلوب است حجم ناحیه سه بعدی که استوانه $r = a \cos \theta$ از کره به شعاع r و مرکز در مبدا، جدا می کند. تصویر H .



پاسخ

در این حالت R محدود است توسط نمودار های قطبی زیر

$$r = 0 \text{ و } r = a \cos \theta \text{ برای } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

تصویر I

و D ناحیه سه بعدی بین نمودار های

$$z = -\sqrt{a^2 - r^2} \text{ و } z = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ برای } (r, \theta) \in R$$

با استفاده از قرینه، داریم.

$$\begin{aligned} & \iiint_D 1 \, dV \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^3 - (a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{3/2} \right] d\theta = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta] d\theta = \frac{1}{3} a^3 \left(\theta + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{9} a^3 (3\pi - 4)
\end{aligned}$$

تمرینات ۶.۵

در تمرینات زیر معادله داده شده را به مختصات استوانه ای بنویسید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

- ۱) $y = -4$
- ۲) $x + y + z = 3$
- ۳) $x^2 + y^2 + z = 1$
- ۴) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

- ۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^z r \, dz \, dr \, d\theta$
- ۶) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{\sin \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$
- ۷) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-\cos^2 \theta} \int_0^1 r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta$

در تمرینات زیر انتگرال سه گانه را به صورت انتگرال مکرر در مختصات استوانه ای بنویسید ، و سپس آنرا محاسبه کنید.

$$8) \iiint_D z \, dV$$

اگر D آن قسمت از توپ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد که در هشتک اول قرار دارد.

$$9) \iiint_D xz \, dV$$

اگر D آن قسمت از توپ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ باشد که در هشتک اول است.

در تمرینات زیر حجم ناحیه را پیدا کنید.

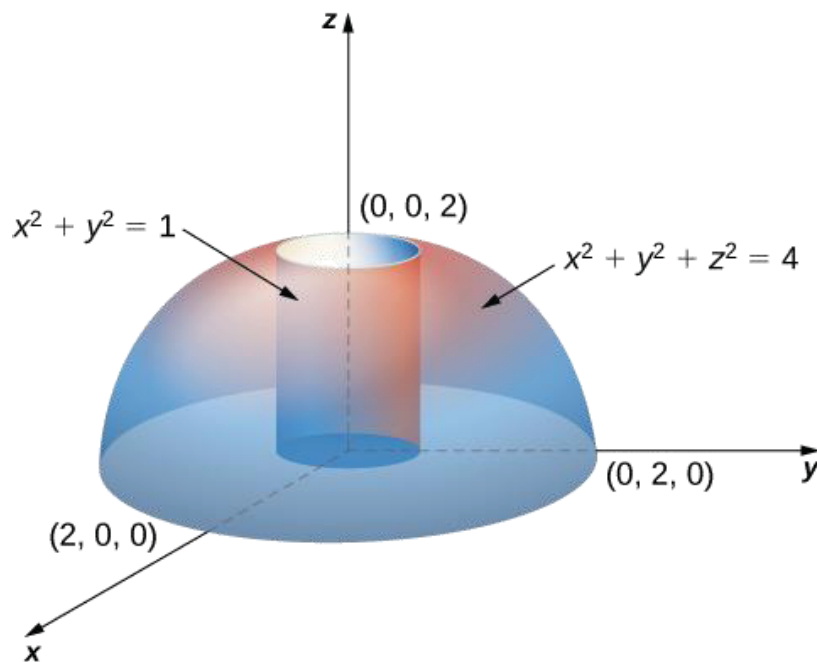
۱۰ - ناحیه سه بعدی محدود است از پایین توسط رویه $z = \sqrt{r}$ و از بالا توسط صفحه $z = 1$.

۱۱ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و مخروط بالایی $z^2 = 3x^2 + 3y^2$.

۱۲ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به صفحه $z = y$ و از پایین به $z = x^2 + y^2$.

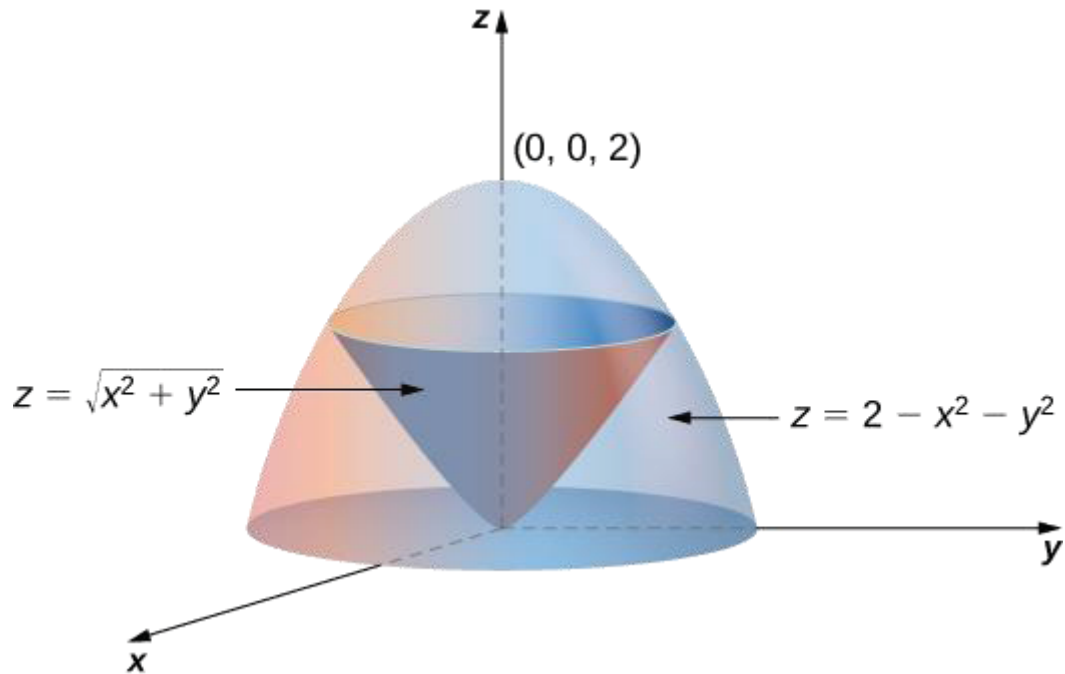
۱۴ - ناحیه سه بعدی داخل کره $r^2 + z^2 = a^2$ و استوانه $r = a \sin \theta$.

۱۵ - فرض کنید D ناحیه سه بعدی است محصور از پایین توسط صفحه $r\theta$ یا همان صفحه xy و از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از اطراف توسط استوانه $x^2 + y^2 = 1$ باشد. تصویر زیر



یک انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای برای حجم این ناحیه بنویسید و سپس آنرا محاسبه کنید.

۱۶ - فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا به پارابولوئید $z = 2 - x^2 - y^2$ باشد. تصویر زیر



یک انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای برای حجم ناحیه سه بعدی بنویسید .

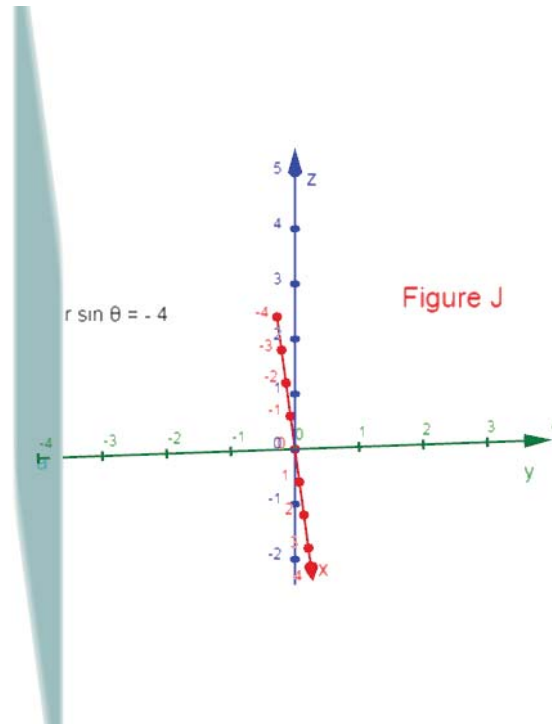
پاسخ تمرینات ۶.۵

در تمرینات زیر معادله داده شده را به مختصات استوانه ای بنویسید و سپس نمودار آنرا راسم کنید.

۱) $y = -4$

$$r \sin \theta = -4$$

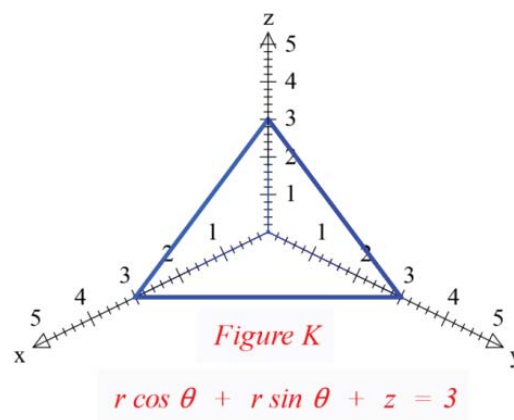
تصویر J



۲) $x + y + z = 3$

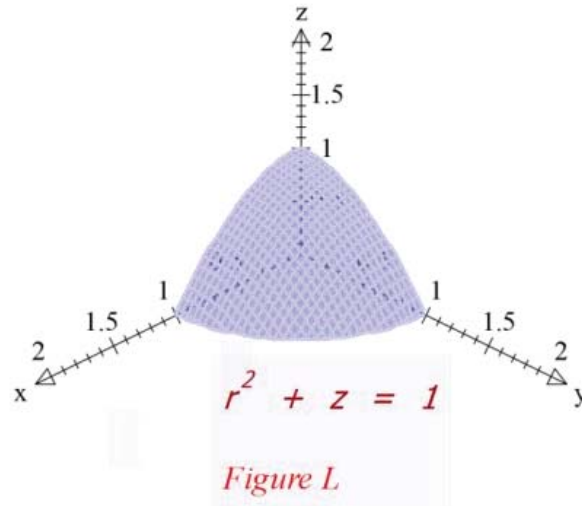
$$r \cos \theta + r \sin \theta + z = 3$$

تصویر K



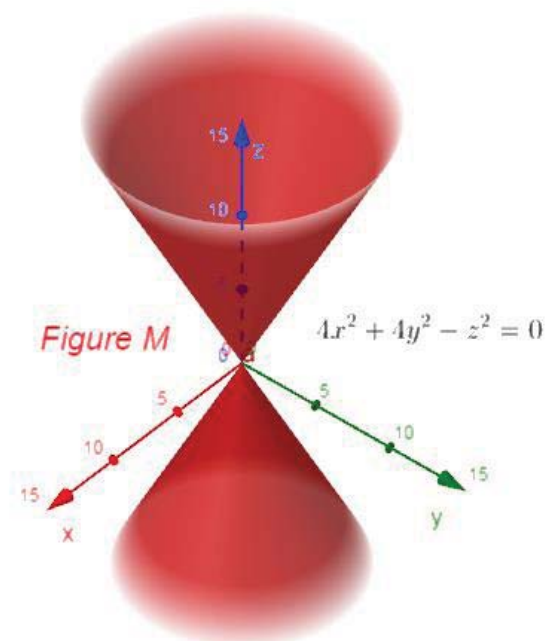
$$۳) \quad x^2 + y^2 + z = 1$$

$$r^2 + z = 1$$

تصویر L 

$$۴) \quad ۴x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$$

$$۴r^2 = z^2$$

تصویر M 

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 ۵) \quad \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} e^z r \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} e^z r \Big|_0^{\sqrt{2}} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (e^{\sqrt{2}} - 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} (e^{\sqrt{2}} - 1) r^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} \, d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} (e^{\sqrt{2}} - 1) \, d\theta = \sqrt{2} \pi (e^{\sqrt{2}} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۶) \quad \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 \int_0^{\sqrt{2} \sin \theta} \int_0^{\sqrt{2}} r^{\sqrt{2}} \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 \int_0^{\sqrt{2} \sin \theta} z r^{\sqrt{2}} \cos \theta \Big|_0^{\sqrt{2}} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 \int_0^{\sqrt{2} \sin \theta} r^{\sqrt{2}} \cos \theta \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} r^{\sqrt{2}+1} \cos \theta \Big|_0^{\sqrt{2} \sin \theta} \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \sin^{\sqrt{2}+1} \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \sin^{\sqrt{2}+2} \theta \Big|_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}
 \end{aligned}$$

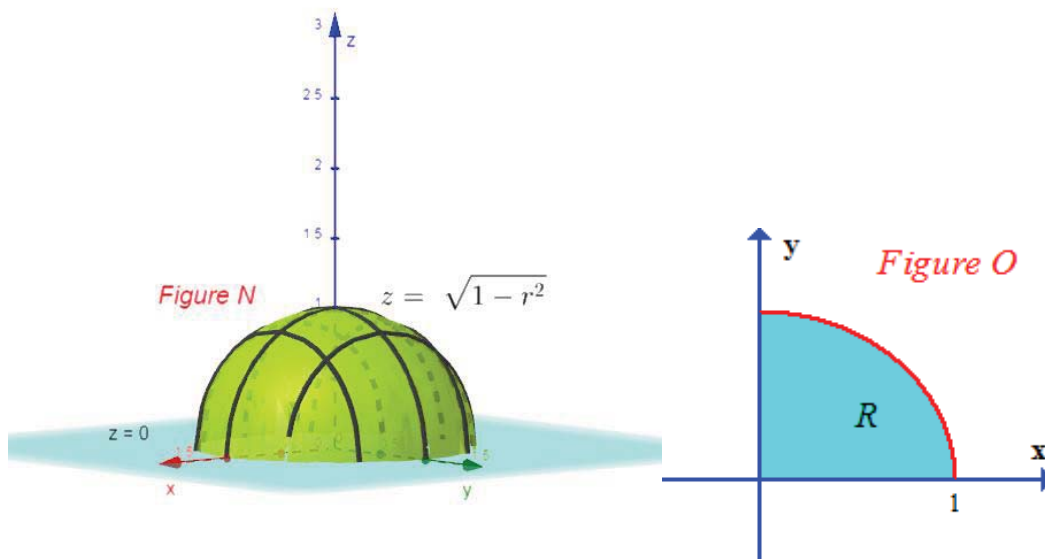
$$\begin{aligned}
 ۷) \quad \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \int_0^{1-\sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}} \theta} \int_0^1 r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \int_0^{1-\sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}} \theta} z r \sin \theta \Big|_0^1 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \int_0^{1-\sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}} \theta} r \sin \theta \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \Big|_0^{1-\sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}} \theta} \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}} \theta + \sqrt{2} \cos^{\sqrt{2}+2} \theta \right) \sin \theta \, d\theta \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cos^{\sqrt{2}+1} \theta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3} \cos^{\sqrt{2}+3} \theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = 0
 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر انتگرال سه گانه را به صورت انتگرال مکرر در مختصات استوانه ای بنویسید ، و سپس آنرا محاسبه کنید.

8) $\iiint_D z \, dV$

اگر D آن قسمت از توپ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد که در هشتک اول قرار دارد. پاسخ

ناحیه سه بعدی D بین نمودار های $z = \sqrt{1 - r^2}$ و $z = 0$ و ناحیه R محدود بین $r = 0$ و $r = 1$ برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است. تصویر های O و N پس داریم.



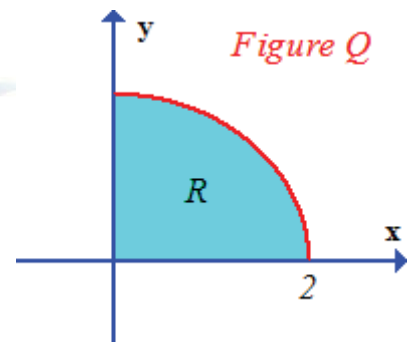
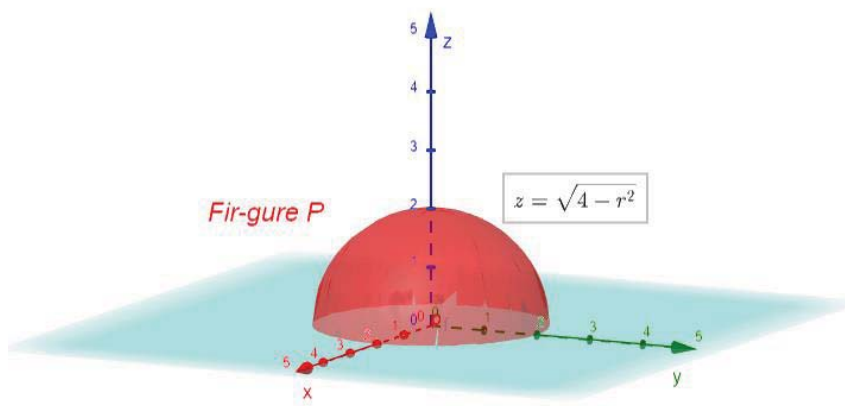
$$\iiint_D z \, dV$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z \, r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \left. \frac{1}{2} z^2 r \right|_0^{\sqrt{1-r^2}} dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r^3 \right) dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{8} r^4 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8} d\theta = \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

9) $\iiint_D xz \, dV$

اگر D آن قسمت از توپ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ باشد که در هشتک اول است. پاسخ

ناحیه سه بعدی D بین نمودارهای $z = \sqrt{4 - r^2}$ و $z = 0$ قرار دارد. تصویر P ناحیه R ربع دیسک $0 \leq r \leq 2$ برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است. تصویر Q پس داریم.



$$\begin{aligned}
 & \iiint_D xz \, dV \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 z \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \frac{1}{2} r^2 z^2 \cos \theta \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right) \cos \theta \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} r^3 - \frac{1}{10} r^5 \right) \cos \theta \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{32}{15} \cos \theta \, d\theta = \frac{32}{15} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر حجم ناحیه را پیدا کنید.

۱۰ - ناحیه سه بعدی محدود است از پایین توسط رویه $z = \sqrt{r}$ و از بالا توسط صفحه $z = 1$.

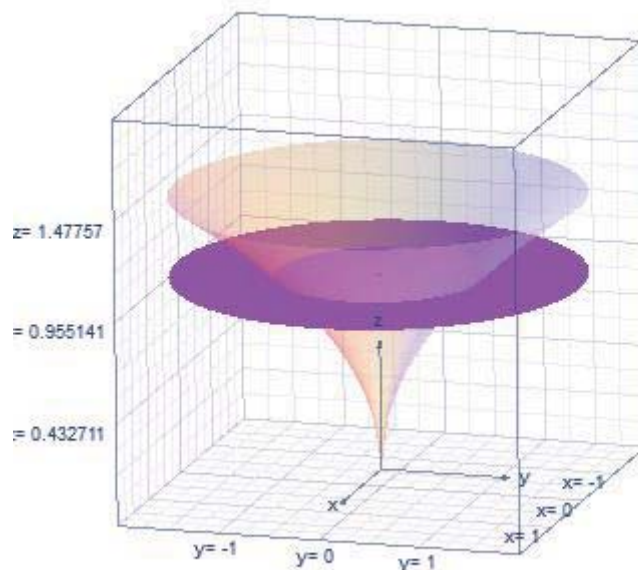
پاسخ

ناحیه داده شده D ناحیه سه بعدی بین نمودارهای $z = \sqrt{r}$ و $z = 1$ است روی دیسک $0 \leq r \leq 1$

تصویر R , پس داریم.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{r}}^1 r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r z \Big|_{\sqrt{r}}^1 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r - r^{3/2} \right) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{5} r^{5/2} \right) \Big|_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{10} \, d\theta = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

تصویر R



۱۱ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و مخروط بالایی $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ پاسخ

برای پیدا کردن نقطه تلاقی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و مخروط $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ باید معادله زیر برقرار باشد.

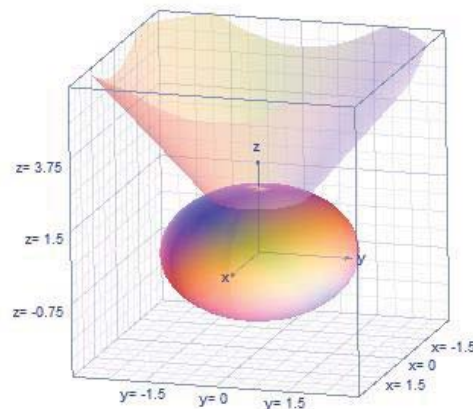
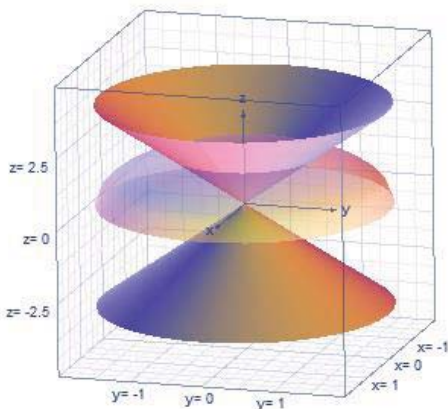
$$x^2 + y^2 + 3x^2 + 3y^2 = 4$$

پس داریم $x^2 + y^2 = 1$ یا $r = 1$ لذا ناحیه داده شده D ، ناحیه سه بعدی بین نمودارهای

$z = \sqrt{4 - r^2}$ و $z = \sqrt{3} r$ روی دیسک $0 \leq r \leq 1$ است. تصویر S پس داریم

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[z \right]_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r\sqrt{4-r^2} - \sqrt{3} r^2 \right) dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (4-r^2)^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(2 - \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

تصویر S



۱۲ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به صفحه $z = y$ و از پایین به $z = x^2 + y^2$ به پاسخ

برای پیدا کردن محل تلاقی صفحه $z = y$ و پارابولوئید $z = x^2 + y^2$ باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$y = z = x^2 + y^2$$

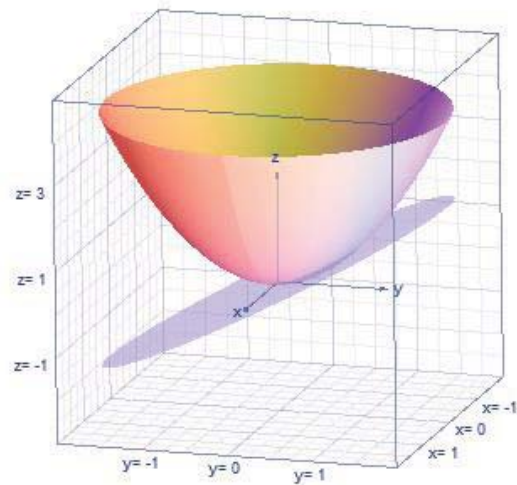
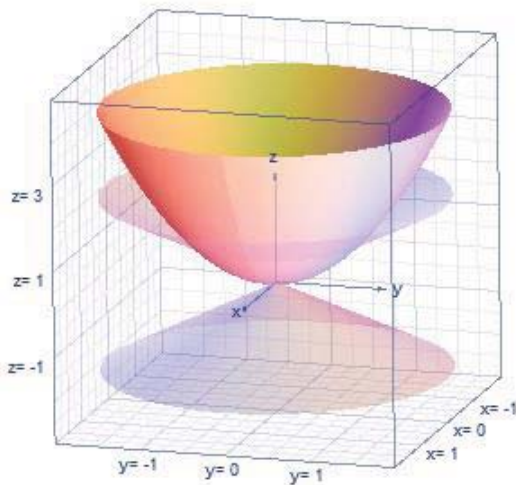
یا

$$r \sin \theta = r^2 \Rightarrow r = \sin \theta$$

پس ناحیه داده شده D ، ناحیه سه بعدی است بین نمودارهای $z = r \sin \theta$ و $z = r^2$ روی ناحیه

محدود به دایره $r = \sin \theta$ • تصویر T

تصویر T



پس داریم.

$$V = \iiint_D 1 \, dV$$

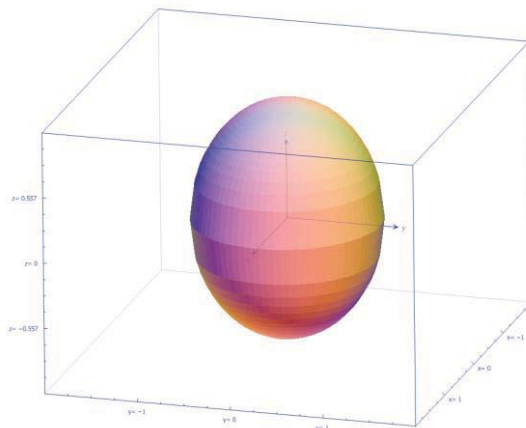
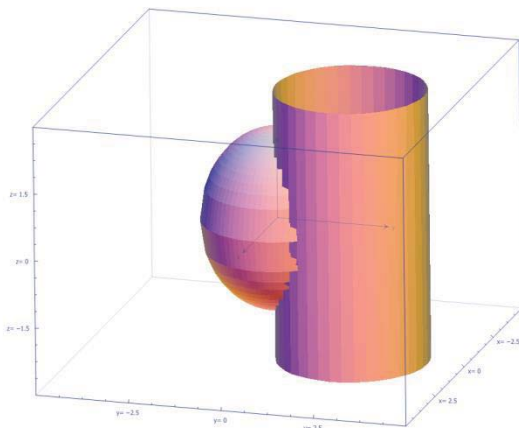
$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} \int_{r^2}^{r \sin \theta} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r z \Big|_{r^2}^{r \sin \theta} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} (r^2 \sin \theta - r^3) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} r^3 \sin \theta - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sin \theta} \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{12} \sin^4 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{4} \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{3}{8} \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{8} \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

۱۴- ناحیه سه بعدی داخل کره $r^2 + z^2 = a^2$ و استوانه $r = a \sin \theta$ پاسخ

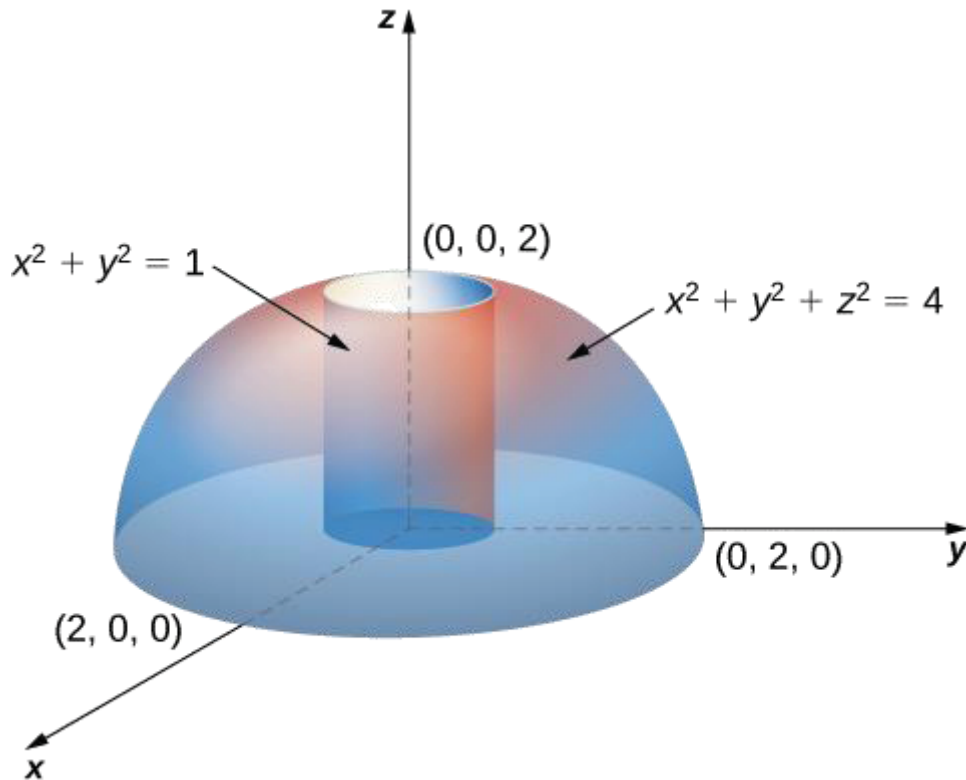
ناحیه D ناحیه سه بعدی بین نمودارهای $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ و $z = -\sqrt{a^2 - r^2}$ روی ناحیه محصور توسط دایره $r = a \sin \theta$ است. تصویر U ، پس داریم.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D 1 \, dV \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{a \sin \theta} \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{a \sin \theta} r z \left| \sqrt{a^2 - r^2} \right|_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{a \sin \theta} 2r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^\pi -\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{a \sin \theta} d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{2}{3} a^3 (1 - |\cos^3 \theta|) \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} a^3 (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{2}{3} a^3 (1 + \cos^3 \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - \sin^3 \theta) \cos \theta] \, d\theta + \frac{2}{3} a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [1 + (1 - \sin^3 \theta) \cos \theta] \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \left(\theta - \sin \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} a^3 \left(\theta + \sin \theta - \frac{1}{4} \sin^4 \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

تصویر U



۱۵ - فرض کنید D ناحیه سه بعدی است محصور از پایین توسط صفحه $r\theta$ یا همان صفحه xy و از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از اطراف توسط استوانه $x^2 + y^2 = 1$ باشد. تصویر زیر



یک انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای برای حجم این ناحیه بنویسید و سپس آنرا محاسبه کنید.

پاسخ

میدانید که معادله کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{یا} \quad r^2 + z^2 = 4$$

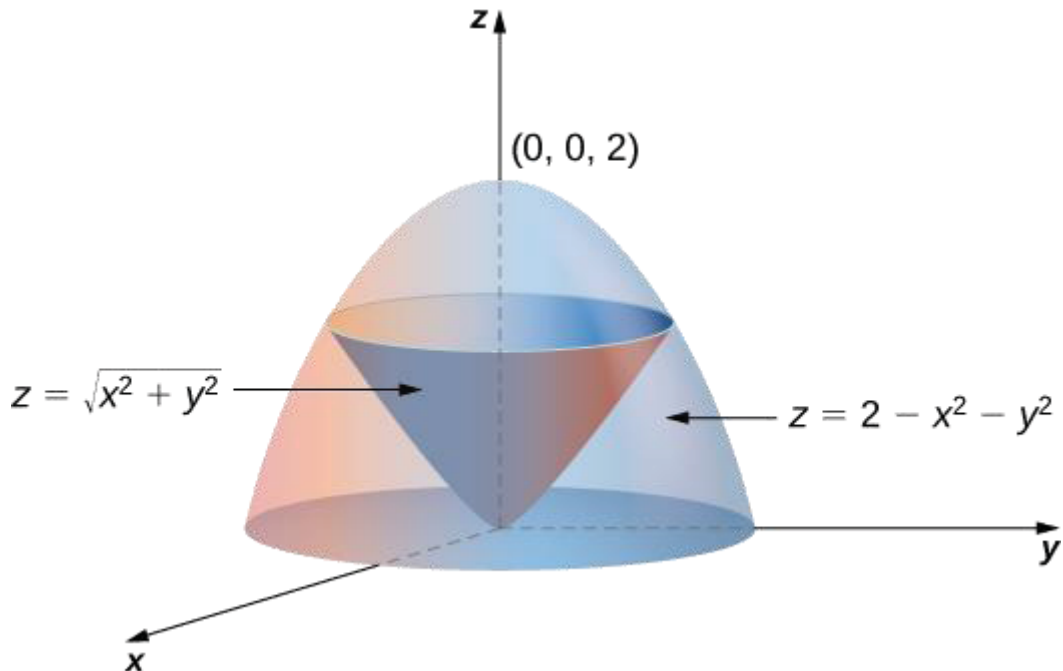
است. و معادله استوانه

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{یا} \quad r^2 = 1$$

است. پس انتگرال حجم مطابق زیر است.

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left[rz \right]_0^{\sqrt{4-r^2}} dr \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(r \sqrt{4-r^2} \right) dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \pi \left(\frac{4}{3} - \sqrt{3} \right) d\theta = 2\pi \left(\frac{4}{3} - \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

۱۶ - فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا به پارابولئید $z = 2 - x^2 - y^2$ باشد. تصویر زیر



یک انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای برای حجم ناحیه سه بعدی بنویسید.

پاسخ

هنگامی که مخروط ، پارابولئید را قطع می کند ، شعاع آن یک است.

چون

$$z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2 \quad \text{و} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

است ، پس داریم $2 - r^2 = r$ این معادله را حل می کنیم.

$$r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1) = 0$$

چون باید $r \geq 0$ باشد ، پس داریم $r = 1$. لذا $z = 1$ است. و بنا بر این محل تلاقی این دو رویه ، یک دایره است به شعاع یک در صفحه $z = 1$. پس داریم $1 \leq z \leq 2 - r^2$. تصویر ناحیه سه بعدی روی صفحه xy یک دایره به شعاع یک و مرکز مبدا است. در نهایت انتگرال زیر را داریم.

$$V = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=r}^{z=2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

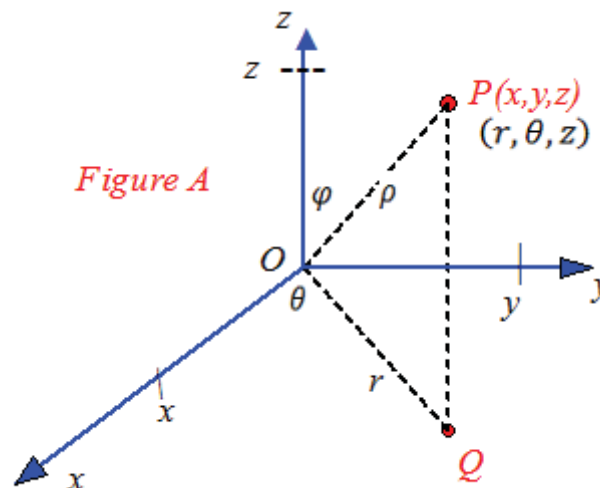
۶.۶ - انتگرال های سه گانه در مختصات کروی

Triple Integrals in Spherical Coordinates

آخرین سیستم مختصاتی که مورد بحث قرار می دهیم، سیستم مختصات کروی است. این سیستم، محاسبه انتگرال های روی ناحیه های سه بعدی که محدود به کره یا مخروط هستند، آسان می کند.

مختصات کروی Spherical Coordinates

در بخش قبل گفتیم (x, y, z) مختصات مستطیلی یا دکارتی است. و (r, θ, z) مختصات استوانه ای است. تصویر A در این تصویر P یک نقطه در فضا است و $r \geq 0$ است.



حال اگر فرض کنیم

$$\rho = \text{طول پاره خط } OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

باشد، و اگر $\rho \neq 0$ باشد، پس فرض می کنیم φ زاویه ای باشد که OP با قسمت مثبت محور z می سازد. فرض می کنیم $0 \leq \varphi \leq \pi$ باشد. اگر $\rho = 0$ باشد، φ اختیاری انتخاب شود.

در نهایت فرض می کنیم θ زاویه ای باشد که OQ با قسمت مثبت محور x می سازد. تصویر A حالا، نقطه P با سه کمیت مشخص می شود، یعنی θ و φ و ρ ، و ما سه گانه (ρ, φ, θ) را مختصات کروی P می نامیم. بر اساس آنچه در مثلثات دیده ایم، داریم.

$$z = \rho \cos \varphi \quad \text{و} \quad r = \rho \sin \varphi$$

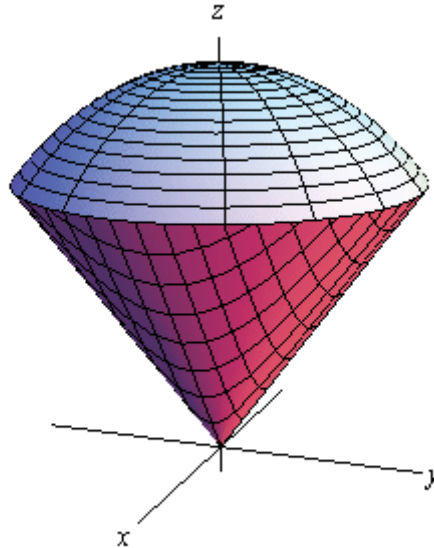
فرمول های بالا، همراه با فرمول های مختصات قطبی زیر

$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta$$

فرمول های زیر را بدست می آوریم، برای تبدیل مختصات کروی به مختصات مستطیلی.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= r \sin \theta = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$

تصویر زیر یک نمونه از طرح کلی یک کوه کروی است که حد پایینی ρ و φ هر دو صفر هستند. بیشتر اشکالی که در این بخش با آنها کار می کنیم، شبیه شکل زیر هستند. ملاحظه می کنید که این تصویر شبیه بستنی قیفی است. توجه داشته باشید که کوه بر وزن سره یا کره به فتح اول و کسر دوم. شکلی است مثلثی.



مثال ۱ - نقطه P دارای مختصات کروی $\left(8, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ است. مختصات مستطیلی P را پیدا کنید.

پاسخ

مختصات مستطیلی نقطه P مطابق زیر است.

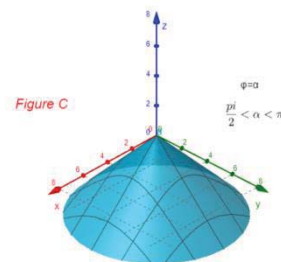
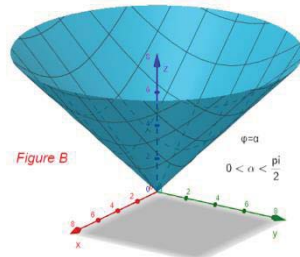
$$x = 8 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$y = 8 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$z = 8 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8 \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

کره هایی که مرکز آنها، مبدا مختصات باشد، معادله های ساده ای دارند. در حقیقت، بر اساس تعریف ρ می توان دریافت که معادله یک کره، که مرکز آن مبدا مختصات و شعاع آن a باشد، در مختصات کروی، می شود $\rho = a$

به همین ترتیب ، اگر $0 < \alpha < \pi$ و $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ باشد ، پس نمودار معادله $\varphi = \alpha$ یک مخروط است که زاویه آن نسبت به قسمت مثبت محور z زاویه α است. اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد ، پس مخروط به طرف بالا باز می شود. تصویر B در صورتی که اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ باشد ، پس مخروط به طرف پایین باز می شود. تصویر C



مثال ۲ - معادله صفحه $z = 2$ در مختصات کروی پیدا کنید.

پاسخ

چون داریم $z = \rho \cos \varphi$ پس معادله $z = 2$ می شود
 $\rho \cos \varphi = 2$
 طرفین را بر $\cos \varphi$ تقسیم می کنیم ، پس داریم.

$$\rho = \frac{2}{\cos \varphi} = 2 \sec \varphi$$

قضیه : انتگرال های سه گانه در مختصات کروی

Theorem : Triple Integrals in Spherical Coordinates

فرض می کنیم a و β اعداد حقیقی باشند و $a \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$ و h_1, h_2, F_1, F_2 تابع های پیوسته باشند. و $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \pi$ و $0 \leq F_1 \leq F_2$ باشد ، و فرض می کنیم D ناحیه سه بعدی باشد که شامل تمام نقاط در فضا است بطوری که ، مختصات کروی آنها (ρ, φ, θ) ، نا مساوی های زیر را بر قرار می کنند.

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \theta \leq \beta \\ h_1(\theta) &\leq \varphi \leq h_2(\theta) \\ F_1(\varphi, \theta) &\leq \rho \leq F_2(\varphi, \theta) \end{aligned}$$

اگر f در D پیوسته باشد ، پس

$$\iiint_D f(x,y,z) dV$$

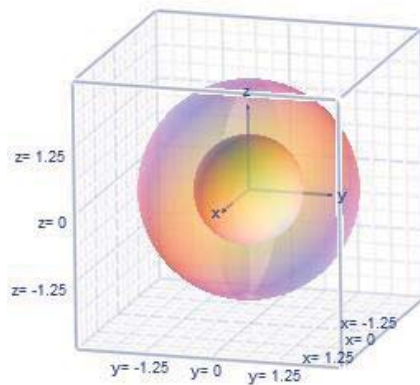
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{F_1(\varphi, \theta)}^{F_2(\varphi, \theta)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

هنگامی که می خواهید حد های انتگرال را در مختصات کروی پیدا کنید ، به نکات زیر توجه می کنید .
 باید $\rho \geq 0$ باشد ، چون ρ فاصله از مبدا مختصات است.
 باید $0 \leq \varphi \leq \pi$ باشد ، زیرا φ اندازه زاویه نسبت به قسمت مثبت محور z است.
 نماد θ اندازه زاویه نسبت به قسمت مثبت محور x است.

مثال ۳ - فرض کنید D ناحیه سه بعدی بین کره های $\rho = 1$ و $\rho = 2$ باشد. تصویر D انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iiint_D z^2 dV$$

تصویر D

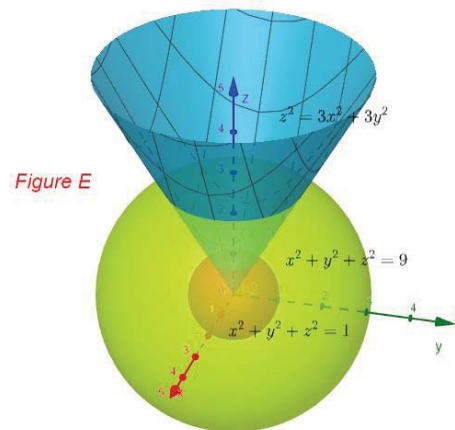
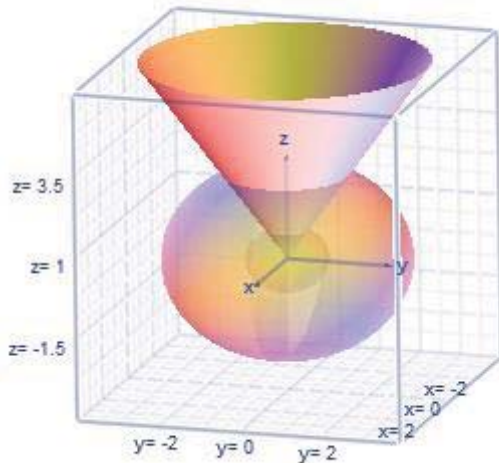


پاسخ

ملاحظه می کنید که D مجموعه ای از نقاط است با مختصات کروی (ρ, φ, θ) بطوری که
 $1 \leq \rho \leq 2$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد. چون $z = \rho \cos \varphi$ است ، پس داریم.

$$\begin{aligned} & \iiint_D z^2 dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \cos^2 \varphi \sin \varphi \right]_1^2 d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{5} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} (-\cos^3 \varphi) \right]_0^\pi d\theta \\ &= \frac{62}{15} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{124}{15} \pi \end{aligned}$$

مثال ۴ - مطلوب است حجم ناحیه سه بعدی D مشترک بین کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و مخروط بالایی $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ ، تصویر E تصویر E



پاسخ

در مختصات کروی ، معادله های کره های داده شده $\rho = 1$ و $\rho = 3$ است. همچنین داریم.
 $z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi$ و $x^2 + y^2 = r^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$
 پس $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ می شود $\rho^2 \cos^2 \varphi = 3\rho^2 \sin^2 \varphi$
 پس $\rho = 0$ و یا $\cos^2 \varphi = 3 \sin^2 \varphi$ است. اگر $\rho \neq 0$ باشد ، پس $\tan^2 \varphi = \frac{1}{3}$ است.
 چون D در مخروط بالایی $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ است ، پس داریم $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ بطوری که
 $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ است. لذا $\varphi = \frac{\pi}{6}$ است. در نتیجه D مجموعه نقاط با مختصات کروه (ρ, φ, θ) است
 بطوری که

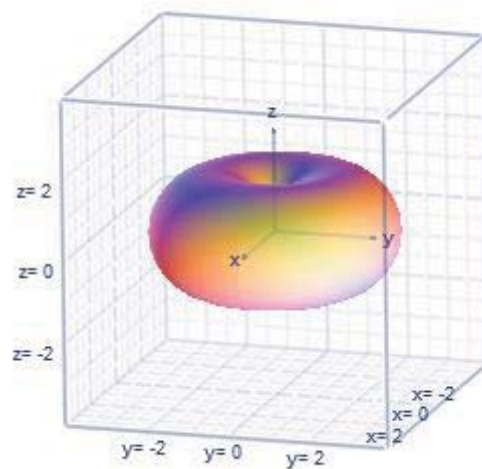
$$1 \leq \rho \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

است ، و لذا داریم.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^3 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^3 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{6}}{3} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos \varphi) \bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \\
 &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi \left(2 - \sqrt{3} \right)
 \end{aligned}$$

مثال ۵ - مطلوب است حجم ناحیه سه بعدی محاط توسط حلقه $\rho = 3 \sin \varphi$, تصویر F تصویر F



پاسخ

ناحیه D مجموعه ای از نقاط است با مختصات کروی (ρ, φ, θ) بطوری که داریم.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{و} \quad 0 \leq \rho \leq 3 \sin \varphi$$

در نتیجه

$$V = \iiint_D 1 \, dV$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{3 \sin \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \bigg|_0^{3 \sin \varphi} d\varphi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 9 \sin^4 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} 9 \left(-\frac{1}{5} \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{3}{5} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{3}{5} \varphi \right) \bigg|_0^{\pi} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{27\pi}{5} d\theta = \frac{27\pi^2}{5}
 \end{aligned}$$

تمرینات ۶.۶

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \int_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

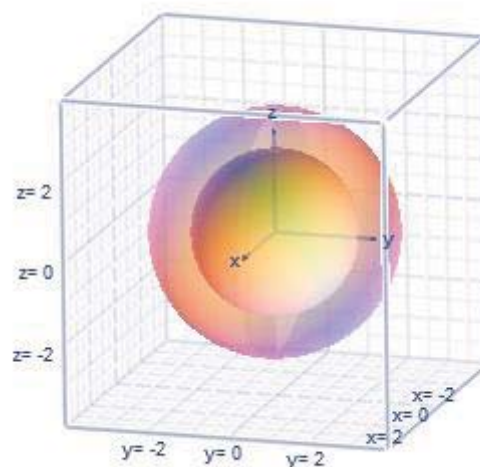
$$۲) \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

در تمرینات زیر ، انتگرال را به انتگرال در مختصات کروی بنویسید و سپس آنرا محاسبه کنید.

$$۳) \iiint_D x^2 \, dV$$

اگر D ناحیه سه بعدی بین کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد. تصویر G

تصویر G

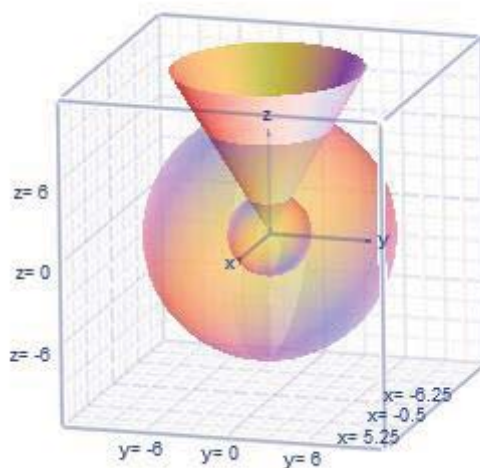


$$۴) \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

اگر D ناحیه سه بعدی بالای صفحه xy و محصور توسط مخروط $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ و کره های

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ و } x^2 + y^2 + z^2 = 81 \text{ باشد. تصویر } H$$

تصویر H



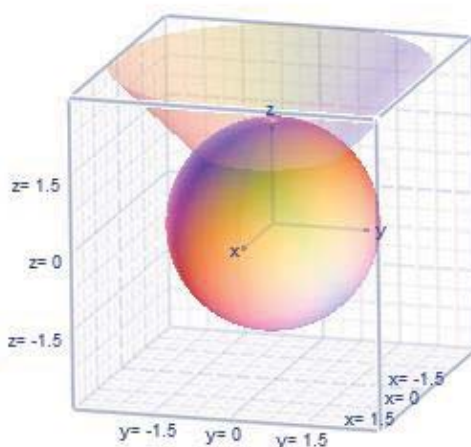
در تمرین زیر حجم ناحیه سه بعدی را پیدا کنید.

۵ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین توسط مخروط بالایی

$$z^2 = x^2 + y^2$$

تصویر I

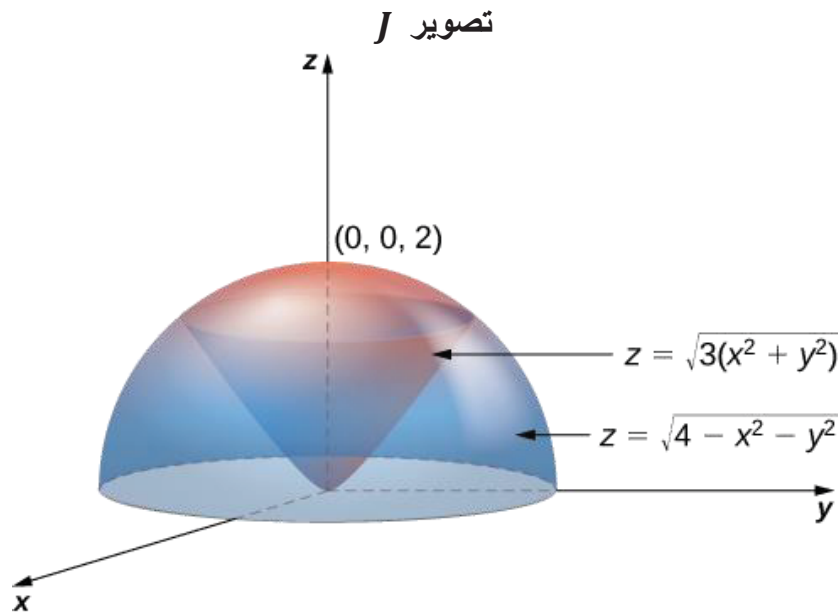
تصویر I



در تمرینات زیر یک انتگرال برای پیدا کردن حجم ناحیه سه بعدی داده شده بنویسید. محاسبه لازم نیست.

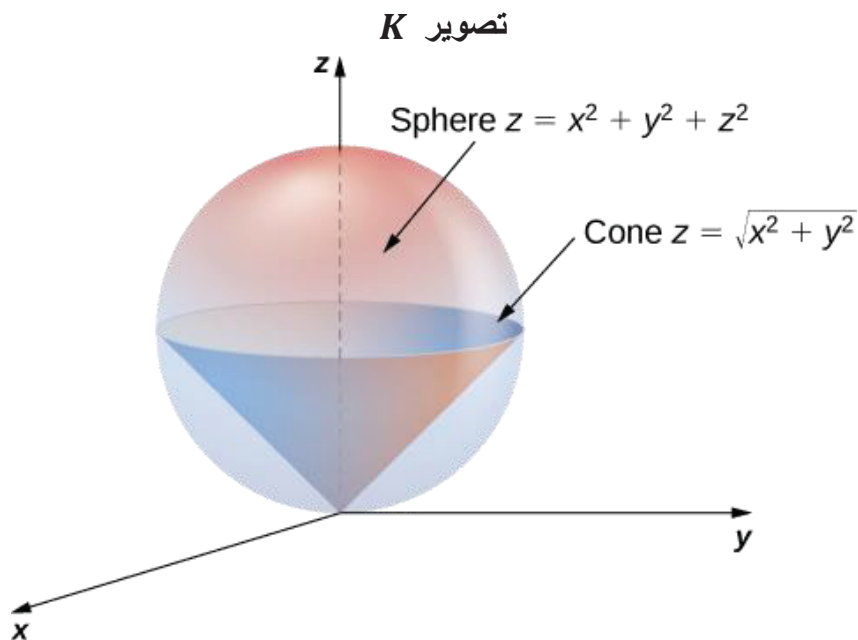
۶ - ناحیه سه بعدی محصور است توسط مخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ و نیم کره

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{تصویر } J$$



۷ - ناحیه سه بعدی محصور است از پایین توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا توسط کره

$$z = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{تصویر } K$$



پاسخ تمرینات ۶.۶

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

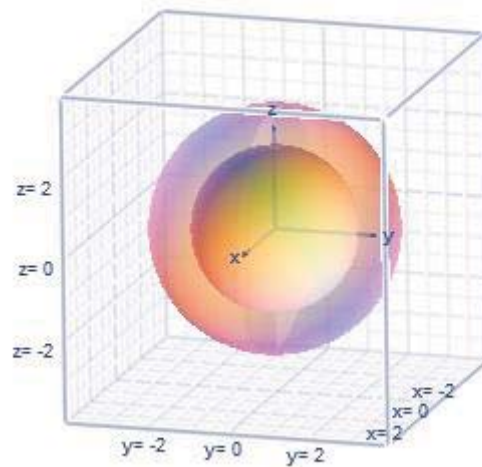
$$\begin{aligned} ۱) \quad \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \sin \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4} \cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} \left(2 - \sqrt{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} \left(2 - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta &= \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \cos^2 \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \theta \right] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\theta \\ &= \frac{3}{4} \pi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{3}{4} \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \pi \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر ، انتگرال را به انتگرال در مختصات کروی بنویسید و سپس آنرا محاسبه کنید.

$$۳) \quad \iiint_D x^2 \, dV$$

اگر D ناحیه سه بعدی بین کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد. تصویر G

تصویر G 

پاسخ

ناحیه D مجموعه تمام نقاطی است با مختصات کروی (ρ, φ, θ) بطوری که

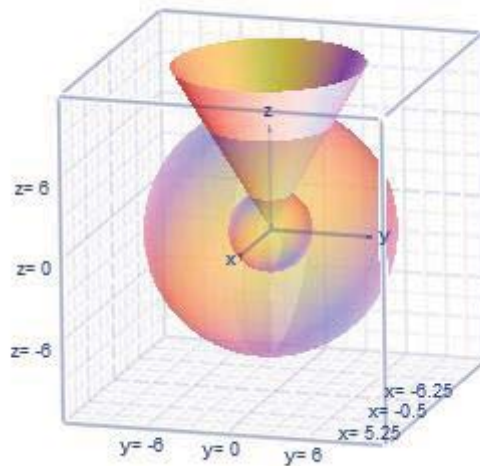
$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{و} \quad 2 \leq \rho \leq 3$$

چون $x^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta$ است، پس داریم.

$$\begin{aligned} & \iiint_D x^2 dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_2^3 (\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\rho^5}{5} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \right) \Big|_2^3 d\varphi d\theta \\ &= \frac{211}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{211}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{211}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \cos^2 \theta \Big|_0^\pi d\theta = \frac{844}{15} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{844}{15} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{844}{15} \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{844}{15} \pi \end{aligned}$$

$$۴) \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

اگر D ناحیه سه بعدی بالای صفحه xy و محصور توسط مخروط $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ و کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ باشد. تصویر H تصویر H



پاسخ

در مختصات کروی، معادله این مخروط $\rho \cos \varphi = \sqrt{3} \rho \sin \varphi$ است، بطوری که داریم، $\cot \varphi = \sqrt{3}$ است. و لذا $\varphi = \frac{\pi}{6}$ است. بنابراین، D مجموعه تمام نقاط با مختصات کروی (ρ, φ, θ) است بطوری که

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad 3 \leq \rho \leq 9$$

است. چون

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

است، پس داریم.

$$\begin{aligned} & \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_3^9 \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 \sin \varphi) d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\rho \sin \varphi) \Big|_3^9 d\varphi d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(-\cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d\theta = \sqrt{2} \pi \left(\sqrt{2} - \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

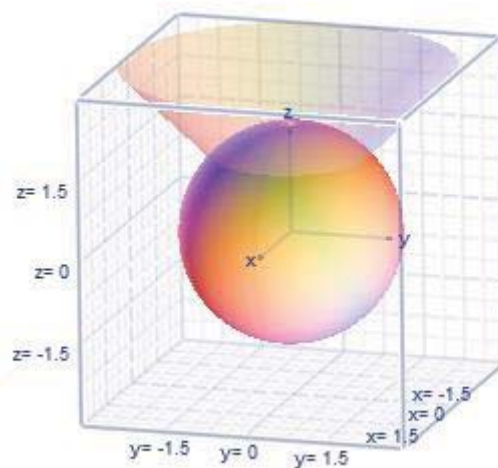
در تمرین زیر حجم ناحیه سه بعدی را پیدا کنید.

۵ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین توسط مخروط بالایی

$$z^2 = x^2 + y^2$$

تصویر I

تصویر I



پاسخ

در مختصات کروی معادله این مخروط است $\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi$ پس نتیجه می گیریم $\varphi = \frac{\pi}{4}$

است. ناحیه سه بعدی D مجموعه تمام نقاطی با مختصات کروی (ρ, φ, θ) بطوری که

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad 0 \leq \rho \leq 2$$

است. پس داریم.

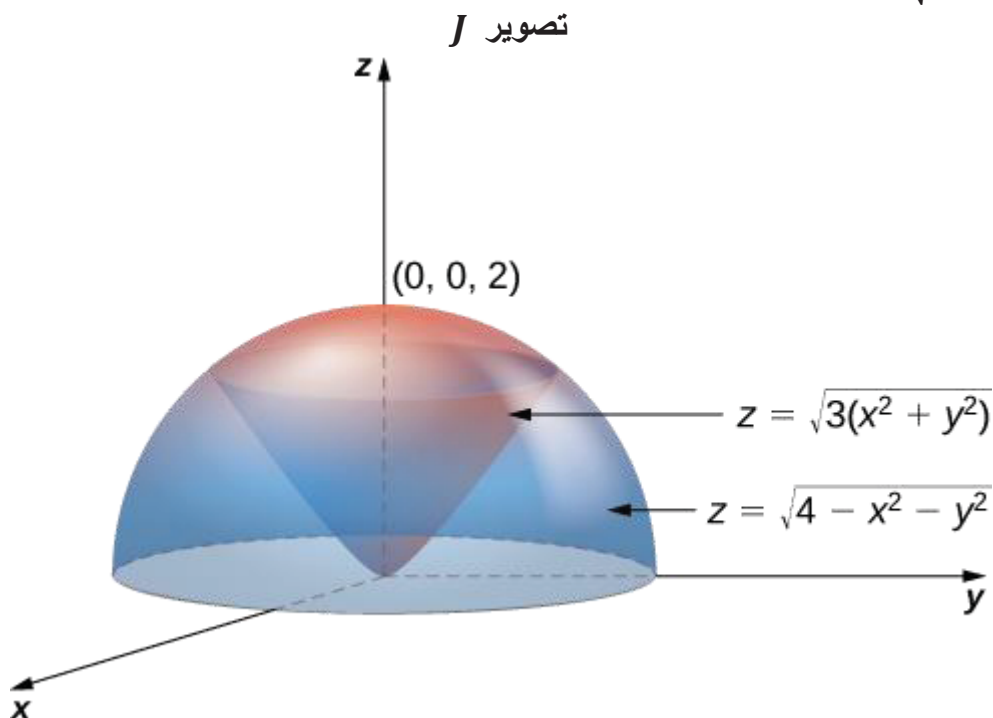
$$V = \iiint_D 1 \, dV$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \, d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos \varphi \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{2} \right) d\theta = \frac{1}{3} \pi \left(2 - \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

در تمرینات زیر یک انتگرال برای پیدا کردن حجم ناحیه سه بعدی داده شده بنویسید. محاسبه لازم نیست.

۶ - ناحیه سه بعدی محصور است توسط مخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ و نیم کره

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{تصویر } J$$



پاسخ

مختصات مستطیلی را به مختصات کروی تبدیل می کنیم.
برای مخروط داریم.

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \Rightarrow \rho \cos \varphi = \sqrt{3} \rho \sin \varphi \quad \text{یا} \quad \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{یا} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

برای کره داریم.

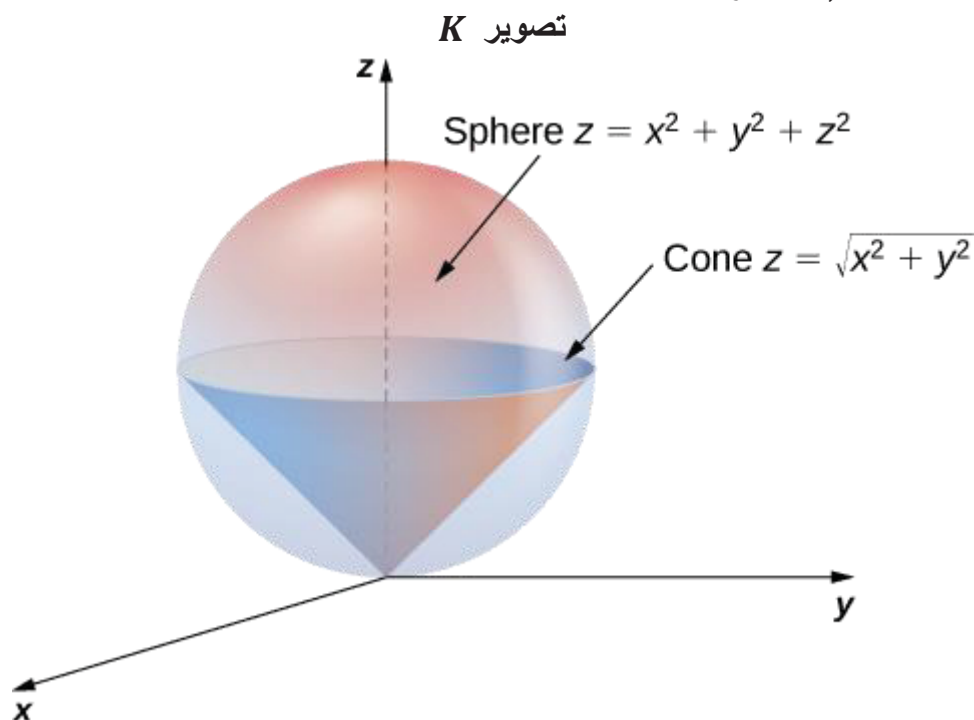
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \text{ یا } z^2 + x^2 + y^2 = 4 \text{ یا } \rho^2 = 4 \text{ یا } \rho = 2$$

پس انتگرال برای حجم ناحیه سه بعدی D داریم.

$$V = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

۷ - ناحیه سه بعدی محصور است از پایین توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا توسط کره

$z = x^2 + y^2 + z^2$, تصویر K



پاسخ

مختصات مستطیلی را به مختصات کروی تبدیل می کنیم.

برای کره داریم.

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ یا } \rho^2 = \rho \cos \varphi \text{ یا } \rho = \cos \varphi$$

برای مخروط داریم.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho \sin \varphi \\
 \cos \varphi &= \sin \varphi \\
 \varphi &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

پس انتگرال برای حجم سه بعدی D داریم.

$$V = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \int_{\rho=0}^{\rho=\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

۶.۷ - گشتاورها و مراکز ثقل Moments and Centers of Gravity

در بخش ۳.۷ کتاب انتگرال آوا به همین قلم، گشتاور و مرکز ثقل یک ناحیه مسطح را تعریف کردیم. در این بخش انتگرال های دو گانه را، برای تعریف گشتاورها و مراکز ثقل نواحی مسطح کلی تر، مورد استفاده قرار می دهیم. سپس به ناحیه های سه بعدی بر میگردیم و مراکز ثقل و گشتاورهای آنها را مورد بحث قرار می دهیم.

گشتاورها و مراکز ثقل ناحیه های مسطح

Moments and Centers of Gravity of Plane Regions

فرض می کنیم R یک مستطیل باشد که مرکز آن (x, y) و مساحت آن A است. از بخش ۳.۷ کتاب انتگرال آوا داریم، گشتاورهای M_x و M_y ناحیه R حول محور x و محور y مطابق زیر است.

$$M_x = yA \quad \text{و} \quad M_y = xA$$

حال اگر R یک ناحیه ساده عمودی و یا افقی باشد، گشتاور و مرکز ثقل چگونه خواهد بود؟

تعریف :

فرض می کنیم R یک ناحیه ساده عمودی و یا افقی باشد. گشتاور R حول محور x یعنی M_x و گشتاور R حول محور y یعنی M_y مطابق زیر تعریف می شود.

$$M_x = \iint_R y \, dA, \quad M_y = \iint_R x \, dA$$

اگر R مساحت مثبت داشته باشد،

پس مرکز ثقل **Center of Gravity** یا مرکز جرم **Center of Mass** ناحیه R نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ است و مطابق زیر تعریف می شود.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R 1 \, dA}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R 1 \, dA}$$

تعریف بالا، در مورد هر ناحیه کران دار R که روی آن هر تابع پیوسته انتگرال پذیر باشد، کار برد دارد.

در حقیقت، اگر R ناحیه بین نمودارهای f و g در $[a, b]$ باشد، و اگر $g(x) \leq f(x)$ باشد، برای $a \leq x \leq b$ پس

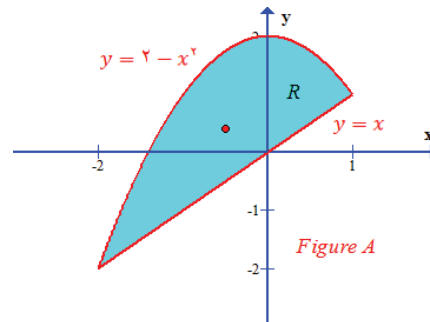
$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y \, dA \\ &= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} y \, dy \, dx = \int_a^b \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{g(x)}^{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \end{aligned}$$

و

$$M_y = \iint_R x \, dA$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} x \, dy \, dx = \int_a^b xy \Big|_{g(x)}^{f(x)} dx = \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, dx$$

مثال ۱ - فرض کنید R ناحیه مسطح محصور بین خط $y = x$ و سهمی $y = 2 - x^2$ باشد. تصویر A گشتاورهای R حول محورهای x و y را پیدا کنید و سپس مرکز ثقل R را مشخص کنید.



پاسخ

خط و سهمی یکدیگر را در (x, y) قطع می کنند اگر

$$x = y = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

باشد. یعنی $x = -2$ و یا $x = 1$ است. لذا نقاط تلاقی $(-2, -2)$ و $(1, 1)$ است. در نتیجه داریم.

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y \, dA \\ &= \int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} y \, dy \, dx = \int_{-2}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x \, dA \\ &= \int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} x \, dy \, dx = \int_{-2}^1 xy \Big|_x^{2-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^1 x(2 - x^2 - x) \, dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

و مساحت R مطابق زیر بدست می آید.

$$A = \iint_R 1 \, dA$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) \, dx \\
 &= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{-2}^1 = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

و در نهایت

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = -1 \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{5}$$

لذا مرکز ثقل R عبارت است از $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ ، تصویر A

تعریف: گشتاورها و مراکز ثقل ناحیه های سه بعدی

Definitio : Moments and Centers of Gravity of Solid Regions

فرض کنید یک شنی با جرم مخصوص پیوسته δ یک ناحیه سه بعدی D را اشغال می کند. پس گشتاور Moment شنی حول صفحه xy یعنی M_{xy} و گشتاور شنی حول صفحه xz یعنی M_{xz} و گشتاور شنی حول صفحه yz یعنی M_{yz} مطابق زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_D z\delta(x,y,z) \, dV \\
 M_{xz} &= \iiint_D y\delta(x,y,z) \, dV \\
 M_{yz} &= \iiint_D x\delta(x,y,z) \, dV
 \end{aligned}$$

اگر جرم شنی یعنی m مثبت باشد، پس مرکز ثقل **Center of Gravity** یا مرکز جرم **Center of Mass** شنی، یعنی $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_D x\delta(x,y,z) \, dV}{\iiint_D \delta(x,y,z) \, dV}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_D y\delta(x,y,z) \, dV}{\iiint_D \delta(x,y,z) \, dV}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_D z\delta(x,y,z) \, dV}{\iiint_D \delta(x,y,z) \, dV}$$

توجه داشته باشید که ، یک جرم نقطه ای A Point Mass با جرم m که در مرکز ثقل یک ناحیه سه بعدی D قرار دارد ، دارای همان گشتاور ها هست که یک شئی با جرم مخصوص ثابت ، ناحیه D را اشغال می کند.

هنگامی که جرم مخصوص ثابت و یکسان است ، مرکز ثقل شئی را معمولاً گرانیگاه Centroid آن شئی می نامیم. در این صورت مرکز ثقل و یا گرانیگاه مستقل از جرم مخصوص است. در نتیجه ، در مورد گرانیگاه شئی صحبت می کنیم. نه مرکز ثقل

اگر جرم مخصوص δ و ناحیه سه بعدی D که یک شئی اشغال می کند ، هر دو نسبت به یک صفحه قرینه باشند ، پس مرکز ثقل در آن صفحه قرار دارد.

بطور کلی ، اگر جرم مخصوص ثابت و یکسان باشد و D نسبت به تمام صفحه مختصات قرینه باشد ، پس مرکز ثقل D در مبدا مختصات قرار دارد. مانند یک کره که مرکز آن مبدا مختصات باشد.

گرانیگاه نقطه ای است که در آن نقطه شئی در حالت تعادل است.

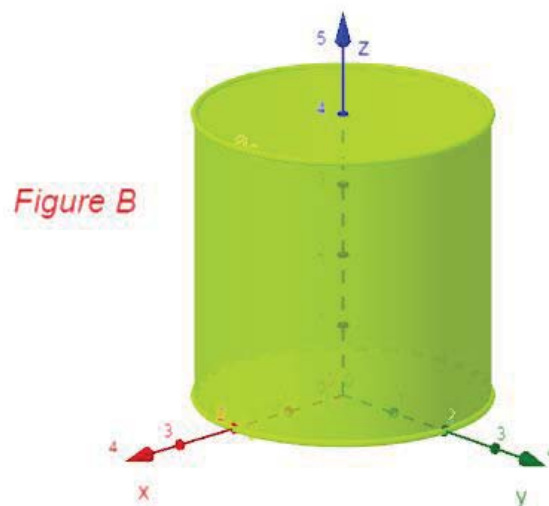
مرکز ثقل شئی ، نقطه ای است که میانگین وزن جسم در آن قرار دارد. به عبارت دیگر ، مرکز ثقل میانگین توزیع وزن است.

مثال ۲ – فرض کنید یک شئی ، ناحیه سه بعدی D محصور توسط استوانه مدور را اشغال می کند. تصویر B .

و فرض کنید دارای جرم مخصوص زیر باشد.

$$\delta(x, y, z) = 20 - z^2$$

مطلوب است گشتاور های M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} و سپس مرکز ثقل شئی را مشخص کنید.



پاسخ

$$M_{xz} = \iiint_D y \delta(x,y,z) dV = \iiint_D y(20 - z^2) dV$$

با محاسبه انتگرال بالا و یا توجه به تصویر و این که D نسبت به صفحه xz قرینه است، نتیجه می گیریم که حاصل انتگرال بالا صفر است.

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x,y,z) dV = \iiint_D x(20 - z^2) dV$$

به همین استدلال که D نسبت به صفحه yz قرینه است، پس حاصل انتگرال صفر است. بر پیدا کردن M_{xy} از مختصات استوانه ای استفاده می کنیم.

$$M_{xy} = \iiint_D z \delta(x,y,z) dV = \iiint_D z(20 - z^2) dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} (20 - z^3) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(20z - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (20\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{4}r^2\sqrt{4-r^2}) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(20\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{4}r^2\sqrt{4-r^2} \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 192 d\theta = 384\pi$$

برای مشخص کردن مرکز ثقل، باید ابتدا جرم شئی را پیدا کنیم.

$$m = \iiint_D \delta(x,y,z) dV = \iiint_D (20 - z^2) dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} (20 - z^2) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(20z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{196}{3} r dr d\theta = \frac{196}{3} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \frac{392}{3} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{784}{3}\pi$$

لذا مرکز ثقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ داریم.

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{384\pi}{\frac{784}{3}\pi} = \frac{18}{11}$$

توجه داشته باشید که مرکز ثقل شئی که استوانه را اشغال کرده $(0,0,\frac{18}{11})$ است، در صورتی که

گرانیه سه بعدی که محصور است توسط استوانه $(0,0,2)$ است.

به تفاوت مرکز ثقل و گرانیه توجه کنید.

تمرینات ۶.۷

در تمرینات زیر مرکز ثقل ناحیه مسطح را پیدا کنید. اگر لازم شود، از قرینه استفاده کنید.

۱ - ناحیه بین نمودارهای $y = 5$ و $y = 1 + x^2$ است.

۲ - ناحیه داخل دایره های $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + (y-1)^2 = 1$ قرار دارد.

۳ - ناحیه محصور است توسط کاردیوئید $r = 1 + \cos \theta$

در تمرینات زیر، گرانیگاه ناحیه را پیدا کنید. اگر لازم باشد از قرینه بجای محاسبه استفاده کنید.

۴ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحه xy

۵ - ناحیه محصور از بالا توسط صفحه $z = 1$ و از پایین توسط قیف بالایی مخروط

$$z^2 = 9x^2 + 9y^2$$

۶ - هرم با راس های $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 2)$

در تمرینات زیر مرکز ثقل شئی که توسط ناحیه داده شده اشغال شده و دارای جرم مخصوص داده شده است را پیدا کنید.

۷ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2$ قرار دارد و جرم مخصوص آن $\delta(x, y, z) = z^2 + 1$ است.

۸ - مکعب در هشتک اول و ابعاد ۲ که یکی از راس های آن در مبدا مختصات است و دارای جرم مخصوص $\delta(x, y, z) = 1 + x$ است.

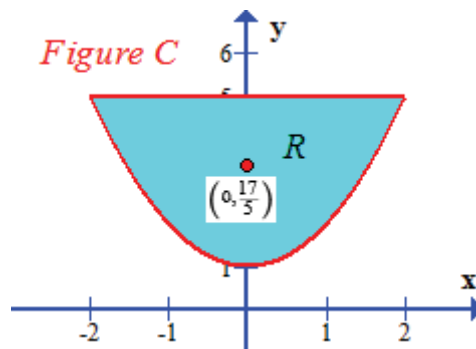
پاسخ تمرینات ۶.۷

در تمرینات زیر مرکز ثقل ناحیه مسطح را پیدا کنید. اگر لازم شود، از قرینه استفاده کنید.

۱ - ناحیه بین نمودارهای $y = 5$ و $y = 1 + x^2$ است.

پاسخ

تصویر C



با استفاده از قرینه داریم $\bar{x} = 0$ است. نمودارهای $y = 5$ و $y = 1 + x^2$ یک دیگر را قطع می کنند اگر $5 = y = 1 + x^2$ باشد. پس $x = -2$ و یا $x = 2$ است. در نتیجه داریم.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R y \, dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{1+x^2}^5 y \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \left. \frac{1}{2} y^2 \right|_{1+x^2}^5 dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} (25 - (1+x^2)^2) \right) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} (25 - 1 - 2x^2 - x^4) \right) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} (24 - 2x^2 - x^4) \right) dx \\
 &= \int_{-2}^2 (12 - x^2 - \frac{1}{2} x^4) dx = \left(12x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{544}{15}
 \end{aligned}$$

برای مساحت A داریم.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 \int_{1+x^2}^5 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^2 y \Big|_{1+x^2}^5 dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\
 &= \left(4x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

و در نهایت داریم.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{17}{5}$$

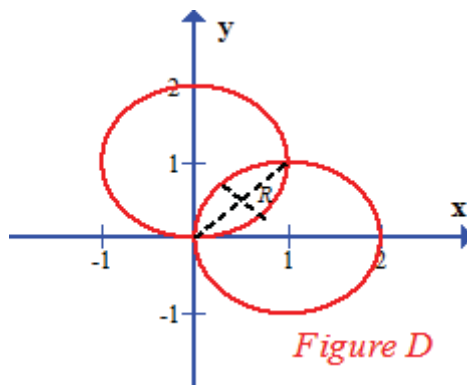
لذا مرکز ثقل مطابق زیر است.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{17}{5} \right)$$

۲ - ناحیه داخل دایره های $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + (y-1)^2 = 1$ قرار دارد.

پاسخ

تصویر D



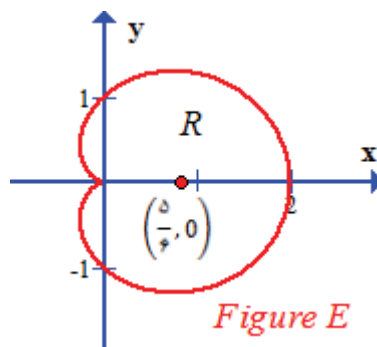
ناحیه نسبت به خطوط $y = x$ و $x + y = 1$ قرینه است، پس $\bar{x} = \bar{y}$ و $\bar{x} + \bar{y} = 1$ است. پس مرکز ثقل مطابق زیر است.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

۳ - ناحیه محصور است توسط کاردیوئید $r = 1 + \cos \theta$

پاسخ

تصویر E



با توجه به قرینه، $\bar{y} = 0$ است. حالا داریم.

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \cos\theta \Big|_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \cos\theta + \cos^2\theta + \cos^3\theta + \frac{1}{3} \cos^4\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 \theta + (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \right] d\theta + \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \cos^3 \theta d\theta \\
&= \left(\frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} \\
&\quad + \left(\frac{1}{12} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{1}{8} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{8} \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{5}{4} \pi
\end{aligned}$$

قسمت دوم انتگرال بالا بر اساس فرمول شماره ۱۳ بخش ۲.۱ کتاب انتگرال آوا توسط این قلم. برای یاد آوری، آنرا در ذیل می آوریم.

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C$$

حالا چون

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos \theta} r dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{1+\cos \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) d\theta \\
&= \left(\frac{1}{4} \theta + \sin \theta + \frac{1}{8} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi
\end{aligned}$$

پس داریم.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{5}{4} \pi}{\frac{3}{2} \pi} = \frac{5}{6}$$

لذا مرکز ثقل مطابق زیر است.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{6}, 0 \right)$$

در تمرینات زیر، گرانیگاه ناحیه را پیدا کنید. اگر لازم باشد از قرینه بجای محاسبه استفاده کنید.

۴ - ناحیه سه بعدی محصور از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحه xy

پاسخ

بر اساس قرینه داریم. $\bar{x} = \bar{y} = 0$ و $\delta = 1$ می گیریم،

$$M_{xy} = \iiint_D z dV$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \, z r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} z^2 r \Big|_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} a^2 r - \frac{1}{2} r^3 \right) \, dr \, d\theta = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{8} r^4 \right) \Big|_0^a \, d\theta \\
 &\quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{8} a^2 \, d\theta = \frac{1}{8} \pi a^2
 \end{aligned}$$

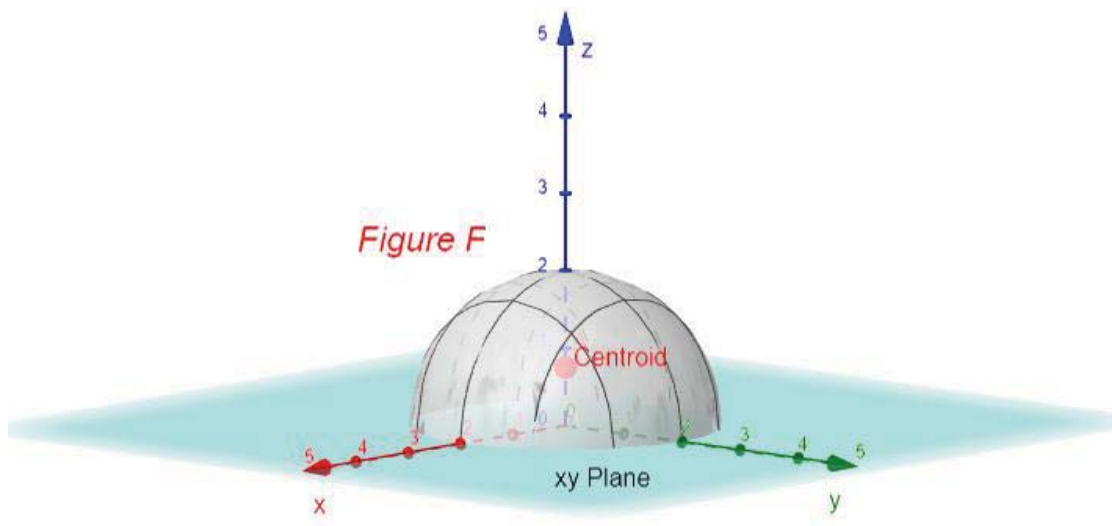
چون $m = \frac{2}{3} \pi a^3$ است، پس

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{\pi a^2}{8}}{\frac{2}{3} \pi a^3} = \frac{3}{8} a$$

لذا

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3}{8} a \right)$$

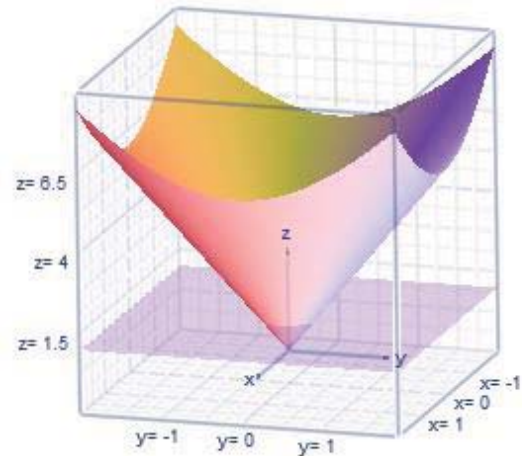
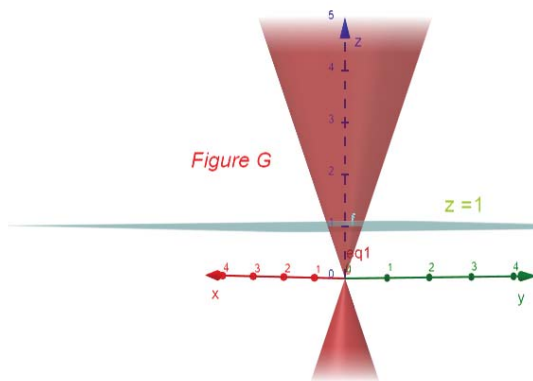
تصویر F



۵ - ناحیه محصور از بالا توسط صفحه $z = 1$ و از پایین توسط قیف بالایی مخروط

$$z^2 = 9x^2 + 9y^2$$

پاسخ



با توجه به قرینه، داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$. صفحه $z = 1$ و مخروط، روی دایره $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ تلاقی می کنند. $\delta = 1$ می گیریم، پس داریم.

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D z \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{3}r}^1 z \, r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \left. \frac{1}{2} z^2 r \right|_{\frac{1}{3}r}^1 dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} r - \frac{1}{18} r^3 \right) dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{72} r^4 \right) \bigg|_0^{\frac{1}{3}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{72} d\theta = \frac{1}{36} \pi \end{aligned}$$

چون داریم

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{3}r}^1 r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} r z \bigg|_{\frac{1}{3}r}^1 dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \left(r - \frac{1}{3} r^2 \right) dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{9} r^3 \right) \bigg|_0^{\frac{1}{3}} d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{54} d\theta = \frac{1}{27} \pi$$

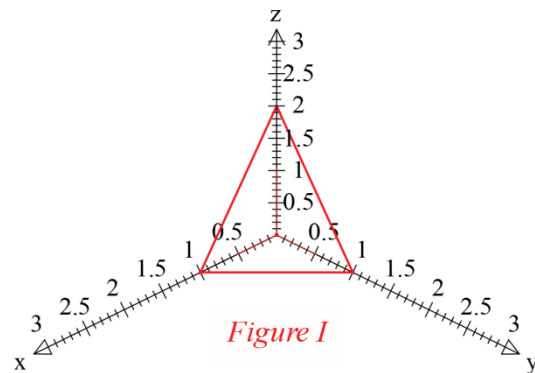
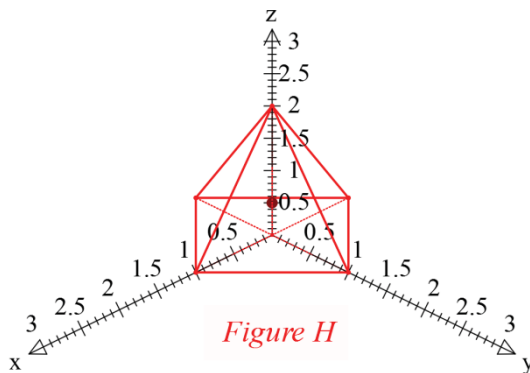
پس داریم

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{27}} = \frac{3}{4}$$

لذا

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$$

۶ - هرم با راس های $(0, 0, 2)$, $(0, -1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ تصویر H پاسخ



بر اساس قرینه، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ است. تصویر I نمودار نمای روبرویی هرم در هشتک اول نشان می دهد. معادله این صفحه $x + y + \frac{z}{2} = 1$ و یا $z = 2(1 - x - y)$ است. پس $\delta = 1$ در نظر می گیریم. پس داریم.

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D z \, dV \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2(1-x-y)} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2z^2 \Big|_0^{2(1-x-y)} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 8(1-x-y)^2 dy \, dx = \int_0^1 -\frac{8}{3}(1-x-y)^3 \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{8}{3}(1-x)^3 dx = -\frac{2}{3}(1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

حال چون داریم.

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_D 1 \, dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-x-y} dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \, dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}(1-x-y)^2 \Big|_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

پس داریم

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$$

لذا

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

در تصویر H گرانیگاه مشخص شده است.

در تمرینات زیر مرکز ثقل شئی که توسط ناحیه داده شده اشغال شده و دارای جرم مخصوص داده شده است را پیدا کنید.

۷ - ناحیه سه بعدی داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2$ قرار دارد و جرم مخصوص آن $\delta(x, y, z) = z^2 + 1$ است.

پاسخ

چون $\delta(x, y, z)$ به x و y بستگی ندارد، و چون ناحیه داده شده نسبت به صفحه های xz و yz قرینه است، پس $\bar{x} = 0 = \bar{y}$ است. حال داریم

$$M_{xy} = \iiint_D z(x, y, z) \, dV = \iiint_D z(z^2 + 1) \, dV = 0$$

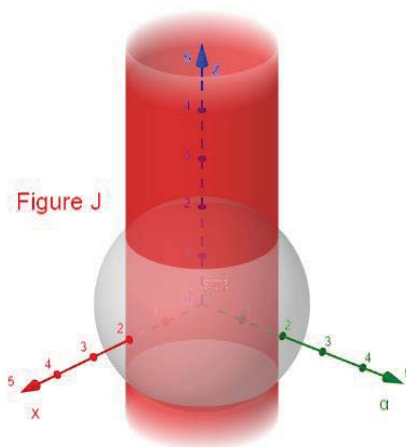
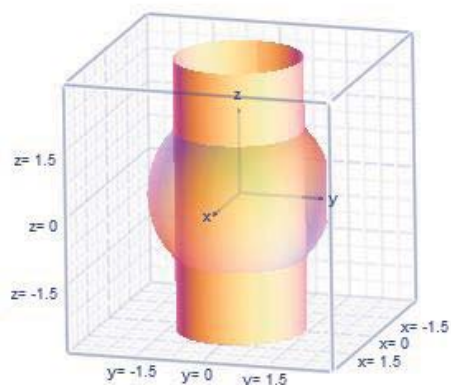
پس داریم.

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{0}{m} = 0$$

پس داریم.

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 0)$$

تصویر J



۸ - مکعب در هشتک اول و ابعاد ۲ که یکی از راس های آن در مبدا مختصات است و دارای جرم مخصوص $\delta(x, y, z) = 1 + x$ است.

پاسخ

تصویر K

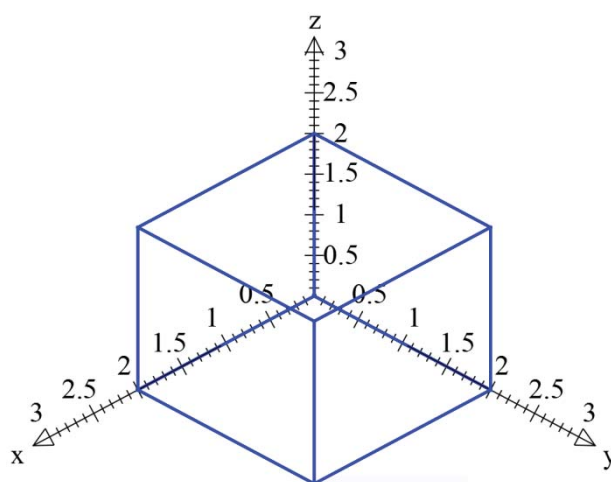


Figure K

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_D z \delta(x, y, z) dV \\
 &= \int_0^3 \int_0^3 \int_0^3 z(1 + x) dz dy dx = \int_0^3 \int_0^3 \frac{1}{2} z^2 (1 + x) \Big|_0^3 dy dx \\
 &= \int_0^3 \int_0^3 \frac{9}{2} (1 + x) dy dx = \int_0^3 \frac{9}{2} (1 + x) y \Big|_0^3 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (1+x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \\
 M_{xz} &= \iiint_D y \delta(x,y,z) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y(1+x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 y(1+x) z \Big|_0^1 dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 y(1+x) dy dx = \int_0^1 y^2(1+x) \Big|_0^1 dx \\
 &= \int_0^1 (1+x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \\
 M_{yz} &= \iiint_D x \delta(x,y,z) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(1+x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x(1+x) z \Big|_0^1 dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 x(1+x) dy dx = \int_0^1 x(1+x) y \Big|_0^1 dx \\
 &= \int_0^1 x(1+x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

چون داریم.

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_D \delta(x,y,z) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1+x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (1+x) z \Big|_0^1 dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (1+x) dy dx = \int_0^1 (1+x) y \Big|_0^1 dx \\
 &= \int_0^1 (1+x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}
 \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} &= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{9}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9} \\
 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \left(\frac{5}{9}, 1, \frac{1}{9} \right)
 \end{aligned}$$

۶.۸- تغییر متغیرها در انتگرال های چند گانه Change of Variables in Multiple Integrals

در بخش ۶.۲ برای محاسبه انتگرال ها بجای استفاده از مختصات مستطیلی ، از مختصات قطبی زیر استفاده کردیم.

$$\iint_R f(x,y) dA$$

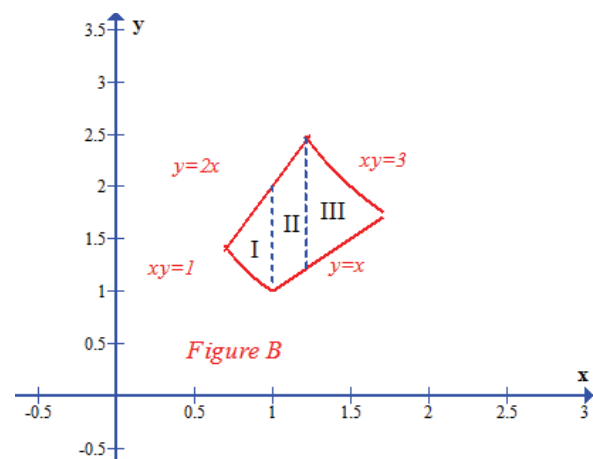
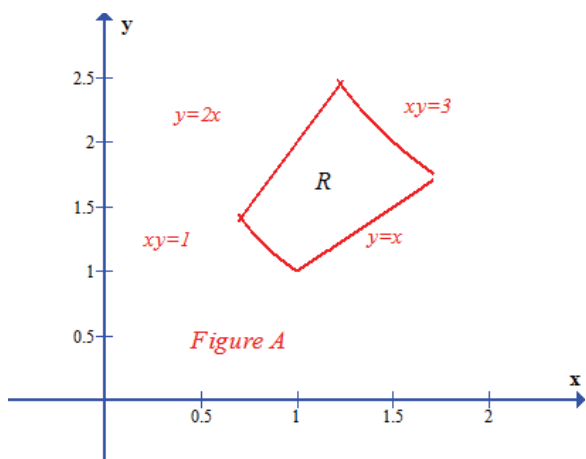
$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

در بخش های ۶.۵ و ۶.۶ بجای استفاده از مختصات مستطیلی ، از مختصات استوانه ای و کروی ، برای محاسبه انتگرال ها استفاده کردیم. این نوع فرمول ها را فرمول های تغییر متغیر ها می نامند. زیرا آنها به ما این فرصت را می دهند ، که انتگرال ها را ، در یک سیستم مختصات ، مغایر با سیستم مختصات داده شده ، محاسبه کنیم.

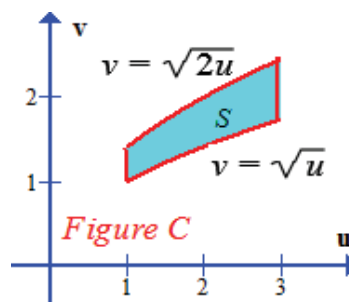
در این بخش ، در مورد فرمول های کلی تر بحث می کنیم. فایده این فرمول ها ، هنگامی آشکار می شود ، که می خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم. در این انتگرال R ناحیه ای است مانند تصویر

A

$$\iint_R 7xy dA$$



البته می توانیم ، انتگرال بالا را از طریق مختصات مستطیلی ، محاسبه کنیم. اما باید سه انتگرال مکرر جداگانه روی ناحیه های I, II, III که در تصویر B مشاهده می کنید ، انجام دهیم. اما ، همانطور که در مثال ۵ خواهید دید ، انتگرال بالا را روی ناحیه S که در تصویر C ملاحظه می کنید ، انجام می دهیم.



بخاطر آورید که در مبحث انتگرال واحد ، قاعده جانشینی را بکار می بردیم ، مانند مثال زیر

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_c^d f(u) du \quad , \quad u = g(x)$$

در فرمول بالا x ها را به u ها تبدیل کردیم. می خواهیم کاری شبیه این را برای انتگرال های دو گانه و سه گانه انجام دهیم. ابتدا مفهوم چند لغات را توضیح دهیم. **معادله هایی که تغییر متغیر ها را تعریف می کنند ، تبدیل Transformation می نامیم.**

معمولا ، با یک ناحیه R در مختصات xy شروع می کنیم و آنرا به یک ناحیه در مختصات uv تبدیل می کنیم.

مثال ۱ - اگر R بیضی $x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$ باشد ، آنرا به $x = \frac{u}{2}, y = 3v$ تبدیل کنید.

پاسخ

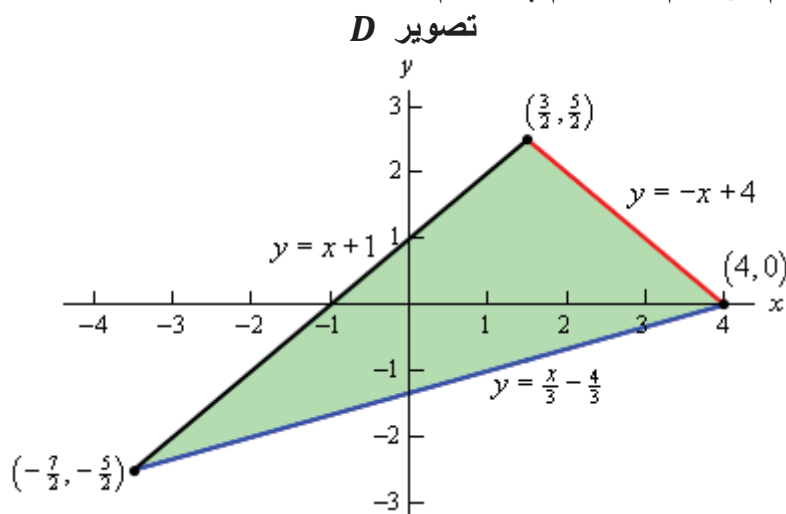
$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{(3v)^2}{36} &= 1 \\ \frac{u^2}{4} + \frac{9v^2}{36} &= 1 \\ u^2 + v^2 &= 4 \end{aligned}$$

پس با یک بیضی شروع کردیم ، در نهایت یک دیسک به شعاع ۲ بدست آوردیم.

مثال ۲ - اگر R ناحیه محصور توسط $y = -x + 4$ و $y = x + 1$ و $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$ باشد ، آنرا به $x = \frac{1}{3}(u + v)$ و $y = \frac{1}{3}(u - v)$ تبدیل کنید.

پاسخ

ابتدا ناحیه R را رسم می کنیم ، تا ببینیم چه داریم. تصویر D



پس یک مثلث داریم. باید عمل تبدیل را روی هر یک از اضلاع مثلث انجام دهیم. ابتدا روی ضلع زیر کار می کنیم.

$$y = -x + 4$$

پس داریم.

$$\frac{1}{4}(u-v) = -\frac{1}{4}(u+v) + 4$$

$$u-v = -u-v+8$$

$$2u = 8$$

$$u = 4$$

حالا روی $y = x + 1$ عمل تبدیل را انجام می دهیم.

$$\frac{1}{4}(u-v) = \frac{1}{4}(u+v) + 1$$

$$u-v = u+v+2$$

$$-2v = 2$$

$$v = -1$$

و در نهایت روی $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$ عمل تبدیل را انجام می دهیم.

$$\frac{1}{4}(u-v) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}(u+v)\right) - \frac{4}{3}$$

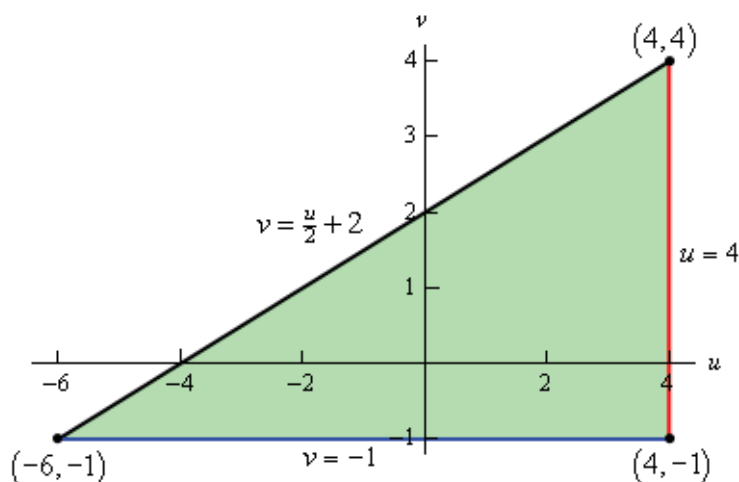
$$3u - 3v = u + v - 8$$

$$4v = 2u + 8$$

$$v = \frac{u}{2} + 2$$

پس تا حدودی، معادله ساده تری بدست آوردیم. ناحیه جدید را در تصویر E ملاحظه می کنید.

تصویر E



یک مثلث بدست آوردیم. اما خیلی تمز تر و ساده تر. البته ، نباید انتظار داشت که هنگام تبدیل یک ناحیه به ناحیه دیگر ، ناحیه ای شبیه ناحیه اول بدست آوریم. مثلاً ممکن است بعد از تبدیل یک مثلث ، یک ناحیه با اضلاع منحنی بدست آوریم ، که شبیه ناحیه اولیه نباشد.

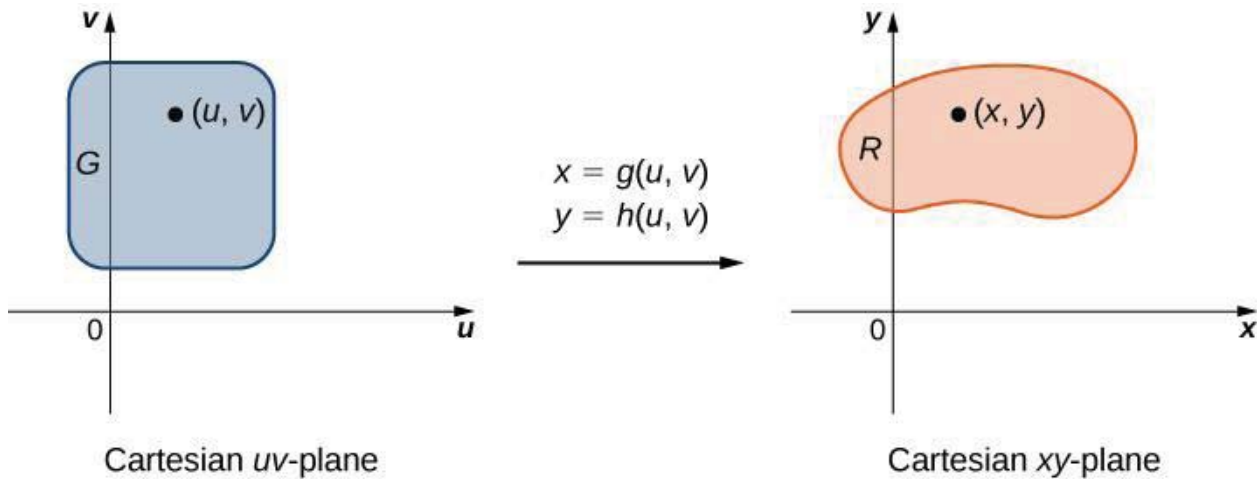
تبدیل های هم سطح Planar Transformations

تبدیل یک ناحیه مثلاً G در یک صفحه مختصات به یک ناحیه دیگر مثلاً R در یک صفحه مختصات دیگر ، همراه با تغییر متغیر ها را ، تبدیل هم سطح می نامند و آنرا با نماد T نشان می دهند. یک تابع یک به یک است. تصویر F در تصویر F ، ناحیه G در مختصات uv به یک ناحیه R در مختصات xy تبدیل شده است با تغییر متغیر های

$$x = g(u, v) \text{ و } y = h(u, v)$$

هر کدام از این تابع ها باید دارای مشتق های پاره ای مرتبه اول پیوسته باشند.

تصویر F



ژاکوبین Jacobian

تبدیل ژاکوبین $T(u, v)$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$j(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (1)$$

مثال ۳- فرض کنید تبدیل T مطابق زیر تعریف شده باشد.

$$x = \frac{u}{v} \quad \text{و} \quad y = v$$

ژاکوبین T را پیدا کنید.

پاسخ

طبق تعریف داریم.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

قضیه

فرض می کنیم S یک مجموعه در صفحه مختصات uv و R یک مجموعه در صفحه مختصات xy باشند. و فرض می کنیم هر دو دارای مرز های قطعه قطعه پیوسته باشند و فرض می کنیم T یک تبدیل از S به R مطابق تعریف زیر باشد.

$$x = g_1(u, v) \quad \text{و} \quad y = g_2(u, v)$$

به شرطی که g_1 و g_2 دارای مشتق های پاره ای پیوسته در S باشند. و فرض می کنیم هر نقطه (x, y) در R تصویر یک نقطه منحصر به فرد (u, v) در S باشد. یعنی T یک تابع یک به یک باشد. و فرض می کنیم سر تا سر S داشته باشیم $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ مگر در تعداد محدودی نقاط. و در نهایت فرض می کنیم f در R پیوسته باشد. پس داریم.

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA \quad (2)$$

حتما ملاحظه کرده ید که نماد T حرف اول Transformation است یعنی تبدیل و نماد J حرف اول Jaconian است.

میدانید که برای تغییر از مختصات مستطیلی به مختصات قطبی ، داریم.

$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta \quad (3)$$

برای تبدیل فرمول های بالا داریم

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

لذا ، فرمول تغییر متغیر در مختصات قطبی مطابق زیر است.

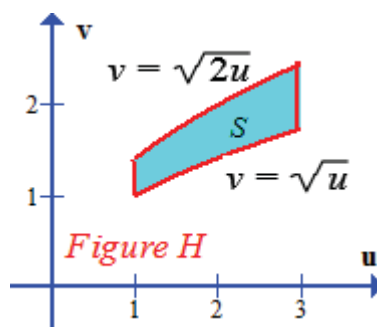
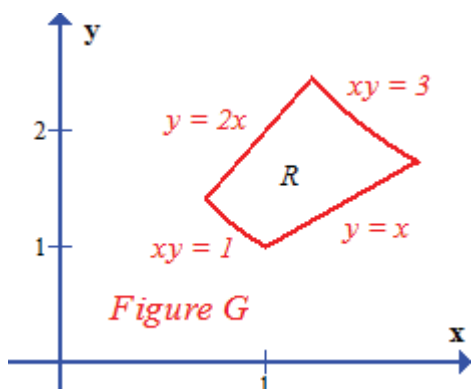
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA$$

مثال ۴ - اگر R ناحیه ای در ربع اول محصور بین خطوط $y = x$ و $y = 2x$ و هذلولی های $xy = 1$ و $xy = 3$ باشد، تصویر G ، و اگر T مطابق زیر تعریف شده باشد

$$(۴) \quad x = \frac{u}{v} \quad \text{و} \quad y = v$$

پس انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R x^3 y \, dA$$



پاسخ

همان طور که در مثال ۳ پیدا کردیم.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{v}$$

است. حالا ناحیه S را مشخص می کنیم که تصویر نقطه به نقطه R است، توسط T . برای نقاط روی هذلولی $xy = 1$ از شماره (۴) جانشین می کنیم. پس داریم.

$$1 = xy = \left(\frac{u}{v}\right) v = u$$

لذا، T خط $u = 1$ هذلولی $xy = 1$ را تصویر می کند. به همین طریق داریم.

$$3 = xy = \left(\frac{u}{v}\right) v = u$$

پس T خط $u = 3$ را هذلولی $xy = 3$ را تصویر می کند. سپس، برای نقاط روی خط $y = x$ داریم.

$$v = y = x = \frac{u}{v}$$

یا

$$v^2 = u \Rightarrow v = \sqrt{u}$$

به همین طریق برای $y = 2x$ داریم.

$$v = y = 2x = 2\left(\frac{u}{v}\right)$$

یا

$$v^2 = 2u \Rightarrow v = \sqrt{2u}$$

در نتیجه S ناحیه ای است در صفحه مختصات uv محصور توسط خطوط $u = 1$ و $u = 3$ و سهمی های $v = \sqrt{u}$ و $v = \sqrt{2u}$ ، تصویر H حالا فرمول شماره (۲) را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} \iint_R x^3 y \, dA &= \iint_S \left(\frac{u}{v}\right)^3 v \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dA \\ &= \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} \frac{u^3}{v^3} v \frac{1}{v} dv du = \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} \frac{u^3}{v^3} dv du \\ &= \int_1^3 -\frac{1}{2} \frac{u^3}{v^2} \Big|_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} du = \int_1^3 \frac{1}{4} u^2 du = \frac{1}{12} u^3 \Big|_1^3 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

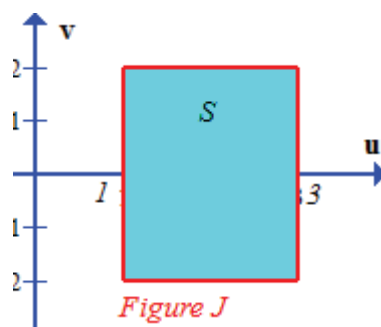
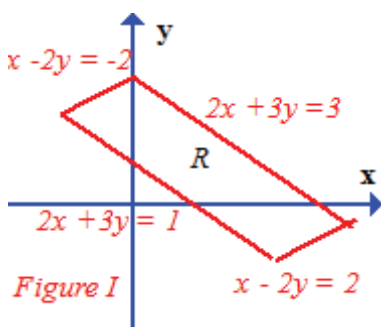
فرض می کنیم یک انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y) \, dA$ داریم که در آن یا f یا R بغرنج است، بطوری که نمی توانیم به اسانی انتگرال را محاسبه کنیم. و فرض می کنیم هیچ نوع تبدیلی پیش بینی نشده است. پس مطابق زیر عمل می کنیم.

- ۱ - اطلاعات انتگرال را برای تعریف یک تبدیل T_R از R به مختصات uv استفاده می کنیم.
- ۲ - تصویر S را که در اثر عمل کرد تبدیل از R بدست آمده، مشخص می کنیم.
- ۳ - معادله های T_R را برای x و y حل می کنیم تا یک تبدیل T از S به R بدست آوریم.
- ۴ - ژاکوبین $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ محاسبه می کنیم.

۵ - انتگرال $\iint_R f(x,y) \, dA$ را محاسبه می کنیم. مثال زیر مراحل بالا را بکار می برد.

مثال ۵ - انتگرال $\iint_R 7xy \, dA$ را پیدا کنید. مرزهای R متوازی الاضلاع است با اضلاع $2x + 3y = 1, 2x + 3y = 3, x - 2y = 2, x - 2y = -2$

تصویر I



پاسخ

همان طور که در تصویر I ملاحظه می کنید، ناحیه R برای این که روی آن انتگرال گرفت ساده نیست. چون $2x + 3y$ و $x - 2y$ در توصیف R آمده است، پس T_R مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$u = 2x + 3y, \quad v = x - 2y \quad (5)$$

برای پیدا کردن تصویر S که از R تحت عمل کرد T_R بدست آمده، متوجه می شویم که طبق تعریف ما از u ، تصویرهای خطوط $2x + 3y = 1$ و $2x + 3y = 3$ ، خطوط $u = 1$ و $u = 3$ هستند. به همین طریق، تصویرهای خطوط $x - 2y = 2$ و $x - 2y = -2$ خطوط $v = 2$ و $v = -2$ هستند. لذا S یک ناحیه مستطیلی است که محدود شده توسط خطوط $u = 1$ و $u = 3$ و $v = 2$ و $v = -2$ ، تصویر J .

حالا معادله های شماره (۵) را برای x و y حل می کنیم. پس داریم.

$$u = 2x + 3y$$

$$v = x - 2y$$

سعی می کنیم x را حذف کنیم. لذا معادله دوم را در -2 ضرب می کنیم و سپس معادله ها را با هم جمع می کنیم.

$$u - 2v = 2x + 3y - 2x + 4y = 7y$$

حالا سعی می کنیم y را حذف کنیم. لذا معادله اول را در 2 و معادله دوم را در 3 ضرب می کنیم و سپس معادله ها را با هم جمع می کنیم.

$$2u + 3v = 4x + 6y + 3x - 6y = 7x$$

پس داریم.

$$x = \frac{1}{7}(2u + 3v) \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{7}(u - 2v)$$

فرمول های بالا یک تبدیل T از R به S تعریف می کند. حالا داریم.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right) - \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}$$

پس بر اساس (۲) داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R 7xy \, dA &= \iint_S [(2u + 3v)] \left(\frac{1}{7}(u - 2v) \right) \left| -\frac{1}{7} \right| dA \\ &= \iint_S \frac{1}{49} (2u^2 - uv - 6v^2) \, dA \\ &= \int_1^3 \int_{-2}^2 \frac{1}{49} (2u^2 - uv - 6v^2) \, dv \, du = \frac{1}{49} \int_1^3 \left(2u^2 v - \frac{1}{2} uv^2 - 2v^3 \right) \Big|_{-2}^2 du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{49} \int_1^3 (8u^2 - 32) du = \frac{1}{49} \left(\frac{8}{3} u^3 - 32u \right) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{1}{49} \left(72 - 96 - \frac{8}{3} + 32 \right) = \frac{16}{147}
 \end{aligned}$$

انتگرال گیری روی ناحیه های بیضوی ، اغلب آسان تر است اگر آنها را به ناحیه های دایره ای تبدیل کنیم و سپس اگر ممکن باشد به مختصات قطبی تبدیل کنیم.

مثال ۶ - اگر R ناحیه ای محصور توسط بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ باشد ، تصویر K ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA$$

پاسخ

تابع تبدیل T_R را مطابق زیر تعریف می کنیم.

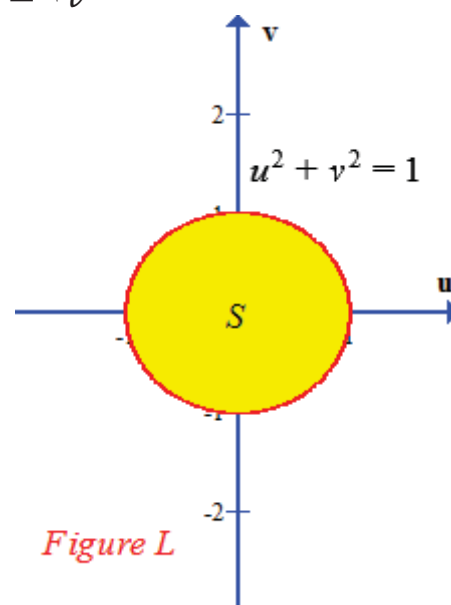
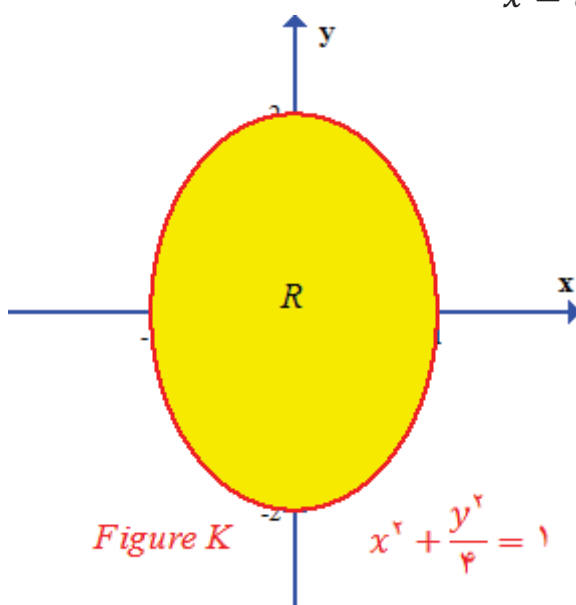
$$u = x \text{ و } v = \frac{1}{2}y \quad (۶)$$

این تبدیل ، بیضی را نقطه به نقطه به دایره انتقال می دهد. زیرا داریم.

$$1 = x^2 + \frac{y^2}{4} = u^2 + v^2$$

پس S یک دیسک واحد است یعنی $u^2 + v^2 \leq 1$ ، تصویر L شماره (۶) را برای x و y حل می کنیم. پس داریم.

$$x = u \text{ و } y = 2v$$



$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA = \iint_S (u^2 + (2v)^2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA = \iint_S (u^2 + 4v^2) 2 dA$$

حالا به مختصات قطبی تبدیل می کنیم ، با

$$u = r \cos \theta \quad \text{و} \quad v = r \sin \theta$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_S (u^2 + 4v^2) 2 dA &= 2 \iint_S (u^2 + v^2 + 3v^2) dA \\ &= 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 (r^2 + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 + 3 \sin^2 \theta) r^2 dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left(1 + 3 \sin^2 \theta \right) \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (1 + 3 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left[\theta + 3 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$

گاهی اوقات لازم نیست انتگراند را برای x و y حل کنیم. زیرا می توان ثابت کرد

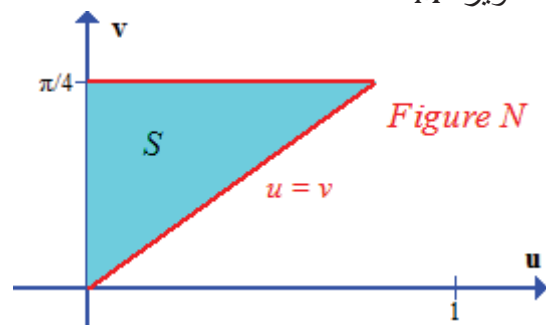
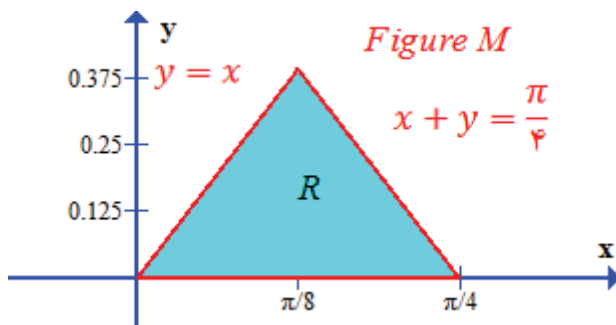
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \quad (۷)$$

مثلا ۷ - انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} dA$$

اگر R یک ناحیه مثلثی شکل محصور توسط خطوط $y = x$ و $y = 0$ و $x + y = \frac{\pi}{4}$ باشد.

تصویر M



پاسخ

انتگراند خیلی بغرنج و پیچیده است و محاسبه انتگرال تقریباً غیر ممکن است، برای ساده کردن انتگراند، T_R را مطابق زیر تعریف می کنیم

$$u = x - y \quad \text{و} \quad v = u + y$$

حالا ناحیه S را محاسبه می کنیم. اگر $y = 0$ باشد، پس $u = x = v$ است، بطوری که تصویر خط $y = 0$ ، خط $u = v$ است. اگر $y = x$ باشد، پس $u = x - y = 0$ است، لذا تصویر خط $y = x$ ، خط $u = 0$ است. و اگر $x + y = \frac{\pi}{4}$ باشد، پس $v = x + y = \frac{\pi}{4}$ است، لذا تصویر

خط $x + y = \frac{\pi}{4}$ ، خط $v = \frac{\pi}{4}$ است. پس تصویر R یعنی ناحیه S ، یک مثلث است محصور بین

خطوط $u = v$ و $u = 0$ و $v = \frac{\pi}{4}$ است. تصویر $N \cdot$ حالا طبق تعریف داریم.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) = 2$$

و در نهایت

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} dA &= \iint_S \frac{\sin u}{\cos v} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^v \frac{\sin u}{\cos v} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{\cos u}{\cos v} \right]_0^v dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-1 + \frac{1}{\cos v} \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec v - 1) dv \\ &= \frac{1}{2} (\ln|\sec v + \tan v| - v) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left[\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

تغییر متغیرها برای انتگرال های سه گانه Change of Variables for Triple Integrals

اگر تبدیل T مطابق زیر تعریف شده باشد،

$$x = g_1(u, v, w), \quad y = g_2(u, v, w), \quad z = g_3(u, v, w)$$

و اگر T ناحیه D در فضای xyz را به یک ناحیه E در فضای uvw تبدیل و یا تصویر کند، پس فرمول انتگرال سه گانه مطابق زیر است.

$$\iiint_D f(x,y,z) dV = \iiint_E f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dV \quad (8)$$

و

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (9)$$

شماره (۹) را ژاکوبین تبدیل T می نامند.

مثال ۸ - با استفاده از فرمول شماره (۸)، فرمول انتگرال در مختصات کروی که در قضیه بخش ۶.۶ آمده، استخراج کنید.

پاسخ

اینجا، داریم.

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

پس بر اساس شماره (۹) داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin \varphi \cos \theta (0 + \rho^2 \sin^2 \varphi \cos \theta) \\ &\quad + \rho \cos \varphi \cos \theta (\rho \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta - 0) \\ &\quad - \rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin^2 \varphi \sin \theta - \rho \cos^2 \varphi \sin \theta) \\ &= \rho^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) \\ &= \rho^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

چون $0 \leq \varphi \leq \pi$ است، لذا $\rho^2 \sin \varphi \geq 0$ است، پس بر اساس (۸) داریم.

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_E f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

اگر ناحیه E در فضای $\rho\varphi\theta$ مطابق زیر تعریف شده باشد،

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq \varphi \leq h_2(\theta), \quad F_1(\varphi, \theta) \leq \rho \leq F_2(\varphi, \theta)$$

و اگر h_1, h_2, F_1, F_2 پیوسته باشند و اگر $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ و $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \pi$

$0 \leq F_1 \leq F_2$ باشد، پس شماره (۸) می شود.

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{F_1(\varphi, \theta)}^{F_2(\varphi, \theta)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

که همان فرمول قضیه بخش ۶.۶ است.

تمرینات ۶.۸

در تمرینات زیر تبدیل ژاکوبین را پیدا کنید.

$$۱) \quad x = 3u - 4v, y = \frac{1}{4}u + \frac{1}{6}v$$

$$۲) \quad x = uv, y = u^2 + v^2$$

$$۳) \quad x = e^v, y = ue^v$$

$$۴) \quad x = au, y = bv, z = w$$

در تمرینات زیر با استفاده از تبدیل داده شده ، انتگرال را محاسبه کنید.

$$۵) \quad \iint_R \frac{y}{x-3y} dA$$

اگر R ناحیه ای است محصور بین خطوط $y = 1$ و $y = \frac{1}{4}x$ و $x - 3y = e$ فرض کنید $x = 3u + v$ و $y = u$ است.

$$۶) \quad \iint_R xy^2 dA$$

اگر R ناحیه ای است محصور بین خطوط $x - y = 2$ و $x - y = -1$ و $2x + 3y = 1$ و $2x + 3y = 0$ فرض کنید $x = \frac{1}{5}(3u + v)$ و $y = \frac{1}{5}(v - 2u)$ است.

در تمرینات زیر با تغییر مناسب متغیر ها ، انتگرال را محاسبه کنید.

$$۷) \quad \iint_R \left(\frac{x-2y}{x+2y} \right)^3 dA$$

اگر R ناحیه ای محصور بین خطوط $x - 2y = 1$ و $x - 2y = 2$ و $x + 2y = 1$ و $x + 2y = 3$ باشد.

$$۸) \quad \iint_R x^2 dA$$

اگر R ناحیه محصور توسط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد.

۹ - مساحت ناحیه R را با استفاده از تبدیل داده شده ، پیدا کنید. R ناحیه ای است در ربع اول محصور توسط

$$x^2 - y^2 = a^2, x^2 - y^2 = b^2, y = 0, y = \frac{1}{4}x$$

در صورتی که $b \geq a \geq 0$ باشد و فرض کنید $x = u \cosh v$ و $y = u \sinh v$ باشد.

پاسخ تمرینات ۶.۸

در تمرینات زیر تبدیل ژاکوبین را پیدا کنید.

$$۱) \quad x = ۳u - ۴v, y = \frac{۱}{۲}u + \frac{۱}{۶}v$$

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & -۴ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۶} \end{vmatrix} = (۳)\left(\frac{۱}{۶}\right) - (-۴)\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۵}{۲}$$

$$۲) \quad x = uv, y = u^۲ + v^۲$$

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ ۲u & ۲v \end{vmatrix} = (v)(۲v) - (u)(۲u) = ۲v^۲ - ۲u^۲$$

$$۳) \quad x = e^v, y = ue^v$$

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^v \\ e^v & ue^v \end{vmatrix} = (0)(ue^v) - (e^v)(e^v) = -e^{۲v}$$

$$۴) \quad x = au, y = bv, z = w$$

$$j(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= a[(b)(۱) - (0)(۱)] + 0[(0)(0) - (0)(۱)] + 0[(0)(0) - (b)(0)] = ab$$

در تمرینات زیر با استفاده از تبدیل داده شده ، انتگرال را محاسبه کنید.

$$۵) \quad \iint_R \frac{y}{x-3y} dA$$

اگر R ناحیه ای است محصور بین خطوط $y = ۱$ و $y = \frac{۱}{۴}x$ و $x - ۳y = e$ فرض کنید $x = ۳u + v$ و $y = u$ است.

پاسخ

ابتدا $j(u, v)$ را پیدا می کنیم.

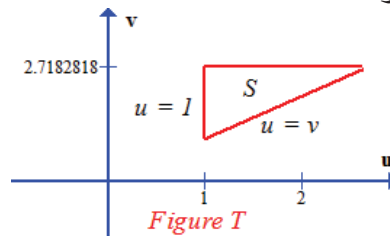
$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (3)(0) - (1)(1) = -1$$

برای پیدا کردن S ملاحظه می کنید که برای $y = 1$ داریم $y = u$ و برای $x = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{4}x$

داریم $u = \frac{1}{4}(3u + v)$ بطوری که $\frac{1}{4}u = \frac{1}{4}v$ و یا $u = v$

برای $x - 3y = e$ داریم $(3u + v) - 3v = e$ و یا $v = e$ در نتیجه $u = 1$

و $u = v$ و $v = e$ است. تصویر T



$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x}{x-3y} dA &= \iint_S \frac{u}{(3u+v)-3u} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \\ &= \int_1^e \int_1^v \frac{u}{v} |-1| du dv = \int_1^e \frac{u^2}{2} \frac{1}{v} \bigg|_1^v dv \\ &= \int_1^e \left(\frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \right) dv = \left(\frac{v^2}{4} - \frac{1}{2} \ln v \right) \bigg|_1^e = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

۶) $\iint_R xy^2 dA$

اگر R ناحیه ای است محصور بین خطوط $x - y = 2$ و $x - y = -1$ و $2x + 3y = 1$ و $2x + 3y = 0$

فرض کنید $x = \frac{1}{5}(3u + v)$ و $y = \frac{1}{5}(v - 2u)$ است.

پاسخ

ابتدا $j(u, v)$ را پیدا می کنیم.

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

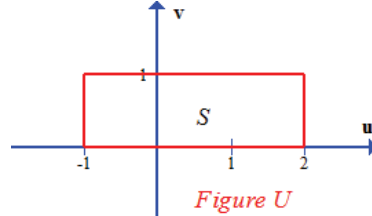
برای پیدا کردن S ، مشاهده می کنیم که برای $x - y = 2$ داریم $\frac{1}{5}(3u + v) - \frac{1}{5}(v - 2u) = 2$ بطوری که $u = 2$ است.

برای $x - y = -1$ داریم $\frac{1}{5}(3u + v) - \frac{1}{5}(v - 2u) = -1$ بطوری که $u = -1$ است.

برای $2x + 3y = 1$ داریم $\frac{2}{5}(3u + v) + \frac{3}{5}(v - 2u) = 1$ بطوری که $v = 1$ است.

برای $2x + 3y = 0$ داریم $\frac{2}{5}(3u + v) + \frac{3}{5}(v - 2u) = 0$ بطوری که $v = 0$ است.

پس، S یک مربع است محصور بین خطوط $u = -1, u = 2, v = 0, v = 1$ تصویر U



$$\begin{aligned} \iint_R xy^2 dA &= \iint_S \left[\frac{1}{5}(3u + v) \right] \left[\frac{1}{5}(v - 2u) \right]^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA \\ &= \iint_S \frac{1}{125} (3u + v)(v^2 - 4uv + 4u^2) \left(\frac{1}{5} \right) dA \\ &= \frac{1}{625} \int_0^1 \int_{-1}^2 (12u^3 - 8u^2v - uv^2 + v^3) du dv \\ &= \frac{1}{625} \int_0^1 \left(3u^4 - \frac{8}{3}u^3v - \frac{1}{2}u^2v^2 + uv^3 \right) \Big|_{-1}^2 dv \\ &= \frac{1}{625} \int_0^1 \left(45 - 24v - \frac{3}{2}v^2 + 3v^3 \right) dv \\ &= \frac{1}{625} \left(45v - 12v^2 - \frac{1}{2}v^3 + \frac{3}{4}v^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{133}{2500} \end{aligned}$$

در تمرینات زیر با تغییر مناسب متغیر ها ، انتگرال را محاسبه کنید.

$$۷) \iint_R \left(\frac{x-2y}{x+2y} \right)^3 dA$$

اگر R ناحیه ای محصور بین خطوط $x-2y=1$ و $x-2y=2$ و $x+2y=1$ و $x+2y=3$ باشد.

پاسخ

فرض می کنیم T_R را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$u = x - 2y \quad \text{و} \quad v = x + 2y$$

برای پیدا کردن S می بینیم

برای $u=1$ داریم $x-2y=1$

برای $u=2$ داریم $x-2y=2$

برای $v=1$ داریم $x+2y=1$

برای $v=3$ داریم $x+2y=3$

پس S یک ناحیه مستطیلی در صفحه uv است ، محصور توسط خطوط

$$u=1, u=2, v=1, v=3$$

حالا $j(u,v)$ را پیدا می کنیم.

$$j(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (-2)(1) = 4$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{x-2y}{x+2y} \right)^3 dA &= \iint_S \left(\frac{u}{v} \right)^3 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA \\ &= \int_1^2 \int_1^3 \frac{u^3}{v^3} \frac{1}{4} du dv = \int_1^2 \frac{1}{v^3} \frac{u^4}{16} \bigg|_1^2 dv = \int_1^2 \frac{15}{16} \frac{1}{v^3} dv \\ &= \frac{-15}{32} \frac{1}{v^2} \bigg|_1^2 = -\frac{15}{32} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$۸) \iint_R x^2 dA$$

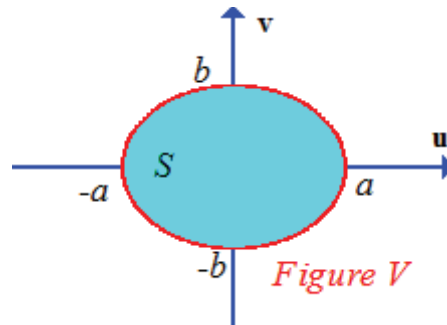
اگر R ناحیه محصور توسط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد.

پاسخ

فرض می کنیم T_R مطابق زیر تعریف شود.

$$u = \frac{x}{a} \quad \text{و} \quad v = \frac{y}{b}$$

برای پیدا کردن S مشاهده می کنیم که برای $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ داریم $u^2 + v^2 = 1$ پس S یک دیسک واحد $u^2 + v^2 \leq 1$ در سیستم uv تصویر V



حالا $j(u, v)$ را پیدا می کنیم.

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right) - (0)(0) = \frac{1}{ab}$$

معادله $u = \frac{x}{a}$ را برای x حل می کنیم. پس داریم $x = au$ لذا

$$\iint_R x^2 dA = \iint_S (au)^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA = \iint_S a^2 u^2 (ab) dA = \iint_S a^3 b u^2 dA$$

به مختصات قطبی تبدیل می کنیم با

$$u = r \cos \theta \quad \text{و} \quad v = r \sin \theta$$

پس داریم.

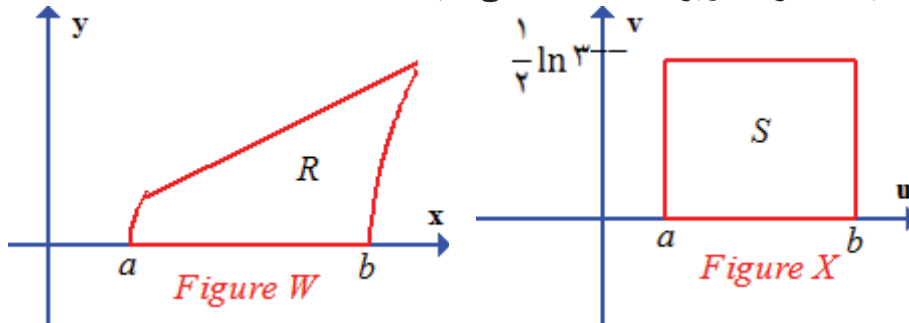
$$\begin{aligned} \iint_R x^2 dA &= \iint_S a^3 b u^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^3 b (r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} a^3 b (\cos^2 \theta) \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3 b}{4} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^3 b}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{a^3 b}{4} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^3 b r}{4} \end{aligned}$$

۹ - مساحت ناحیه R را با استفاده از تبدیل داده شده ، پیدا کنید. R ناحیه ای است در ربع اول محصور توسط

$$x^2 - y^2 = a^2, x^2 - y^2 = b^2, y = 0, y = \frac{1}{4}x$$

در صورتی که $b \geq a \geq 0$ باشد و فرض کنید $x = u \cosh v$ و $y = u \sinh v$ باشد. پاسخ

ناحیه R در تصویر W و ناحیه S در تصویر X ملاحظه می کنید.



$j(u, v)$ را پیدا می کنیم.

$$j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh v & u \sinh v \\ \sinh v & u \cosh v \end{vmatrix}$$

$$= (\cosh v)(u \cosh v) - (u \sinh v)(\sinh v) = u$$

چون $a > 0$ است ، پس داریم $x^2 \geq x^2 - y^2 \geq a^2 > 0$ بطوری که $u > 0$ است. برای پیدا کردن S , ملاحظه می کنیم که

برای $x^2 - y^2 = a^2$ داریم $a^2 = u^2 \cosh^2 v - u^2 \sinh^2 v = u^2$ پس ، چون $a \geq 0$ و $u \geq 0$ است ، پس $u = a$ است.

به همین طریق اگر $x^2 - y^2 = b^2$ باشد ، داریم $u = b$ است.

برای $y = 0$ داریم $0 = u \sinh v$ پس چون $u \geq 0$ است ، داریم $v = 0$ است.

برای $y = \frac{1}{4}x$ داریم $\frac{1}{4}u \cosh v = u \sinh v$ پس چون $u > 0$ است ، داریم

$$\sinh v = \frac{1}{4} \cosh v$$

بطوری که $e^v - e^{-v} = \frac{1}{4}(e^v + e^{-v})$ و یا $\frac{1}{4}e^v = \frac{1}{4}e^{-v}$ یا $e^{2v} = 3$ یا $v = \frac{1}{2} \ln 3$

در نتیجه S یک ناحیه مستطیلی در سیستم uv است محصور توسط خطوط زیر.

$$u = a, u = b, v = 0, v = \frac{1}{2} \ln 3$$

و در نهایت

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_{\tilde{R}} 1 \, dA = \iint_{\tilde{S}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA \\
 &= \int_a^b \int_0^{(1/r) \ln r} u \, dv \, du = \int_a^b \frac{1}{r} (\ln r) u \, du = \frac{1}{r} (\ln r) \frac{u^2}{2} \Big|_a^b \\
 &= \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \ln r
 \end{aligned}$$

بنام خدا

واژه نامه ریاضی انگلیسی به فارسی

English to Persian

Mathematics Dictionary

تألیف و ترجمه

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ - ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ - ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

Abolish	محو کردن
About	در هر دو طرف - اطراف
Abscissa	طول
Absolute Convergence	همگرایی مطلق
Absolute Convergence Series	سری همگرایی مطلق
Absolute Convergence Test	آزمون همگرایی مطلق
Absolute Value	قدر مطلق
Absolutely Convergent	بطور مطلق همگرا - مطلقا همگرا
Acceleration	شتاب
Accumulated Value	مقدار جمع شده - مقدار ذخیره شده - مقدار افزوده شده
Accuracy	صحت - دقت
Acute Angle	زاویه حاد
Add	جمع کردن - اضافه کردن
addend	عدد افزوده شده - عدد مضاعف
Additive Identity	عدد خنثی در جمع
Additive Inverse	قرینه - مخالف
Adjacent Angles	زوایای مجاور
Admit	قبول کردن - پذیرفتن
Airstrip	باند فرودگاه
Algebraic Expression	عبارت جبری
Algebraically	به زبان جبری
Algorithm	الگوریتم - هر شیوه علمی برای حل مسائل
Align	تنظیم کردن یا شدن
Along	در امتداد یا در طول
Alternate	تناوب - یک درمیانی
Alternate	تناوب
Alternate Angles	زوایای متبادل
Alternating	متناوب
Alternating Harmonic Series	سری توافقی متناوب
Alternating Series	سری متناوب - سری یک در میان مثبت و منفی

Alternating Series Test	آزمون سری متناوب
Alternative Test	آزمون متناوب
Altitude	ارتفاع - فراز - بلندی
Amplitude	دامنه نوسان
Analyze	تجزیه و تحلیل کردن
Angle Measure	اندازه زاویه
Angle of Elevation	زاویه فراز نما
Angular Speed	سرعت زاویه ای
Animation	زنده سازی - کارتون
Antiderivative	ضد مشتق
Approach	نزدیک شدن
Approximate	تخمین زدن
Arbitrary	اختیاری
Arc Length Function	تابع طول قوس یا کمان
Arch	طاق
Architecture	معماری
Area	مساحت
Arithmetic Sequence	دنباله حسابی
Arrangement	ارایش - قرار دادن
Array	آرایه - آرایش منظم شماره ها در ردیف یا ستون است
Assert	تصریح کردن - تأیید کردن
Assign	تخصیص دادن
Assign	تعیین کردن - اختصاص دادن
Assign	تعیین کردن تخصیص دادن
Assign	اختصاص دادن
Associative Property	خاصیت شرکت پذیری
Astronomy	ستاره شناسی
Asymptote	خط مجانب - تانژانت منحنی در بینهایت
At Least	حد اقل
At Most	حد اکثر
Average	معدل - میانگین
Axes	محورها

Axis	محور
Bar Graph	نمودار میله ای
Base	قاعده
Base	پایه
Basic	پایه - اصلی - ساده
Basic	بنیادی
Bearing	موقعیت
Behavior	عمل کردن - رفتار کردن
Between	ما بین
Binomial	دو جمله ای
Binomial Coefficient	ضریب دو جمله ای
Binormal	نرمال دوم - قائم دوم
Bisection Method	روش نصف کردن بازه
Boundary	کرانه - مرز - لبه
Boundary Line	خط مرزی
Boundary Line	خط مرزی
Boundary Point	نقطه مرزی
Boundary Point of a Set	نقطه مرزی یک مجموعه
Bounded	کران دار
Bounded Above	از طرف بالا کران دار
Bounded Below	از طرف پائین کران دار
Braces	آکولاد ها { }
Brackets	کروشه ها []
Break Even	بی سود و زیان شدن
Buoyant Force	نیروی شناور
Calculate	محاسبه - حساب کردن
Calculus	حسابان
Calculus	ریاضیات جامع - حسابان
Cancel	حذف کردن
Carbon Dating	تعیین قدمت اجسام کربن دار
Cardioid	منحنی دل گون - منحنی قلب شکل
Cartesian Coordinate System	محورهای مختصات
Cartesian Coordinates	مختصات دکارتی

Center	مرکز
Center of Gravity	مرکز ثقل
Central Angle	زاویه مرکزی
Central Angle	زاویه مرکزی
Centripetal Acceleration	شتاب مرکز گرا
Centripetal Force	نیروی مرکز گرا - نیروی کشش از مرکز
Centroid	گرانیهگاه - مرکز ثقل
Charge	بار نقطه ای
Charge	بار الکتریکی
Charge Density	چگالی بار
Circuit	مدار
Circular Functions	توابع دورانی
Circumference	محیط (دایره)
Circumscribe	محیط کردن
Closed Interval	بازه بسته
Coefficient	ضریب
Coincide	منطبق بودن
Coincide	منطبق بودن
Coincident	منطبق
Column	ستون
Combination	ترکیب
Combine	با هم پیوستن - توأم کردن - تلفیق کردن
Combine	ادغام کردن - تلفیق کردن - یکی کردن
Combine	تلفیق کردن
Combined	ترکیبی - مرکب
Comet	ستاره دنباله دار
Common	مشترک
Common	مشترک
Common Ratio	نسبت مشترک - خارج قسمت مشترک
Commutative Property	خاصیت جابجائی
Comparison Test	آزمون مقایسه
Complement	متمم - مکمل
Complement Angles	زاویه های متمم

Complex Fraction	کسر مرکب
Complex Numbers	اعداد مرکب
Complex Rational Expression	عبارت گویای مرکب
Complicated	پیچیده - بغرنج
Component	مؤلفه - بخش - جز - سلزنده
Component	مؤلفه
Component	مؤلفه
Composed with	ترکیب شده با
Composite Function	تابع مرکب - تابع ترکیبی
Composite Function	تابع مرکب
Compound	مرکب - بهره پول و بهره متعلق به بهره آن را حساب کردن
Compound Interest	ربح مرکب
Compression	فشرده‌گی - تراکم
Compute	محاسبه کردن - حساب کردن
Concept	مفهوم
Conic Sections	مقاطع مخروطی
Conjugate	مزدوج
Connection	رابطه - پیوند
Consecutive	متوالی - پشت سر هم
Consistent	بی تناقض - سازگار
Constant	عدد ثابت - مقدار ثابت
Constant Term	جمله ثابت
Constraint	قید - محدودیت
Construct	ساختن
Contain	شامل بودن - دارا بودن
Contained	مشمول - مندرج - در بر
Continuity	پیوستگی
Continuous	پیوسته
Contradiction	تناقض
Convergent	همگرا
Coordinate	مختصات
Coordinate Plane	صفحه مختصات

Correspondence	مطابقت
Correspondence	تناظر - تطابق - ارتباط
Corresponding	هم نظیر - متناظر
Corresponding	متناظر
Corresponding Angles	زوایای متناظر
Co-terminal Angles	زوایای هم انتها
Cross Product	طرفین وسطین کردن
Cross Product	ضرب برداری
Cross Section	برش عرضی - مقطع
Cross Section Area	مساحت سطح مقطع
Cube	مکعب
Cube	مکعب
Cube Root	ریشه سوم
Cubed	توان سوم
Curvature	خمیدگی - انحنا
Curve	منحنی
Cusp	نقطه باز گشت
Cycle	دور تناوب
Cyclic	تناوبی
Cycloid	چرخ نما - سیکلوئید
Cylinder	استوانه
Dashed Line	خط چین
Deal with	پرداختن به
Decay	فرو کاست (مواد رادیو اکتیو) - کاهش
Decimal Places	ارقام اعشاری
Decompose	تجزیه کردن
Decrease	کم شدن - نزول کردن
Deduce	استنتاج کردن - نتیجه گرفتن
Define	تعریف کردن - معنی کردن
Define	مشخص کردن
Definite	مشخص - معین - داری حدود
Degenerate	تباهیده - تبهگون - نا مشخص
Degree	درجه

Degree	درجه
Denominator	مخرج
Density	چگالی - غلظت - تراکم
Dependent	وابسته
Dependent Variable	متغیر وابسته
Derivative	مشتق
Derive	استنتاج کردن - اشتقاق یافتن - استنباط کردن
Descending Order	به ترتیب نزولی
Design	طراحی
Designate	مشخص کردن
Determinant	مبین - دیترمینانت
Determinant	مبین - نمایانگر
Determinant of Matrix	دیترمینان ماتریس
Determine	تعیین کردن - حکم دادن
Determined	تعیین شده - مشخص شده - تعریف شده
Develop	بسط دادن
Diagonal	قطر - مورب - اریب
Diagram	نمودار
Diameter	قطر
Die	طاس تخته نرد
Differentiability	دیفرانسیبلی
Differentiable	مشتق پذیر - قابل مشتق گیری
Dimension	بعد
Dimensionless	بدون بعد
Direction	جهت
Direction Angle	زاویه راهنما
Direction Cosine	کسینوس راهنما
Direction Vector	بردار هادی
Directional	جهت دار
Directional Derivative	مشتق جهت دار
Directional Derivative of Function	مشتق تابع در یک راستا
Directrix	خط هادی - منحنی هادی
Discontinuous	نا پیوسته - گسسته

Discriminant	مشخص کننده - مجزا کننده
Discriminate	مشخص کردن - مجزا کردن
Disjoint	مجزا
Disk	دیسک صفحه گرد
Distance	فاصله - مسافت
Distinct	متفاوت - مجزا - متمایز
Distribute	پخش کردن - توزیع کردن
Distributive Property	خاصیت توزیعی
Divergent	واگرا
Diverse	متنوع - گوناگون
Divide	تقسیم کردن
Divide and Conquer	جدائی انداز و تسخیر کن
Dividend	مقسوم - بخشی
Divisor	مقسوم علیه - بخشیار
Domain	دامنه
Dot Product	ضرب نقطه ای - ضرب عددی
Double	مضاعف
Double Angle Formula	فرمول زاویه مضاعف
Double Integral	انتگرال دو گانه
Downward	به طرف پائین
Due	سر رسید - موعد پرداخت
Elastic Force	نیروی کشسانی
Element	عضو - عنصر
Eliminate	حذف کردن
Elimination	حذف
Ellipse	بیضی
Empty Set	مجموعه تهی
End Behavior	وضع انتهائی
Endpoint	نقطه انتهائی
Engage	پرداختن به
Equality	تساوی
Equally Likely Outcomes	پیش آمد های هم شانس - پیش آمد های با شانس مساوی

Equation	معادله - تساوی
Equator	خط استوا
Equilateral Triangle	مثلث متساوی الاضلاع
Equilibrium	تعادل
Equivalent	معادل - هم ارز - متشابه
Equivalent Equations	معادله های هم ارز - معادله های معادل
Establish	ثابت کردن - محقق کردن
Evaluate	ارزیابی کردن - مقدار عددی پیدا کردن
Even	زوج
Event	اتفاق
Exclude	در نظر نگرفتن
Exclusive	صرف - تنها - محض
Exert	اعمال کردن
Exhale	باز دم
Exhaustion	جزء به جزء
Expand	بسط دادن
Expand	بسط دادن - گستردن
Explicitly	بطور صریح بیان کردن
Exponent	توان
Exponential Equation	معادله مجهول القوه
Exponential Expression	عبارت توان دار - توان
Exponential Function	تابع مجهول القوه
Exponential Probability	احتمال مجهول القوه
Extraneous	نا مربوط
Factor	عامل
Factor	عامل - فاکتور - عامل مشترک - فاکتور گرفتن
Factorization	فاکتور گیری
Fair	سالم - بی عیب
False	غلط
Figure	شکل - تصویر
Finance	مالی - امور مالی
Finite Sum	جمع تعداد محدودی
Fit	جور کردن

Flatten	پهن شدن - صاف شدن
Foci	کانون ها
Focus	کانون
Formula	فرمول
Fraction	کسر
Frustum of a cone	مخروط سر و ته بریده - مخروط ناقص
Function	تابع
Fundamental	اساسی
Future Value	ارزش آینده
Gear	چرخ دنده
General Term	جمله عمومی
Generalized	تعمیم یافته
Generalized Comparison Test	آزمون مقایسه تعمیم یافته
Generalized Convergence Test	آزمون همگرایی تعمیم یافته
Generalized Ratio Test	آزمون نسبت تعمیم یافته
Generalized Root Test	آزمون ریشه تعمیم یافته
Geometric	هندسی
Geometric Sequence	دنباله هندسی
Globe	کره زمین
Golden Ratio	نسبت طلایی - عدد طلایی
Gradient	شیب - گرادیان - ضریب زاویه
Gradient of a Function	گرادیان تابع
Gradient of a Line	شیب خط
Gradient of a Straight Line	ضریب زاویه - ضریب زاویه خط راست
Graph	نمودار - نمایش هندسی
Greater Than	بزرگ تر از
Greatest Lower Bound	بزرگ ترین کران پائین
Group	گروه - گروه بندی کردن - دسته بندی کردن
Growth	رشد - رویش
Half-life	نیمه عمر (یک ماده رادیو اکتیو)
Half-Planes	نیم صفحه ها
Head	سر
Heat Index	شاخص گرما

Height	ارتفاع
Hemisphere	نیم کره
Hexagon	شش ضلعی
Horizontal	افقی
Horizontal Shift	جابجائی افقی
Hydrostatic Force	فشار هیدرو استاتیک
Hyperbola	هذلولی
Identical	کاملاً همانند
Identity	این همانی - خنثی
Image	تصویر - انعکاس - باز تاب
Imaginary Unit	واحد تصویری - واحد موهومی
Implicitly	بطور ضمنی بیان کردن
Improper	نا جور - غیر حقیقی - ناسره
In Term of	بر حسب
Include	به حساب آوردن
Included	گنجانده شده - شامل شده - به حساب آمده
Inclusive	شامل - به حساب آمده
Inconsistent	متناقض
Increase	زیاد شدن - صعود کردن
Independent Variable	متغیر مستقل
Index	نما - شاخص
Index	شاخص
Individual	شخصی
Individual Retirement Account	حساب باز نشستگی شخصی
Inequality	نا معادله - نا مساوی
Infinite	بی نهایت
Inhale	دم
Initial Side	ضلع اولیه
Initial Side	ضلع ابتدائی
Input	ورودی
Inscribe	محاط کردن
Inscribed	محاط
Instantaneous Velocity	سرعت لحظه ای

Integers	اعداد صحیح
Integral Multiples of x	مضرب های صحیح x
Integrand	عبارت داخل انگرال - انتگراند
Integration by Parts	انتگرال گیری جزء به جزء
Intensity	شدت - میزان - مقدار
Intercept	قطع کردن - میان بر - تقاطع
Interest	بهره - سود
Interest Compounded Monthly	بهره مرکب ماهانه
Interest Compounded Quarterly	بهره مرکب سه ماهه
Interest Compounded Semiannually	بهره مرکب شش ماهه
Interest Compounded Yearly	بهره مرکب سالانه
Interior Point	نقطه داخلی
Interior Point of a Set	نقطه داخلی یک مجموعه
Intermediate Value	مقدار میانی
Interpret	تفسیر کردن - توضیح دادن
Interpretation	تفسیر
Intersection	اشتراک
Intersection of Sets	اشتراک مجموعه ها
Intervals	بازه ها - میانین - فاصله
Introduction	مقدمه
Intuitively	بطور شهودی
Inverse Function	تابع معکوس
Invest	سرمایه گذاری کردن
Irrational Numbers	اعداد گنگ
Is Equal to	مساوی است با
Is not Equal to	مساوی نیست با
Isolate Point	نقطه منفرد - نقطه مجزا
Isosceles Triangle	مثلث متساوی الساقین
Iterated Integral	انتگرال مکرر
Jacobian	ژاکوبین
Jacobian Determinant	دترمینان ژاکوبین
Jacobian Transformation	تبدیل ژاکوبین
Joint	مشترک

Latus Rectum	طول قطر اطول - وتر کانونی - پارامتر سهمی
Launch	پرتاب کردن
LCD	کوچک ترین مخرج مشترک
Least	کوچک ترین
Least Upper Bound	کوچک ترین کران بالا
Left-Hand Limit	حد سمت چپ
Lemma	اصل موضوع - گزاره ای که درست فرض میشود
Length	طول
Less Than	کوچک تر از
Level Curve	منحنی تراز
Level Surface	رویه تراز - سطح تراز
Like Radicals	رادیکال های متشابه
Like Terms	جمله های متشابه
Likelihood	امکان - احتمال
Limit	حد
Limits of Integration	حدود انتگرال گیری
Line Segment	پاره خط
Linear	خطی
Linear Equations	معادله های خطی
Linear Equations in one Variable	معادله های خطی یک مجهولی
Linear Programming	برنامه ریزی خطی
Linear Speed	سرعت خطی
Local Maxima	ماکزیمم محلی
Local Minima	مینیمم محلی
Locate	مشخص کردن - تعیین کردن - نشان دادن
Location	مکان هندسی
Logarithmic Function	تابع لگاریتمی
Long Period	پروسه طولانی - دوره طولانی
Lower Bound	پائین کران
Lower Sum	مجموع پائین
Lowest Term	ساده ترین شکل (کسر)
Magnitude	قدر - مقدار
Major	اصلی

Map into	گسترش یک سو
Map onto	گسترش پوشا
Mapping	انتقال نقطه به نقطه
Marginal Cost	هزینه نهائی
Marginal Revenue	درآمد نهائی
Mass	جرم
Mass Density	جرم مخصوص
Matrices	متریس ها جمع متریکس
Matrix	متریکس
Matter	ماده
Mean Value Theorem	قضیه مقدار میانگین
Mesh	شبکه - تور مانند - مشبک
Method of Exhaustion	روش جزء به جزء
Midpoint	نقطه میانی
Minor	فرعی
Mixed Partial Derivative	مشتق جزئی مخلوط - مشتق پاره ای امیخته
Model	انگاره - مدل
Model	الگو - نمونه - انگاره
Moment	گشتاور
Monomial	یک جمله ای
Multiple	مضرب
Multiple	ضریب
Multiplicative Identity	عدد خنثی در ضرب
Multiplicative Inverse	عدد وارونه در ضرب
Multiply	ضرب کردن
Mutual	دو جانبه - دو طرفه - متقابل
Mutually	متقابلا
Mutually Exclusive Events	اتفاق های ناسازگار
Mutually Perpendicular	دو به دو عمود بر هم
Natural Numbers	اعداد طبیعی
Navigating	رهیابی - رفت و آمد کشتی ها
Negation	نفی - انکار
Negative	منفی

Negative Square Root	ریشه دوم منفی
No Less Than	نه کمتر از
No More Than	نه بیشتر از
Nondegenerate	مشخص - نا تبهگون
Non-degenerate	زوال نا پذیر
None Empty	نا تهی
Nonlinear	غیر خطی
Nonzero	غیر از صفر - بجز صفر
Norm	حد متوسط - میانگین
Normal Line	خط قائم بر منحنی (در نقطه مماس)
Normal Plane	صفحه قائم
Normal to a Plane	قائم بر صفحه
Normal Vector	بردار عمودی - بردار قائم
Notation	نماد
nth Root	ریشه انم
Number Line	محور اعداد
Oblique	مورب
Observation	مشاهده علمی
Obtuse Angle	زاویه منفرجه
Octagon	هشت گوش
Octant	یک هشتم
Octants	هشت گانه ها
Odd	فرد (مانند عدد فرد)
One-Sided	یک طرفه
One-to-one Function	تابع یک به یک
Open Interval	بازه باز
Operations	انجام عملیات (جمع - تفریق - ضرب - تقسیم)
Operations	عملیات
Opposite	قرینه - مخالف
Orbit	چرخیدن - دور زدن
Orbit	مدار - دور زدن - در مدار چرخیدن
Order	ترتیب
Ordered Pair	دو گانه مرتب

Ordered Pair	دو تایی مرتب - زوج مرتب
Ordered Triple	سه تایی مرتب
Ordered Triple	سه تایی مرتب
Ordinate	عرض
Orientation	جهت
Origin	مبدأ
Outcome	نتیجه - پیامد - بازده
Output	خروجی
Overlap	تداخل کردن - ری هم افتادن
Pair	زوج - جفت
Pane	شیشه - جام
Parabola	سهمی
Parallel	موازی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Parameter	پارامتر - مقدار مشخص
Parameter Space	فضای پارامتری
Parameterization	پارامتری کردن - پارامتر سازی
Parameterize	پارامتری کردن
Parameterize	پارامتر کردن
Parameterize	پارامتری کردن
Parameterized	پارامتری شده
Parametric	پارامتری
Parametric	پارامتری
Parametric Curve	منحنی پارامتری
Parametric Curve	منحنی پارامتری
Parametric Domain	قلمرو پارامتری
Parametric Equation	معادله پارامتری
Parametric Representation	نمایش پارامتری
Parametric Representation of a Curve	نمایش پارامتری یک منحنی
Parametric Space	فضای پارامتری
Parametrically	با معادله پارامتری
Parentheses	پرانتز ها ()
Partial Sum	مجموع جزئی

Partial Summation	جمع بندی جزئی
Partition	پارش - تقسیم بندی
Path	مسیر
Pattern	الگو - نمونه - طرح
Payment Period	دوره پرداخت
Pendulum	پاندول
Perfect Square	مربع کامل
Perimeter	پیرامون - محیط
Perimeter	محیط
Period	دوره - دوره تناوب
Period	دوره تناوب
Period	دور تناوب
Periodic	تناوبی
Periodic Functions	توابع تناوبی
Permutation	جایگشت
Phase	گام - دوره
Phase Shift	گام جابجائی
Phenomena	پدیده ها
Phenomena	پدیده ها
Phenomenon	پدیده
Phenomenon	پدیده
Phenomenon	پدیده
Piecewise	تکه ای - قطعه به قطعه
Piecewise Continuous	قطعه به قطعه پیوسته - پاره پاره پیوسته
Piecewise Smooth	قطعه به قطعه هموار
Piecewise-defined function	تابع چند ضابطه ای
Plane	صفحه
Plane	صفحه
Plane Region	ناحیه مسطح
Planet	سیاره
Plot	نشان دادن ی تعیین کردن
Point of Intersection	نقطه تقاطع
Point of Tangency	نقطه مماس

Polar Coordinate	دستگاه مختصات قطبی
Polygonal	چند گوشه
Polygonal Arc	کمان چند ضلعی
Polygonal Curve	منحنی چند بری
Polynomial	چند جمله ای
Portion	قسمت
Positive	مثبت
Positive Square Root	ریشه دوم مثبت
Power Series	سری های توانی
Precise	دقیق
Prime Polynomial	چند جمله ای اول (غیر قابل فاکتور گیری)
Principal	سرمايه
Principal Axis	محور اصلی
Principal Square Root	ریشه دوم مثبت
Principle of Superposition	اصل بر هم نهی
Probability	احتمال
Probability Model	مدل احتمال
Problem	مسأله
Procedure	روش - اصولب
Process	عمل - جریان - مرحله
Process	مراحل مختلف
Projectile	پرتاب کردنی - پرتابی
Projection of x along y	تصویر x در امتداد y
Projection Plane	صفحه تصویری
Proper	حقیقی - سره - محض
Properties	خواص
Property	خاصیت - خصوصیت
Property	خصوصیت - خاصیت
Punch	بین دو انگشت قرار دادن - نیشگون گرفتن
Quadrant	ربع صفحه - ربع دایره
Quadrantal Angle	زاویه مرزی
Quadratic Equation	معادله درجه دو
Quadrilateral	چهار ضلعی

Quantity	کمیت
Quantity	کمیت
Quotient	خارج قسمت
Quotient	خارج قسمت - بهره
Radial	شعاعی
Radial Vector	بردار شعاعی
Radical	رادیکال
Radicand	عدد زیر رادیکال
Radius	شعاع (دایره)
Radius of Curvature	شعاع انحنا - شعاع خمیدگی
Radius Vector	بردار شعاعی
Random	تصادفی
Range	برد
Rate	نرخ - میزان - حد متوسط - سرعت متوسط
Rate	نسبت - میزان - نرخ - مقدار
Ratio	نسبت - خارج قسمت
Ratio Test	ازمون نسبت
Rational Exponent	توان کسری - توان گویا
Rational Numbers	اعداد گویا
Rationalize	گویا کردن
Rationalizing the Denominator	گویا کردن مخرج کسر
Real Numbers	اعداد حقیقی
Real-Valued Function	تابع حقیقی
Reasonable	منطقی
Reciprocal	وارونه - معکوس
Rectangle	مستطیل
Rectangular Coordinate System	محورهای مختصات
Rectangular Parallelepiped	مکعب مستطیل - متوازی السطوح قائم
Recursive	بازگشتی
Reduce	ساده کردن
Reference	ارجاع - رجوع - مراجعه
Reference Angle	زاویه مرجع
Reflection	انعکاس

Reflector	منعکس کننده
Region	بخش - منطقه
Regression	انعکاس - رگرسیون
Regular Pattern	الگوی منظم
Related	مربوطه
Relation	رابطه
Remainder	باقیمانده
Remarkable	قابل توجه
Represent	نشان دادن - مجسم کردن - بجای چیزی بکار رفتن
Resistance	مقاومت
Resistor	مقاوم
Resolution of a Vector	تجزیه یک بردار
Resolve into	تجزیه کردن به
Restricted	محدود شده - کنترل شده
Resultant	نیروی برآیند
Reverse	عکس - معکوس - وارونه - ضد
Review	دوره کردن - مرور کردن
Rhythmic	دارای وزن و آهنگ
Right Angle	زاویه قائمه
Right-Hand Limit	حد سمت راست
Rise	بالا رفتن - صعود کردن
Roll Die	طاس ریختن
Root	ریشه
Root	ریشه
Root Test	ازمون ریشه
Roster Form	فهرست وار (برای مشخص کردن مجموعه)
Rotate	بر محور خود چرخیدن
Row	ردیف
Rule	قاعده
Rule	قانون
Sample Space	فضای نمونه
Sandwich	ساندویچ
Satellite	ماهواره

Satisfy	شرائط يا الزامات چیزی را برآوردن
Scalar	کمیت عددی
Scalar Multiple	مضرب عددی
Scalar Multiplication	ضرب عددی
Scatter	پراکنده
Scatter Diagram	نمودار پراکندگی
Scientific Notation	عدد نویسی علمی - نماد علمی
Secant	خط قاطع - سکانت
Second Degree Equation	معادله درجه دوم
Section	بخش - قسمت
Sector	قطاع دایره
Sector	قطاع
Sequence	دنباله
Set	مجموعه
Set Builder Notation	توصیف مجموعه (برای مشخص کردن مجموعه)
Sharp Corner	نقطه مماس
Shift	تغیر مکان دادن - جا بجا شدن
Shift	جابجا کردن - تغییر مکان دادن
Side	ضلع
Similar	متشابه
Simple Interest	ربح ساده
Simplify	ساده کردن
Simultaneously	همزمان - توأم
Sine Wave	موج سینوسی
Single Integral	انتگرال ساده یا منفرد
Situation	موقعیت
Slant	اریب - کج - یک وری
Slant	شیب - اریب - کج
Slope	شیب - شتاب
Slope-Intercept Form	شکل شیب-نقاط - شکل شیب-برخوردگاه
Smooth Curve	منحنی یک دست - منحنی صاف
Solid	جامد - سه بعدی
Solid	جسم جامد - جسم سه بعدی

Solid	جسم - سه بعدی
Solid Line	خط کامل
Solid Region	ناحیه سه بعدی
Solution	حل - راه حل - جواب
Solution Region	منطقه جواب
Solve	حل کردن
Space	فضا
Space Curve	منحنی فضائی
Space Geometry	هندسه فضائی
Spandrel	سه گوش قوسی
Special	مخصوص
Special Products	اتحاد های مهم - حاصل ضرب های مخصوص
Specified	مشخص - معین - معلوم
Specify	مشخص کردن
Specify	مشخص کردن
Speed	مقدار سرعت یک کمیت عددی است
Sphere	کره
Spiral	مار پیچ
Square	مربع
Square	مربع
Square Root	ریشه دوم - جذر
Square Root Function	تابع جذری - تابع ریشه دوم
Squeeze	فشردن - چلانیدن
Standard Position	محل متعارف
Statement	بیان - اظهار - بیان کردن
Statistics	آمار
Steepness	سرازیری - سراسیمگی
Step Function	تابع پلکانی
Straight Angle	زاویه نیم صفحه که مساوی صد و هشتاد درجه است
Stretch	کش آمدن - کشیده شدن
Sub Set	زیر مجموعه
Subinterval	بازه فرعی
Submerge	غوطه ور

Subscripted	زیر نویس دار
Substitution	جانشینی - جای گزین کردن
Subtract	تفریق کردن - کسر کردن
Successive	پیاپی - بعدی - پشت سر هم - متوالی
Sum	جمع - افزانه
Sum	خاصل جمع - مجموع
Sum of Series	مجموع سری
Summand	جمع وند
Supplementary Angles	زاویه های مکمل
Support	نگهداشتن
Surface Area	سطح جانبی - رویه جانبی
Survey	بررسی - مطالعه
Surveying	نقشه برداری
Swing	نوسان - حرکت پاندولی - حرکت تاب
Symbol	نماد
Symmetric	هم اندازه - متقارن - قرینه
Symmetric Equation	معادله تقارنی
Symmetry	تقارن
System	دستگاه
Tail	دم
Tangent Line	خط مماس
Tangent Plane Approximation	تقریب صفحه مماس
Tangential	مماسی
Tangential Acceleration	شتاب مماسی
Tangential Component of Acceleration	مؤلفه مماس شتاب
Technique	روش - تکنیک
Tendency	گرایش
Term	اصطلاح - کلمه - جمله
Terminal Side	ضلع ثانوی
Terminal Side	ضلع انتهائی
Test Point	نقطه آزمایش
Tetrahedron	چهاروجهی

The Same Number	یک عدد - همان عدد
Theorem	قضیه
Three Dimensional	سه بعدی
Tilt	کج شدن - کج کردن - کجی - سرازیری
Time	زمان - وقت - مدت
Time Value of Money	ارزش زمانی پول
Torus	چنبره - چیزی شبیه لاستیک باد شده
Torus	حلقه - چنبره
Toss	شیر یا خط کردن
Toss	بالا انداختن مانند شیر یا خط کردن
Toss a Coin	شیر یا خط کردن
Total Differential	دیفرانسیل کل
Trace	اثر - ترسیم کردن
Transformation	تبدیل - تغییر
Transformation	تبدیل
Transverse Axis	محور قاطع - محور کانونی
Trapezoid	دوزنقه
Traverse	در امتداد چیزی حرکت کردن
Tree Diagram	نمودار درختی
Trigonometric Identities	همانی های مثلثاتی
Trinomial	سه جمله ای
Triple Integral	انتگرال سه گانه
Triple Product	حاصلضرب سه گانه
Triple Vector Product	ضرب برداری سه گانه
True	صحیح
Turning Point	نقطه عطف
Two Dimensional	دو بعدی
Unbounded	نا محدود - لا یتناهی
Undefined	نا معین
Uniformly	بطور یکسان
Uninhibited Decay	فرو کاست نا محدود
Uninhibited Growth	رشد نا محدود
Union	اجتماع

Union of Sets	اجتماع مجموعه ها
Unique	منحصربه فرد یکتا - یگانه
Uniqueness	منحصر به فرد بودن
Unit	واحد
Universal	جامع
Upper Bound	بالا کران
Upper Sum	مجموع بالا
Upward	به طرف بالا
Utility	وسیله - ابزار
Value	مقدار - کمیت - قدر
Variable	متغیر
Variation	وردش - تغییر - واریانس
Vault	گنبد
Vector Component	مؤلفه بردار
Vector Projection	تصویربرداری
Vector-Valued Function	تابع برداری
Velocity	سرعت
Velocity	تندی - سرعت برداری
Velocity Function	تابع سرعت
Velocity Vector	بردار سرعت
Verify	درستی چیزی را ثابت کردن
Version	نسخه - تفسیر - روایت - ترجمه
Vertex	منحنی یک دست - منحنی صاف
Vertical	عمودی - قائم
Vertical	عمودی
Vertical Shift	جابجائی عمودی
Vertically Simple	به طور قائم ساده
Voltage	ولتاژ
Volume	حجم
Washer	واشر - حلقه فلزی - پوسته
Wedge	گوه بر وزن کره
Weight	وزن
Whole	تمام

Whole Numbers	اعداد حسابی
Width	عرض
With Respect to	نسبت به
x-intercept	محل برخورد نمودار با محور اکس
y-intercept	محل برخورد نمودار با محور وای
Zero Factor Property	خاصیت عامل صفر